PRÁCTICA USUAL

DE LOS

CÁLCULOS DE ESTABILIDAD

DE LOS PUENTES

EXPOSICIÓN ELEMENTAL

POR

D. LUÍS GAZTELU

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS,
PROFESOR DE PUENTES DE LA ESCUELA ESPECIAL DEL CUERPO,
EX-PROFESOR DE CÁLCULO INFINITESIMAL DE LA ESCUELA GENERAL PREPARATORIA
DE INGENIEROS Y ARQUITECTOS

Con 165 figuras intercaladas en el texto y 8 láminas con 10 cuadros gráficos

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE FORTANET
IMPRESOR DE LA REAL ACADEMIA DE LA HISTORIA
Calle de la Libertad, núm. 29

1896

PRÓLOGO.

El conocimiento de los cálculos necesarios para la redacción de los proyectos de puentes requiere, si ha de ser completo, el estudio previo de la Mecánica racional y aplicada; y éste absorbe una gran parte del tiempo que se dedica al estudio de la carrera de Ingeniero, puesto que han de precederle varios cursos de Matemáticas.

Pero, en la inmensa mayoría de los casos que se presentan en la práctica, esos cálculos se reducen á aplicaciones muy sencillas de las Matemáticas elementales y de las primeras nociones de la Mecánica, siendo muy suficiente para poder comprenderlos y efectuarlos acertadamente una instrucción comparable á la que exigen los programas de los concursos de Ayudantes de Obras públicas.

Desde que, en 1890, me encargué de la clase de Cimientos, Puentes y Túneles en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, observé la conveniencia de facilitar á los alumnos el estudio de los proyectos de puentes, redactando, al efecto, algunas lecciones acerca de la aplicación

práctica de los principios que han estudiado en la Mecánica aplicada á las construcciones y en la clase antes citada, con ejemplos numéricos detallados que les pudiesen servir de guía para vencer las dificultades de detalle que siempre se presentan á quien, por primera vez, ejecuta esta clase de cálculos; podrían así reducir á lo estrictamente necesario el tiempo que invierten en ellos, dedicando su atención preferente al estudio de la composición y de las disposiciones que conviene adoptar, que es el principal resultado práctico que se persigue al hacerles redactar proyectos.

Era natural que precediese á este estudio un resumen sucinto de los principios fundamentales de la Resistencia de materiales; mas como este resumen no había de ser de utilidad inmediata para alumnos que acaban de estudiar extensamente la Mecánica aplicada, me pareció oportuno tratar de exponer las nociones indispensables para poder comprender las aplicaciones, de un modo muy elemental, sin emplear el lenguaje ni las notaciones del Cálculo infinitesimal, y hacer así accesible el estudio de este libro á muchos constructores que no podrían utilizarlo en otro caso por falta de suficientes conocimientos matemáticos.

Una vez admitida esta idea, era inevitable sacrificar en gran parte el rigor matemático en la exposición; pero he creído conveniente aceptar este defecto en vista del objeto puramente práctico que me he propuesto, y he procurado facilitar las aplicaciones por medio de tablas y cuadros gráficos que simplifican mucho los cálculos, y figuran en gran número en el texto.

Los Ingenieros familiarizados con estas materias no halla-

rán novedades fundamentales en este libro; pero creo que podrá ser útil para aquellos que, habiendo dejado de prestar atención á estos estudios durante mucho tiempo, se vean en la necesidad de proyectar puentes. En tal caso, es indispensable un trabajo penoso para entresacar de obras extensas, escritas muchas veces con criterios opuestos y muy diversas notaciones, y á menudo en lenguas que no poseen con perfección, procedimientos de cálculo que al fin resultan fáciles y sencillos. Un libro elemental puede evitar ese trabajo y la pérdida de tiempo consiguiente.

Teniendo presente que me dirijo principalmente á lectores poco versados en estos cálculos, no he vacilado en incluir ejemplos numéricos detallados y completos, cuya lectura es poco amena; pero los considero como un recurso insustituíble para quien, no dominando la materia, se ve en el caso de estudiar un proyecto.

No obstante su carácter elemental, los alumnos de la Escuela de Caminos encontrarán en este libro toda la parte doctrinal de las lecciones de puentes de fábrica y en especial de los metálicos.

Si he logrado desarrollar con acierto las ideas que preceden, confío en que mi trabajo será de alguna utilidad para los constructores españoles, y espero que, en todo caso, lo acogerán con benevolencia en atención á mi buen deseo.

Enero de 1896.

L. GAZTELU.

PARTE PRIMERA.

NOCIONES DE RESISTENCIA DE MATERIALES.

CAPÍTULO I.

EXTENSIÓN Y COMPRESIÓN.

1. Objeto de la resistencia de materiales.—El problema que trata de resolver la Resistencia de materiales, enunciado en toda su generalidad, es el siguiente:

Dado un sólido natural de forma y dimensiones conocidas y un grupo ó sistema de fuerzas que obran sobre él, determinar:

1.° *Las acciones interiores ó fuerzas moleculares que deberán desarrollarse en el interior del sólido para equilibrar el sistema de fuerzas exteriores.*

2.° *Las variaciones de forma que experimentará el cuerpo bajo la acción de dichas fuerzas.*

Los tratados especiales resuelven este problema general empleando los recursos del Análisis infinitesimal; mas para la práctica ordinaria de la redacción de proyectos de puentes bastan algunas nociones de dicha ciencia. Trataremos de exponer sus principios más indispensables, haciendo uso exclusivamente de consideraciones elementales.

Empecemos por el caso más sencillo, que es el de la extensión y compresión simple de un sólido prismático.

2. Fenómenos de extensión.—Imaginemos una barra de hierro colgada por uno de sus extremos de un apoyo de resistencia indefinida, y apliquemos al extremo opuesto un peso P que obre según el eje de la barra. Esta se alargará más ó menos, alejándose

sus moléculas unas de otras en la dirección de su eje, y al alejarse nacerán atracciones que equilibrarán al peso. Si éste aumenta, aumentará el alargamiento, y al mismo tiempo las atracciones, para hacer equilibrio al nuevo peso.

Llamemos ω á la sección de la barra, L á su longitud, l al alargamiento. La fuerza que obrará en cada unidad de la superficie ω será $\frac{P}{\omega}$, y el alargamiento relativo, ó por unidad de longitud, $\frac{l}{L}$.

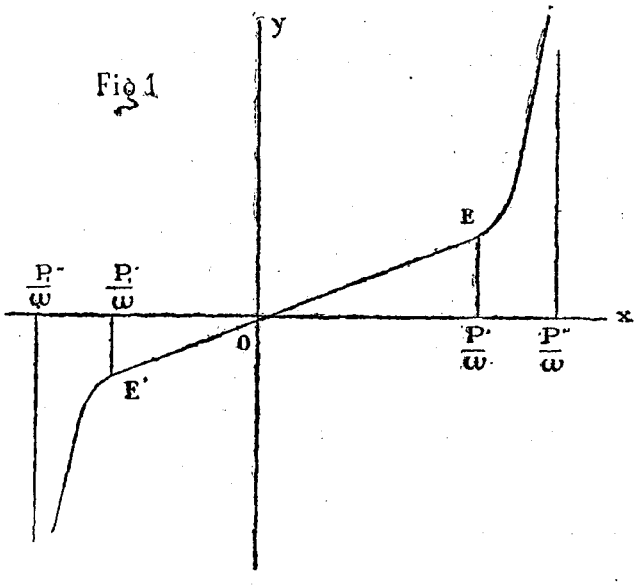
La experiencia demuestra que, no excediendo P de cierto límite, estas dos cantidades varían proporcionalmente (1), y, por tanto, se tendrá

$$\frac{P}{\omega} = E\frac{l}{L} \qquad [1]$$

siendo E un coeficiente que depende de la naturaleza del material, y recibe el nombre de *coeficiente* ó *módulo de elasticidad*.

Tomemos dos ejes rectangulares Ox y Oy (fig. 1); llevemos sobre

Fig 1



el eje Ox, á partir de O, los valores sucesivos de $\frac{P}{\omega}$, y sobre perpen-

(1) Esta ley experimental, base de la Teoría de la resistencia de materiales, fué descubierta en 1678 por Hooke, quien la enunciaba diciendo «Ut tensio sic vis.» (*A history of the theory of elasticity and of the strength of materials*, de Todhunter y Pearson.)

diculares al mismo, ó paralelamente á Oy, los correspondientes de $\frac{l}{L}$.

Según la ley que indica la experiencia y traduce la fórmula [1], la línea que así obtendremos será una recta OE.

Mas al dar al peso un cierto valor P', observaremos que cesa la ley de proporcionalidad, y para valores superiores de P, los alargamientos crecen más que proporcionalmente á $\frac{P}{\omega}$. La curva presentará un codo brusco, y tendrá la forma indicada en la figura.

Al valor $\frac{P'}{\omega}$ se le llama *límite de elasticidad.*

En efecto, se observa que para valores menores que $\frac{P'}{\omega}$, el alargamiento de la barra cesa cuando deja de actuar el peso, volviendo la barra á tomar su longitud primitiva; al paso que para valores mayores, el alargamiento persiste, aunque deje de actuar el peso.

Si continuamos aumentando el peso gradualmente, llegaremos á un valor P'' que producirá la rotura de la barra. El peso correspondiente por unidad de superficie de la sección de la barra, ó sea $\frac{P''}{\omega}$, recibe el nombre de *carga de rotura*, y, como todos los coeficientes que hemos definido, depende de la naturaleza del material, y se determina experimentalmente.

3. Coeficiente de resistencia.—En una construcción, los esfuerzos que sufre una pieza no deben llegar, ni aun acercarse á este límite. En general, se fija como límite una fracción de la carga de rotura, que puede variar según los casos y según el material que constituya la pieza. A esta fracción se llama *coeficiente de seguridad*, porque mide en cierto modo la confianza que puede inspirar la pieza. Se comprende fácilmente que la condición para que aquélla no se rompa será que

$$\frac{P}{\omega} < \frac{P''}{\omega}$$

ó bien

$$\frac{P}{\omega} \leq m \times \frac{P''}{\omega}$$

siendo m el coeficiente de seguridad, siempre menor que la unidad.

La fuerza $m \times \frac{P''}{\omega}$ es el *coeficiente de resistencia* (1) que generalmente se designa por R, y la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{P}{\omega} \leqq R \qquad [2]$$

relación fundamental que tendremos que emplear constantemente, y de cuya significación importa penetrarse bien (2).

4. COMPRESIÓN.—Si se considera el fenómeno de la compresión en un prisma de mucha longitud relativamente á sus dimensiones transversales, se presenta una complicación fácil de comprender. Una observación vulgar nos hace ver que una varilla capaz de sostener con seguridad completa un peso dado, si está colgado de ella, se tuerce y se dobla si intentamos apoyarla en el suelo por un extremo y cargarla por el opuesto con el mismo peso. En este caso, no se rompe la varilla por aplastamiento producido por el peso obrando según su eje, sino que adquiere una deformación permanente producida por flexión, fenómeno que examinaremos más adelante.

Pero si la longitud del prisma no excede de 10 ó 12 veces la menor dimensión de su sección transversal, la experiencia demuestra que aquel no se rompe por flexión, siendo en este caso el fenómeno de la compresión, que llamaremos simple, muy semejante al de la

---

(1) Consideramos impropia la denominación de *carga permanente* adoptada por algunos autores. Si se calculan las vigas de un puente de hierro con el coeficiente de resistencia de 6 kg. por milímetro cuadrado para la carga de prueba, bien puede asegurarse, siendo la luz de alguna consideración, que los cuchillos principales no estarán jamás sometidos á esa carga fuera del acto de la prueba, y es, por consiguiente, notoria inexactitud llamarla permanente. Frecuentemente le llamaremos *trabajo límite*, *trabajo máximo* ó simplemente *trabajo* del material, conformándonos con esta denominación corriente hoy entre los Ingenieros, sin que creamos que pueda originarse confusión por tener esta expresión una acepción muy distinta en la Dinámica. También se llama *límite práctico de resistencia* y *carga de seguridad*.

(2) Algunos Ingenieros pretenden que no puede definirse el coeficiente de resistencia como una fracción de la carga de rotura, sino del límite de elasticidad, fundándose en que mucho antes de llegar á la carga de rotura queda inutilizada la pieza. Pero como, cualquiera que sea la definición que se admita, convienen todos en las cifras que deben adoptarse para coeficientes de resistencia, esta cuestión no tiene importancia práctica, al menos para el estudio que nos proponemos.

extensión (1). Así, si vamos cargando el sólido con pesos crecientes, observaremos acortamientos proporcionales á los pesos, según se representa en la figura 1, contando ahora los pesos sobre el eje de las x á la izquierda del origen, y los acortamientos hacia abajo, en el sentido de las y negativas; llegaremos á un peso $\frac{P_1'}{\omega}$ que producirá la deformación permanente, y, finalmente á la carga de rotura $\frac{P_1''}{\omega}$, como se ve en la figura. Es de advertir que las cargas de rotura por extensión y por compresión difieren en algunos materiales bastante poco para que pueda adoptarse en la práctica el mismo coeficiente de resistencia. Tales son las maderas y los hierros. Otros, por el contrario, como la fundición y las piedras, resisten mucho mejor á la compresión que á la extensión, y no deben emplearse sometidos á esta clase de esfuerzos.

5. Aplicación de las fórmulas.—Las fórmulas [1] y [2] resuelven por completo el problema propuesto al principio de este capítulo, en el caso de los sólidos prismáticos sometidos á tensión ó á compresión simple. La [1] da los alargamientos ó acortamientos producidos por la fuerza exterior P, alargamientos ó acortamientos que constituyen en este caso la principal variación de forma del sólido. La fórmula [2] permite determinar las fuerzas moleculares que deberá desarrollar cada unidad superficial de la sección transversal del sólido para hacer equilibrio á la fuerza exterior. La com-

---

(1) El hecho de que un prisma cuya longitud no exceda de 10 ó 12 veces la menor dimensión de su sección transversal no se rompe por flexión lateral, sino por aplastamiento, puede considerarse plenamente comprobado por la experiencia.

Hodgkinson, en su Memoria *On the strength of Stone Columns*, dice lo siguiente: «De los experimentos verificados en las dos series de pilares resulta una disminución de resistencia en todos los pilares, desde los más cortos á los más largos (á igualdad de sección); pero la disminución es tan pequeña cuando la altura del pilar no excede de 12 veces el lado del cuadrado de su base, que la resistencia puede ser considerada como constante.»

Este hecho fué conocido en la antigüedad, como lo prueba la circunstancia de haberse adoptado como límite de la altura de las columnas, relativamente á las dimensiones de la base en los órdenes de Arquitectura, 20 módulos, ó sea, 10 diámetros.

Todo esto se refiere á las columnas de piedra; pero es bien sabido que con mayor razón puede aplicarse á las maderas y metales, y que con estos materiales se emplean postes y columnas mucho más alargados que con la piedra.

paración de este esfuerzo molecular con el que produce la rotura nos da á conocer la seguridad que ofrece la pieza.

En la redacción de proyectos es de una aplicación constante el 2.° problema enunciado. El 1.°, en cambio, ofrece un interés muy secundario, y es además mucho más difícil, salvo en el caso sencillísimo que hemos examinado. En adelante prescindiremos por completo de él, por ser ajeno al objeto puramente práctico que nos proponemos.

Apliquemos ahora la fórmula [2] á algunos casos prácticos.

6. Ejemplos.—1.° *La tensión de una barra de celosía es 28.684 kg. El coeficiente de resistencia admitido 6 kg. por milímetro cuadrado. El espesor del palastro que ha de adoptarse 20 mm. ¿Cuál deberá ser el ancho de la barra?*

Llamando x al ancho buscado, el área ω, expresada en milímetros cuadrados, será $\omega = 20 \times x$.

En la fórmula [2] tendremos que hacer $P = 28.684$ kg. y $R = 6$; luego, haciendo la sustitución, resultará

$$\frac{28.684}{20 \times x} = 6$$

de donde

$$x = \frac{28.684}{6 \times 20} = 239 \text{ mm.}$$

2.° *La tensión de un tirante de hierro es 5.900 kg. El coeficiente de resistencia 6 kg. por milímetro cuadrado. Calcular el diámetro del tirante suponiendo que su sección debe ser circular.*

En la fórmula [2] tendremos $P = 5.900$ kg.; $R = 6$; luego

$$\frac{5.900}{\omega} = 6$$

de donde

$$\omega = \frac{5.900}{6} = 983{,}33 \text{ mm.}^2$$

El diámetro se calcula por la relación conocida de Geometría elemental $\frac{\pi}{4} d^2 = 983{,}33$. Pero en la práctica se abrevia este cálculo

valiéndose de las tablas que se encuentran en todos los manuales y formularios, y pueden verse al final de este libro, las cuales dan, para todos los números enteros de 1 á 1.000, los valores correspondientes de $\frac{\pi}{4} d^2$. Buscaremos en estas tablas el valor inmediatamente superior á 983,33 en la columna encabezada $\frac{\pi}{4} d^2$, que es 1.017,9, y veremos que el diámetro correspondiente es 36 mm. El trabajo efectivo del hierro será entonces $\frac{5.900}{1.017,9} = 5,79$ kg. por milímetro cuadrado.

En esta clase de cálculos se admite siempre, al adoptar las secciones prácticas, una tolerancia de algunas décimas de kilogramo que no tiene importancia alguna, y permite abreviar los cálculos; debe procurarse que este error sea por defecto, como en el caso que estudiamos.

3.° *Una barra de celosía, cuya longitud libre (distancia entre sus cruzamientos con otras dos barras á las cuales está roblonada) es de 1,04 m., está sometida á una compresión de 13.750 kg. Examínese si puede admitirse para constituirla un hierro de forma* T *cuyas dimensiones son* $\frac{100 \times 100}{12}$ (1). *El coeficiente de resistencia que se admite es 6 kg. por milímetro cuadrado.*

Veamos, en primer lugar, si podemos aplicar la fórmula [2]. Para ello observaremos que la longitud de la pieza debe considerarse igual á 1,04 m., por estar roblonados dos de sus puntos que distan esta cantidad. Así lo demuestra la experiencia.

La menor dimensión de la sección es 100 mm. (no el espesor de

---

(1) Esta notación significa que el ancho de los nervios es de 100 mm. y el espesor medio de 12 mm.

Si los anchos y los espesores fueran diferentes, se anotaría así: $\frac{120}{12} \times \frac{100}{15}$; lo cual expresa que uno de los nervios tiene 120 mm. de ancho y 12 de espesor, y el otro 100 y 15 respectivamente. Las mismas notaciones se emplean para los hierros de ángulo y en doble T, y análogas y fáciles de interpretar son las correspondientes á los hierros en U. El ancho del nervio se coloca encima de una raya de fracción, ocupando el lugar del numerador, y el espesor correspondiente debajo, en el lugar del denominador.

los nervios, sino la menor dimensión de un rectángulo que envuelve á la sección). Luego la relación de la longitud á dicha menor dimensión es $\frac{1.040}{100}$, ó sea próximamente 10. Sabemos, pues, n.° [4] que no hay peligro de que la pieza se doble, y podemos emplear la fórmula [2].

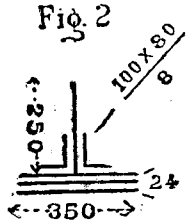
La sección del hierro propuesto es $\omega = 2.256$ mm.^{2}; $P = 13.750$ kg. luego

$$\frac{P}{\omega} = \frac{13.750}{2.256} = 6{,}09 \text{ kg. por milímetro cuadrado.}$$

El hierro propuesto es admisible.

4.° *En uno de los trozos de la cabeza inferior de una viga de hierro actúa un esfuerzo de tensión de 78.525 kg. Se propone componer su sección con una chapa vertical de 250 mm. de altura y 8 mm. de espesor, dos hierros de ángulo de* $\frac{100 \times 80}{8}$, *y el número necesario de chapas de 8 mm. de espesor y 350 de ancho* (fig. 2). *El trabajo admisible para el hierro es 6 kg. por milímetro cuadrado.*

Fig. 2



La sección mínima deberá ser $\frac{78.525}{6} = 13.088$ milímetros cuadrados.

El alma vertical y los dos hierros de ángulo dan una sección de 4.752 mm.^{2} Cada chapa horizontal da 2.800 mm.^{2} Luego, para obtener una sección mayor que la calculada, necesitamos tres de estas chapas, y la cabeza quedará formada como se indica en la figura. Su área es 13.152 mm.^{2}, y, por lo tanto, el trabajo efectivo del hierro $\frac{78.575}{13.152} =$ 5,97 kg. por mm.^{2}

Observación.—Se ve que, en casi todos los ejemplos anteriores, hemos aplicado un procedimiento de tanteo para obtener las secciones, y que no hemos tratado de resolver matemáticamente el problema de modo que las piezas trabajen exactamente á 6 kg. por milímetro cuadrado. Esto procede de la necesidad de formar las secciones con hierros de fabricación corriente, y los tanteos son tanto más nece-

sarios cuanto más compleja es la sección. En el 1.er ejemplo, en que la sección buscada es rectangular, se ha podido plantear el problema considerando como incógnita uno de sus lados y determinándolo exactamente. En el ejemplo 4.° hemos tenido que fijar un gran número de dimensiones, y en realidad el cálculo sólo nos ha indicado la necesidad de poner tres chapas del tipo adoptado para que el trabajo del hierro no exceda de 6 kg. por milímetro cuadrado.

7. COEFICIENTES DE RESISTENCIA QUE SE ADOPTAN EN LOS CÁLCULOS DE PUENTES. FÁBRICAS.—Indicaremos aquí las cifras que se adoptan ordinariamente, ó las reglas que sirven para determinar estos coeficientes en las fábricas, metales usados en la construcción de puentes, y maderas.

Es difícil fijar cifras en lo relativo al coeficiente de resistencia de las fábricas, porque varía entre límites muy extensos según la naturaleza del material y de la fábrica. Depende, en primer lugar, de la carga de rotura del material, á la cual se debe aplicar un coeficiente de seguridad; pero, como las fábricas no son macizos homogéneos, y la transmisión de las presiones se verifica siempre de un modo más ó menos irregular, concentrándose en los puntos de apoyo de las piedras, debe tenerse en cuenta esta circunstancia y aplicar por esta razón un nuevo coeficiente de seguridad tanto menor cuanto mayor sea la irregularidad de la fábrica. El coeficiente definitivo relativo á la fábrica varía, por lo tanto, entre límites muy extensos, y generalmente suele estar comprendido entre $^1/_6$ y $^1/_{15}$. Podrá acercarse á $^1/_6$ cuando la fábrica sea muy esmerada, como la sillería, y deberá rebajarse á medida que la fábrica sea más irregular, influyendo también en esta elección la naturaleza y la calidad de los morteros.

A continuación insertamos un cuadro en que se expresan las cargas de rotura por centímetro cuadrado de varios materiales. En él se observará que el conocimiento de la naturaleza del material es insuficiente para juzgar acerca de su resistencia, dada la gran diferencia que existe entre estos límites:

PIEDRAS.	Cargas de rotura por cm.² — *Kilogramos.*
Basalto y pórfido.....	2.000 á 2.500
Granito.....	350 á 800
Areniscas.....	4 á 800
Calizas duras.....	150 á 500
Calizas blandas.....	50 á 150
Ladrillos.....	40 á 150

Hé aquí los límites entre los cuales varía ordinariamente el coeficiente de resistencia por centímetro cuadrado que se adopta en la práctica para las diversas fábricas:

CLASE DE FÁBRICA.	Peso del m.³ — *Kilogramos.*	Coeficiente de resistencia por cm.² — *Kilogramos.*
Sillería.....	2.000 á 2.700	15 á 40
Mampostería.....	2.000 á 2.300	3 á 20
Hormigón ordinario.....	2.300 á 2.400	3 á 5
Hormigón de cemento.....	2.300 á 2.400	6 á 14
Ladrillo.....	1.700 á 1.800	3 á 10

Estas cifras deben satisfacer á la condición de ser inferiores al producto de la carga de rotura por el coeficiente de seguridad; así, para que sea admisible la cifra 15 que figura como límite inferior para la sillería, es preciso que la carga de rotura del material sea mayor que $6 \times 15 = 90$ para obtener el mínimo de seguridad admisible, puesto que $\frac{1}{6} \times 90 = 15$.

La gran diferencia entre las cifras límites que figuran en los cuadros anteriores hace ver la conveniencia y aun la necesidad de ensayar los materiales que han de emplearse, cuando no se conoce su carga de rotura, y la prudencia con que hay que proceder cuando se carece de datos experimentales directos. Algunos Manuales y

obras de Construcción ó Mecánica aplicada fijan límites más próximos que los que nosotros indicamos; pero se advierten entre las cifras que dan numerosas contradicciones y anomalías.

8. Coeficientes de resistencia del hierro, el acero y la fundición.—Mucho se ha discutido acerca de los coeficientes que conviene fijar para el trabajo del material en los puentes metálicos. Hasta hace algunos años se fijaba un límite único para todas las piezas, 6,50 kg. por milímetro cuadrado generalmente. Pero, á consecuencia de trabajos experimentales minuciosos realizados en Alemania, las ideas de los ingenieros se han modificado radicalmente en este punto. Hoy se admite como principio que los coeficientes deben variar según las condiciones en que trabajan las piezas á que se aplican. Las piezas expuestas directamente á las cargas accidentales, y en las cuales éstas son considerables relativamente al peso permanente que obra sobre aquéllas, como son las viguetas y largueros del piso, se someten á un trabajo límite reducido. Por el contrario, los cuchillos principales de los puentes de luces considerables, en que la relación de la carga móvil á la carga permanente es pequeña, se pueden someter á un trabajo mayor. El límite máximo adoptado con las mayores luces para el hierro varía, según los países, de 8 á 10 kg.

En estas ideas están inspiradas las disposiciones oficiales vigentes en Austria y Francia y las dictadas posteriormente en España (1).

En la circular francesa se fija como límite del trabajo del hierro por milímetro cuadrado, ó coeficiente de resistencia, en los cuchillos principales, 6,5 kg. para luces inferiores á 30 m. Para luces mayores, se autoriza á los ingenieros á pasar de este límite justificando el coeficiente que adopten, pero no debiendo exceder nunca dicho coeficiente de 8,5 kg. (2).

---

(1) La circular austriaca mencionada es de 15 de Septiembre de 1887. Fué estudiada por el ingeniero Sr. Leber, quien, para justificarla, publicó un notable trabajo que mencionaremos frecuentemente. La circular francesa publicada en 29 de Agosto de 1891 está basada en las mismas ideas, y sensiblemente conforme con la austriaca en lo relativo á los coeficientes de resistencia; y otro tanto puede decirse de las disposiciones vigentes en España, publicadas en la *Gaceta de Madrid* de 23 de Abril de 1893.

(2) La circular austriaca adopta como coeficiente, para luces inferiores á 40 m., 7 kg. por

Para las viguetas, largueros y demás piezas del piso expuestas directamente á la acción de cargas concentradas, el límite adoptado es 5,50 kg.

Cuando la pieza está sometida á esfuerzos alternativos de tensión y compresión se rebaja el coeficiente de resistencia, á consecuencia de ciertos experimentos verificados por Wöhler en Alemania, según los cuales la carga de rotura se reduce notablemente cuando las piezas se hallan en estas condiciones. La circular francesa fija como límite en este caso 4 kg. por milímetro cuadrado, pero admitiendo que se aproxime á los límites anteriores cuando las variaciones de los esfuerzos que puede sufrir la pieza sean pequeñas (1).

Los coeficientes admitidos por la circular francesa para el acero, correspondientes á los mismos casos examinados para el hierro, son los siguientes: para los cuchillos principales, 8,50 kg. por milímetro cuadrado si la luz es inferior á 30 m.; para luces mayores se admite

---

milímetro cuadrado, mas un aumento de 0,02 kg. por cada metro de luz. Así, por ejemplo, para 25 m. será $7 + 0{,}02 \times 25 = 7{,}50$ por milímetro cuadrado.

Para luces de más de 40 m. adopta:

Luces.	Coeficientes	Luces.	Coeficientes.
40 m.	7,80 kg.	120 m.	8,80 kg.
80	8,40	160 ó más.	9,00

Para luces intermedias se calculan los coeficientes por interpolación.

Estas reglas suponen que se considera la sección mínima de la pieza, descontando de ella los agujeros de los roblones.

En Alemania se usa mucho, aunque no es preceptivo su empleo, la siguiente fórmula, de Launhardt.

$$R = 700\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{S_{min}}{S_{max}}\right)$$

en la cual R es el coeficiente de resistencia por centímetro cuadrado, S_{min} el esfuerzo mínimo que puede sufrir la pieza, y S_{max} el esfuerzo máximo á que está expuesta.

(1) En Alemania se admiten en este caso los valores dados por la fórmula de Weyrauch,

$$R = 700\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{S_{min}}{S_{max}}\right)$$

que da el valor de R por centímetro cuadrado, teniendo S_{min} y S_{max} la misma significación que en la fórmula de Launhardt.

Debemos indicar que son muchos los ingenieros que no consideran justificado el empleo de estas fórmulas. Véase Leber et Bricka, *Calcul des Ponts métalliques;* Bricka, *Notes sur les formules de résistance du fer et de l'acier. (Annales des Ponts et Chaussées*, Diciembre de 1887.)

un aumento creciente con la luz, sin que pueda exceder nunca de 11,50 kg.

Para las viguetas y largueros del piso, el límite es 7,50 kg.

En el caso de piezas sometidas á esfuerzos alternativos de tensión y compresión, se admite 6 kg. por milímetro cuadrado, con las mismas reservas indicadas para el hierro.

Además se imponen siempre á los hierros y aceros ciertos límites inferiores respecto á la carga de rotura y al alargamiento que deben experimentar antes de romperse. Para ello se someten á ensayos algunas muestras del material, que deben dar, en el caso del hierro, una carga de rotura igual ó superior á 32 kg. por milímetro cuadrado y un alargamiento por lo menos de 8 por 100. En el caso del acero, la carga mínima de rotura es 42 kg., y el mínimo alargamiento para que sea admisible, 22 por 100.

Hemos indicado que la fundición resiste mucho más por compresión que por tensión. Por lo tanto, deben adoptarse coeficientes diferentes según la clase de trabajo á que esté sometida una pieza de fundición. La circular francesa admite 6 kg. por milímetro cuadrado cuando está sometida á compresión, y 1,50 kg. cuando obra por tensión. Sin embargo, cuando la pieza está sometida á flexión (lo cual, como veremos, supone extensión en una parte de ella), se admite un trabajo de 2,50 kg. por milímetro cuadrado.

En España se publicó de Real orden, en 23 de Abril de 1893, un dictamen aprobado por unanimidad por la Junta Consultiva de Caminos, Canales y Puertos, á propuesta del ilustre Inspector don Eduardo Saavedra. Su objeto era proponer que se encargase á los Ingenieros Jefes de las Divisiones de ferrocarriles el reconocimiento y la revisión de los cálculos de los puentes metálicos construídos en las vías férreas, á fin de conocer el grado de seguridad que presentan, teniendo en cuenta el peso cada vez mayor del moderno material móvil.

Copiamos de este importante documento el siguiente párrafo que prescribe los coeficientes que se deben adoptar en los proyectos de puentes metálicos:

«La Junta estima que, si no se puede pasar de un esfuerzo de 6,5 kilogramos por milímetro cuadrado en puentes de menos de 30

metros de luz, es admisible que ese guarismo llegue á 9 kilogramos cuando las vigas excedan de 150 metros; en cambio las viguetas y demás piezas de suelo no deben ser calculadas sino con coeficiente de 5,50 kilogramos. Esto para el hierro dulce, forjado ó pudelado, que cuando se adopte el acero, los límites para las vigas principales pueden variar entre 9 y 12 kilogramos, según los casos. En las barras de celosía ó de triangulación, en las cuales los esfuerzos de tensión ó compresión directa pueden cambiar alternativamente de dirección, los coeficientes se deben disminuir en un tercio; y á los roblones, sean de hierro ó de acero, no se les habrá de suponer una resistencia á la tronchadura superior á 3 kilogramos por milímetro cuadrado. No obstante todo lo dicho, los autores de los proyectos podrán poner los guarismos que su pericia técnica les aconseje, siempre que razonen suficientemente su adopción.»

9. Maderas.—Las maderas más empleadas en la construcción de puentes son el pino y el roble. Los coeficientes que se adoptan, tanto para la extensión como para la compresión, varían de 50 á 80 kilogramos por centímetro cuadrado. Con mucha frecuencia se admite 60 kg. por centímetro cuadrado.

Los pilotes constituídos por piezas de estas maderas se cargan á razón de 25 á 40 kg. por centímetro cuadrado cuando se apoyan en terreno de roca dura. Existen fórmulas empíricas para determinar los coeficientes de resistencia cuando se clavan en terrenos indefinidamente compresibles, pero no creemos oportuno estudiarlas aquí. Pueden verse en cualquier tratado de Cimientos.

10. Sólidos sometidos á compresión.—Estudiemos ahora el caso de una pieza prismática comprimida por sus extremos, cuando la longitud excede de 10 ó 12 veces la menor dimensión de la sección transversal del prisma. Hemos dicho ya que en este caso no se puede aplicar la fórmula [2] como si se tratase de una tensión, porque la pieza puede llegar á doblarse aunque la carga no sea suficiente para producir el aplastamiento.

Por consideraciones teóricas se ha llegado á una fórmula que da la menor fuerza capaz de producir la flexión en un prisma dado. Pero esta fórmula no tiene valor alguno en la práctica, porque sus resultados no están conformes con la experiencia.

Muchas son también las fórmulas empíricas ó reglas prácticas que se han propuesto para representar los resultados de estudios experimentales. Indicaremos brevemente algunas de las relativas á las piezas de madera y á las columnas de fundición ó de hierro; pero nos fijaremos especialmente en la aplicación de estas últimas á las secciones formadas con palastros y hierros laminados, que es el caso que se presenta ordinariamente en el cálculo de los puentes metálicos.

11. Piezas de madera.—Rondelet dió una regla fundada en la experiencia para determinar las cargas á que pueden someterse los postes de madera de sección cuadrada ó rectangular. Según esta regla, si la longitud de la pieza es

	12	24	36	48	60	72	veces la menor dimensión de la sección
la carga debe reducirse á	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	
y será	50	30	20	10	5	2,5	

si el coeficiente que puede admitirse para la extensión es 60 kg. por centímetro cuadrado.

Barré ha hallado la fórmula siguiente, que da con mucha aproximación los resultados de la regla de Rondelet. Llamando l á la longitud de la pieza, h á la menor dimensión de la sección transversal, R al coeficiente que debe adoptarse, R_o al que se adoptaría si la pieza obrara por tensión, se tiene

$$R = R_o \frac{1}{0{,}93 + 0{,}00185 \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Si se adopta $R_o = 60$, y se aplica la fórmula para $\frac{l}{h} = 36$, por ejemplo, se encuentra $R = 19{,}1$ kg.; la regla de Rondelet da 20 kg.

Esta regla ó la fórmula equivalente dan el medio de calcular la carga que se puede imponer á un poste de sección conocida, y de resolver el problema inverso por tanteo.

12. Columnas de fundición y de hierro.—Para calcular las

columnas de hierro huecas ó macizas y las de fundición, sirven de base los resultados de los experimentos de Hodgkinson, reducidos á fórmulas empíricas por muchos autores. Las fórmulas que dió Hodgkinson tienen el inconveniente de contener potencias fraccionarias del diámetro y de la longitud, por lo que resultan poco prácticas. Love dió otras cuya estructura es análoga á la de la fórmula de Barré.

La fórmula de Love para columnas de fundición macizas es la siguiente:

$$R = \frac{R_o}{1{,}45 + 0{,}0037 \left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

en que d representa el diámetro; R, R_o y l tienen la misma significación que en la fórmula de Barré. Se aplica esta fórmula para valores de $\frac{l}{d}$ mayores que 30.

Para valores de $\frac{l}{d}$ menores que 30, da la fórmula

$$R = \frac{R_o}{0{,}68 + 0{,}1 \frac{l}{d}},$$

que representa en este caso con más exactitud que la anterior los resultados de los experimentos.

Una columna hueca se considera como la diferencia de dos macizas, y la carga que le corresponde es la diferencia de las que pueden sostener con seguridad las dos macizas.

Para las columnas de hierro da dos fórmulas análogas á las anteriores.

Si el valor de $\frac{l}{d}$ es mayor que 30, la fórmula es

$$R = \frac{R_o}{1{,}55 + 0{,}0005 \left(\frac{l}{d}\right)^2};$$

y para $\frac{l}{d} < 30$ $\qquad R = \frac{R_o}{0{,}85 + 0{,}04 \frac{l}{d}}$.

Estas fórmulas se mencionan en todos los Manuales y obras de Mecánica aplicada, y se hallan reducidas á tablas que facilitan mucho su aplicación (1).

13. PIEZAS COMPUESTAS CON PALASTROS Y HIERROS LAMINADOS.— Las fórmulas anteriores se refieren á las piezas de sección circular, y es preciso transformarlas para poderlas aplicar á las secciones cruciformes, en T, en doble T, etc., que se usan en los puentes metálicos. De las fórmulas aplicables á esta clase de secciones, ninguna merece más confianza que la que se usa en Austria, Alemania y Suiza, por ser los países en que más se ha desarrollado la construcción de puentes de palastro de grandes mallas que exigen la frecuente aplicación de estas fórmulas. Los ingenieros de los países mencionados se han preocupado siempre de satisfacer á las condiciones necesarias para evitar la flexión en las largas piezas comprimidas que entran en la composición de aquellos puentes, circunstancia que con menos frecuencia ha habido que tener en cuenta en las naciones en que el sistema adoptado generalmente ha sido la celosía de mallas pequeñas, en el cual esas condiciones son mucho menos importantes, por ser cortos los trozos libres de las piezas comprimidas. La fórmula empleada por los Ingenieros austriacos, alemanes y suizos, es la siguiente:

$$R = \frac{R_0}{1 + 0{,}00008 \left(\frac{l}{r}\right)^2}. \qquad [3]$$

en la cual R, R_0 y l tienen la misma significación que anteriormente, y r representa el mínimo radio de giro de la sección (2).

El cuadrado del radio de giro es el cociente del momento de inercia por el área.

Más adelante definiremos el momento de inercia; aquí bastará indicar que es aproximadamente proporcional á la sección y al cuadrado de la altura, de modo que, llamando I al momento de inercia,

---

(1) Véase Claudel, *Aide-mémoire.*

(2) Es la fórmula de Rankine.

ω al área, h á la altura, y siendo θ un coeficiente numérico, se tendrá

$$I = \theta\ \omega\ h^2$$

y

$$r^2 = \theta\ h^2.$$

Tratándose del momento de inercia mínimo, h será la menor altura de la sección; en un hierro en doble T será el ancho de la cabeza; en un hierro en T, el menor de los dos nervios perpendiculares entre sí, etc. Con el auxilio de esta expresión nos será fácil transformar la fórmula [3], evitando la determinación del mínimo radio de giro, que ofrece alguna dificultad y hace poco práctica la fórmula.

Los valores de θ correspondientes al momento de inercia mínimo para las secciones más empleadas han sido determinados por monsieur Barré. Si nos fijamos en los correspondientes á las secciones en T, doble T, en cruz y en U, observaremos que varían poco, y que el valor $\theta = 0{,}05$ es un término medio que conviene aproximadamente para todas ellas (1). Sustituyendo el valor r^2 por $0{,}05\ h^2$ en la fórmula [3], tendremos otra fórmula aproximada en que ha-

---

(1) Los valores de θ, calculados por M. Barré, á que se refiere el texto, son los siguientes:

Sección en doble T, siendo H la altura, h el ancho de la cabeza, a el espesor del alma y e el espesor de la cabeza.

Para $h = \frac{H}{3}$, $e = \frac{H}{15}$, $a = \frac{H}{20}$ ..... $\theta = 0{,}043$

Para $h = \frac{H}{2}$, $e = \frac{H}{12}$, $a = \frac{H}{20}$ ..... $\theta = 0{,}055$

Para $h = \frac{2H}{3}$, $e = \frac{H}{10}$, $a = \frac{H}{15}$ ..... $\theta = 0{,}060$

Para la sección en +, siendo h el ancho del nervio menor y e el espesor:

Para $e = \frac{h}{10}$ ..... $\theta = 0{,}0438$

Para $e = \frac{h}{8}$ ..... $\theta = 0{,}0450$

Para $e = \frac{h}{6}$ ..... $\theta = 0{,}0465$

Para $e = \frac{h}{5}$ ..... $\theta = 0{,}0477$

Para $e = \frac{h}{4}$ ..... $\theta = 0{,}0498$

Para las secciones en U y en T, los valores de θ son algo mayores; de modo que la modificación introducida en la fórmula aumenta las condiciones de seguridad de las piezas de esta forma.

bremos eliminado r, y cuyos resultados comprobaremos por comparación con los de la [3].

Se obtiene así

$$R = \frac{R_o}{1 + 0{,}0016 \left(\frac{l}{h}\right)^2} \qquad [a]$$

Leber atribuye á la fórmula [3] el inconveniente de no representar con bastante exactitud los resultados de la experiencia, y propone, fundándose en consideraciones que no creemos oportuno reproducir, la siguiente:

$$R = \frac{R_o}{0{,}8 + 0{,}005 \frac{h' l}{r^2}} \qquad [4]$$

en la que introduce un nuevo elemento h', que representa la distancia del centro de gravedad á la fibra más cargada.

Para justificar esta fórmula compara sus resultados con los de la fórmula [3] y los obtenidos experimentalmente por Bauschinger para hierros de secciones usuales en los puentes. Extractamos una parte de este cuadro, agregando los resultados de la fórmula [a], y por la comparación de estos resultados podremos elegir la más conveniente para las aplicaciones.

Comparación de los resultados de las fórmulas [3], [4] y [a] con los obtenidos en los experimentos de Bauschinger.

PIEZAS ENSAYADAS. — *Centímetros.*	Longitudes l. — *Centímetros.*	Valores de $\frac{l}{h}$.	VALORES DE $\frac{R_0}{R}$ Observación.	[3] $1+0{,}00008\left(\frac{l}{r}\right)^2$	[a] $1+0{,}0016\left(\frac{l}{h}\right)^2$	[4] $0{,}8+0{,}005\left(\frac{h'\,l}{r^2}\right)$
6,08 ←14,48→ $\omega = 21{,}50$	160,0	26,31	1,82	2,07	2,11	2,55
	186,8	30,70	2,10	2,46	2,45	2,84
	314,5	51,70	2,84	5,12	5,28	4,24
11,77 7,91 $\omega = 19{,}10$	107,4	13,6	1,79	1,26	1,30	1,70
	149,5	18,9	1,91	1,51	1,57	2,05
	221,8	28,0	2,11	2,13	2,25	2,65
7,20 ←12,40→ $\omega = 18{,}30$	178,0	25,2	1,35	2,22	2,01	2,34
	302,0	42,0	2,72	4,51	3,82	3,42

Del estudio de este cuadro creemos poder deducir que la fórmula [3] da valores mucho más aproximados á los obtenidos en los experimentos que la [4] propuesta por Leber; ésta da en general resultados exagerados, lo cual, si bien proporciona mayor seguridad, aumenta en proporciones enormes el peso de las piezas, y su aplicación á los montantes y á las cabezas superiores de las vigas obligaría á aumentar el coste de la obra sin justificación suficiente, puesto que vemos en la anterior comparación que los valores de $\frac{R_0}{R}$ que da esta fórmula son muy superiores á los obtenidos por la experiencia.

La fórmula [3] se ciñe mejor á los resultados de la experiencia, y, por otra parte, está justificada por su aplicación constante en los puentes de grandes mallas construídos en Austria, Alemania y Suiza.

Si ahora comparamos ésta con la [a], observaremos que los resul-

tados no difieren sensiblemente, siendo en general algo mayores los de la segunda. Por otra parte, la aplicación de ésta es mucho más fácil, puesto que no obliga á determinar el valor mínimo del radio de giro. Hemos calculado la tabla siguiente para todos los valores de $\frac{l}{h}$ comprendidos entre 12 y 40, variando de unidad en unidad; de modo que se evita todo cálculo en las aplicaciones.

Tabla de los valores de $\frac{R_o}{R}$ según la fórmula [a] para secciones U, T, ⊢⊣, ✚

Valores de $\frac{l}{h}$	Valores de $\frac{R_o}{R}$	Valores de $\frac{l}{h}$	Valores de $\frac{R_o}{R}$
12	1,23	27	2,17
13	1,27	28	2,25
14	1,31	29	2,34
15	1,36	30	2,44
16	1,41	31	2,54
17	1,46	32	2,63
18	1,52	33	2,74
19	1,58	34	2,85
20	1,64	35	2,96
21	1,70	36	3,07
22	1,77	37	3,19
23	1,85	38	3,31
24	1,92	39	3,43
25	2,00	40	3,56
26	2,08		

El uso de la tabla se comprende á primera vista; conocido el valor de $\frac{l}{h}$, se busca en ella el correspondiente de $\frac{R_o}{R}$, y, para hallar el coeficiente que debe adoptarse, basta dividir el valor de R_o, es decir, el coeficiente que se adoptaría si la pieza obrara por tensión, por el valor hallado en las tablas. Conviene, sin embargo, hacer algunas advertencias. El valor de l es la longitud libre entre los puntos de la pieza que se hallen roblonados con otras. Las fórmulas tienen en cuenta el empotramiento que produce el roblonado.

Según Leber, la relación $\frac{R_o}{R}$ no debe exceder de 3 en la práctica. Creemos muy exagerado este límite, porque daría lugar á un gran aumento del peso y del coste de la obra. Más bien deben servir de guía estas fórmulas para el estudio de una sección conveniente que limite todo lo posible la reducción del coeficiente R_o, disminuyendo la relación $\frac{l}{h}$. Aumentando este valor, se ve que la carga de seguridad decrece rápidamente, siendo necesario un gran aumento de peso.

Como las fórmulas se han aplicado y comprobado en Alemania y Austria partiendo de valores de R_o mayores que los que se han empleado hasta ahora en España, conviene adoptar los que fija la circular austriaca, n.° [8] nota, para evitar que las fórmulas conduzcan á dar un peso excesivo á las piezas calculadas.

Como ejemplo, estudiemos la carga que podrá imponerse á la cabeza superior de una viga de 40 m. de luz, cuya sección en forma de **U** tiene 276 mm. de ancho y 260 mm. de altura en los nervios verticales. La distancia entre articulaciones es 3,70 m.

La relación $\frac{l}{h}$ es, en este caso, $\frac{3.700}{260} = 14{,}25$. El valor correspondiente de $\frac{R_o}{R}$ es 1,33.

El valor de R_o, según la circular austriaca, es

$$R_o = 7 + 0{,}02 \times 40 = 7{,}8 \text{ kg. por milímetro cuadrado;}$$

luego

$$R = \frac{7{,}8}{1{,}33} = 5{,}88 \text{ kg. por milímetro cuadrado.}$$

La sección no debe trabajar á más de 5,88 kg., para que no haya peligro de flexión.

Supongamos que un montante del mismo puente tenga la sección en doble **T**, siendo la altura del alma 276 mm., el ancho de las cabezas 180 mm., y la altura de la viga 5,80 metros. Tendremos:

$$\frac{l}{h} = \frac{5.800}{180} = 32{,}22; \quad \frac{R_o}{R} = 2{,}65 \text{ y } R = \frac{7{,}80}{2{,}65} = 2{,}95 \text{ kg.}$$

El montante no deberá someterse á un trabajo superior á 3 kg. por milímetro cuadrado.

14. HIERROS DE ÁNGULO.—La fórmula [a] no puede aplicarse á la sección ⌊ porque el valor $\theta = 0{,}05$, admitido como término medio para las demás secciones al calcular r^2, es excesivo en este caso (1). Tomando como término medio $\theta = 0{,}035$, encontraremos la siguiente fórmula aplicable á esta sección:

$$R = \frac{R_o}{1 + 0{,}0023 \left(\frac{l}{h}\right)^2} \qquad [b]$$

Con su auxilio obtendremos la siguiente tabla, que evitará los cálculos en las aplicaciones.

Tabla de valores de $\frac{R_o}{R}$ según la fórmula [b] para secciones ⌊.

Valores de $\frac{l}{h}$	Valores de $\frac{R_o}{R}$	Valores de $\frac{l}{h}$	Valores de $\frac{R_o}{R}$
12	1,33	22	2,11
13	1,39	23	2,21
14	1,45	24	2,32
15	1,52	25	2,43
16	1,59	26	2,55
17	1,66	27	2,68
18	1,74	28	2,80
19	1,83	29	2,93
20	1,92	30	2,98
21	2,01		

(1) Siendo c el ancho del ala del hierro en ángulo, y e el espesor, los valores de θ son los siguientes:

Para $e = \frac{c}{10}$ ..... $\theta = 0{,}032$

Para $e = \frac{c}{9}$ ..... $\theta = 0{,}037$

Para $e = \frac{c}{8}$ ..... $\theta = 0{,}0418$

Se observa en este cuadro la inferioridad de esta sección respecto á las estudiadas anteriormente. La relación $\frac{R_o}{R}$ es mayor en este caso para un valor dado de $\frac{l}{h}$, y, por consiguiente, un hierro en ángulo necesita mayor área que las piezas en ⊔, T, etc., para resistir la misma carga. Por esta razón debe emplearse sólo en barras comprimidas de celosías de pequeñas mallas en que la relación $\frac{l}{h}$ es pequeña, y no existe peligro de flexión.

15. Consideraciones generales. — Terminaremos este capítulo llamando la atención de los lectores sóbre la necesidad de tener en cuenta las condiciones que preceden al fijar las secciones de las piezas comprimidas. Muchas veces se ha descuidado este estudio, calculando estas piezas por la fórmula [2] como si estuvieran tendidas. Se ha llegado hasta constituir las barras comprimidas de las vigas de celosía de pequeñas mallas con simples láminas de palastro, y sólo se explica la existencia de tales puentes por la adición de montantes que se introducían para enlazar las viguetas á los cuchillos principales, y suplir indirectamente aquella deficiencia. Hoy se forman siempre estas barras con hierros perfilados, con los cuales es fácil reducir la relación $\frac{l}{h}$ hasta evitar todo peligro de flexión.

Pero en los puentes de grandes mallas, que tienden á generalizarse, este estudio es de mucha importancia, porque en esta clase de vigas se encuentran frecuentemente piezas comprimidas de mucha longitud. Las circulares austriaca y francesa que hemos mencionado varias veces, prescriben explícitamente que se tenga en cuenta en todas las piezas comprimidas su resistencia á la flexión lateral, y se citan varios casos de ruina de puentes de hierro, cuya causa fué la omisión de este estudio.

Todas las soluciones que se pueden dar en la actualidad de este difícil problema son indudablemente muy imperfectas. Pero para las necesidades de la práctica basta el empleo de una fórmula como la [3], suficientemente comprobada por la experiencia.

La transformación que hemos adoptado para calcular las tablas

no influye prácticamente en los resultados, como puede observarse en el cuadro comparativo, y las divergencias más notables se observan para valores de $\frac{l}{h}$ inadmisibles en la práctica. Los resultados consignados en las tablas merecen, por lo tanto, igual grado de confianza que la fórmula de los ingenieros alemanes.

CAPÍTULO II.

FLEXIÓN.

16. Descripción del fenómeno de la flexión.—Consideremos un sólido prismático de sección rectangular apoyado por sus extremos en dos puntos fijos y cargado de pesos, es decir, en las condiciones en que se halla en las construcciones una viga. La línea AB (fig. 3.ª) será el eje de figura de la pieza, y es una recta mientras aquella permanece descargada. La experiencia demuestra que, cuando se carga la viga, la línea AB afecta una forma curva cóncava hacia arriba, descendiendo todos los puntos situados entre los de apoyo, A y B.

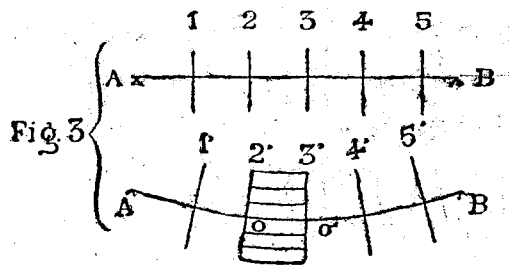


Fig. 3

Para analizar todas las circunstancias que necesitamos conocer de este fenómeno, imaginemos la pieza constituída por una serie de secciones materiales *1*, *2*, *3*... fijadas sobre el eje AB, también materializado, y de modo que el ángulo que forma con una sección cualquiera sea invariablemente recto. Según esto, las secciones *1'*, *2'*, *3'*... en la pieza deformada serán normales á la curva AB.

Concibamos ahora la viga constituída por un haz de fibras paralelas á AB, y supongamos que sigan siendo paralelas después de la deformación. Examinemos lo que ocurre en uno cualquiera de

los trozos de viga, por ejemplo el *2'*, *3'*... de la fig. 3.ª, que aparece amplificado en la fig. 4.ª La sección *3*, paralela á la *2* en la pieza descargada, ha girado alrededor del punto *o'* hasta formar con *2* un cierto ángulo. Las fibras superiores á *o o'* han experimentado acortamientos, de los cuales el mayor es el *a' a''*, y que crecen proporcionalmente á sus distancias á *o'*, donde se reduce á cero. Las inferiores sufren alargamientos que crecen también proporcionalmente á sus distancias á *o'*, siendo nulo en este punto y máximo en *b b'*. Además, á causa de la simetría de la figura respecto á *o'*, el alargamiento de una fibra cualquiera *d' d''* de la parte inferior es igual al acortamiento *c' c''* de la fibra situada en la parte superior á igual distancia de *o'*.

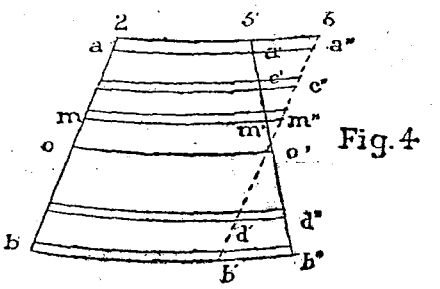


Fig. 4

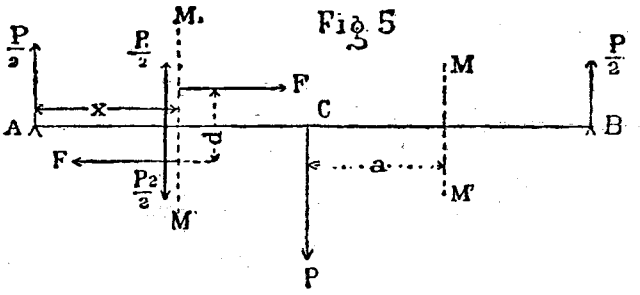
Se deduce de aquí que las fibras superiores sufren compresiones crecientes desde la *o o'* hasta la *a a'*, y las inferiores tensiones iguales á aquellas compresiones para fibras equidistantes de *o'*. La fibra *o o'*, cuya longitud no varía, no resiste esfuerzo alguno. Por esta razón el eje *A B* recibe el nombre de *fibra neutra*.

La descripción anterior es hipotética, y no la expresión verdadera del fenómeno tal como ocurre en la naturaleza. Pero puede considerarse como exacta dentro de los límites de la aproximación necesaria al constructor. En estas hipótesis se fundan las fórmulas que vamos á deducir, cuyo empleo es universal, sin que nunca hayan sido desmentidas por la experiencia; y, por consiguiente, pueden aplicarse con absoluta confianza en la práctica.

17. Procedimiento para la resolución del problema.—El problema que nos proponemos resolver puede enunciarse así: *Conocidas todas las fuerzas exteriores que obran sobre la viga, determinar las tensiones ó compresiones máximas que deben desarrollarse en una sección cualquiera para que exista el equilibrio.*

Explicaremos el procedimiento que debemos seguir para resolverlo en un ejemplo muy sencillo. Supongamos (fig. 5.ª) una viga apoyada en los puntos *A* y *B*, y cargada de un peso *P* en su punto medio.

Ante todo, observaremos que la fuerza P no es la única fuerza exterior que obra sobre la viga; si así fuera, la viga se pondría en movimiento. Pero, puesto que queda en reposo, deben desarrollarse en los puntos de apoyo otras fuerzas, llamadas reacciones, que equilibran á la P.



Se determinan suponiendo suprimidos los apoyos, y calculando las fuerzas que deben aplicarse en los puntos A y B para sustituirlos, es decir, para hacer equilibrio á P. En el caso que examinamos se ve inmediatamente que hay que aplicar en dichos puntos dos fuerzas iguales á $\frac{P}{2}$ y dirigidas hacia arriba. Luego las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga se reducen á la P, aplicada en C, y á las $\frac{P}{2}$, que obran en A y B respectivamente.

Supongamos que queremos determinar la tensión ó compresión máxima que se desarrolla en una sección cualquiera, la MM', por ejemplo. Para ello, si imaginamos cortada la viga en MM' y suprimido el trozo de la derecha, observaremos que podremos aplicar en esta sección fuerzas capaces de hacer equilibrio á las exteriores $\frac{P}{2}$ y P que obran sobre el trozo de la izquierda, y mantener este trozo en las mismas condiciones en que se hallaba cuando la pieza estaba entera. Por lo tanto, las fuerzas moleculares que se desarrollan en MM' por efecto de la continuidad de la viga en esta sección son precisamente las que debemos aplicar en ella para hacer equilibrio á las $\frac{P}{2}$ y P, es decir, á todas las fuerzas exteriores que actúan á la izquierda de la misma.

Se deduce de aquí que, para la resolución completa del problema que estudiamos, deberemos resolver sucesivamente las tres cuestiones siguientes:

1.ª *Dados los pesos que obran sobre una viga, determinar las fuerzas exteriores desconocidas, ó sea las reacciones de los apoyos.*

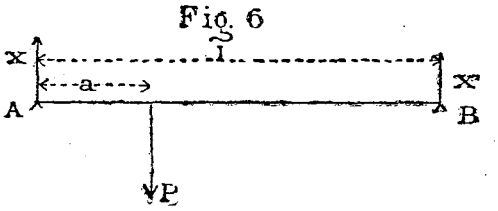
2.ª *Conocidas todas las fuerzas exteriores que obran sobre una viga, reducirlas á un sistema equivalente que esté aplicado á la sección* M M' *que se estudia.*

3.ª *Determinar las fuerzas moleculares que se deben desarrollar en esta sección para hacer equilibrio al sistema anterior.*

18. DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES DE LOS APOYOS.—Tratemos de resolver el primero de los problemas enunciados en el párrafo anterior, en los casos que generalmente se presentan en la práctica.

Consideremos, en primer lugar, una sola fuerza P aplicada á la distancia a del apoyo de la izquierda. Sea l la luz de la viga, X y X' las reacciones de los apoyos (fig. 6.ª).

Fig. 6



En general, se resuelve este problema expresando que los momentos de todas las fuerzas con relación á un punto es igual á cero, y eligiendo como centro de momentos el punto de aplicación de una de las reacciones desconocidas, con lo cual ésta queda eliminada, y la ecuación no contiene más que una incógnita.

Así, para determinar X, tomaremos los momentos respecto al punto B, y tendremos

$$X\,l = P\,(l - a)$$

de donde

$$X = \frac{P\,(l - a)}{l} \quad (1).$$

---

(1) Esta ecuación no es otra cosa que la condición de equilibrio de la palanca, que se estudia en todos los tratados elementales de Física. Imagínese el eje de giro en B, la resistencia en P, y X será la potencia aplicada en A. El problema se reduce á la determinación de la potencia X.

Para hallar X' tomaremos los momentos respecto al punto A, y obtendremos

$$X' l = P a$$

y

$$X' = \frac{P a}{l}.$$

Una vez obtenido X, podríamos también hallar X' observando que la suma de las dos reacciones debe ser igual á P, es decir,

$$X + X' = P;$$

luego

$$X' = P - X;$$

y reemplazando en vez de X su valor, ya conocido,

$$X' = P - \frac{P (l - a)}{l} = \frac{P a}{l}.$$

Si aplicamos estas fórmulas al caso ya estudiado, en que la fuerza P está aplicada al punto medio de la viga, tendremos que sustituir en ellas a por su valor $\frac{l}{2}$, y encontraremos fácilmente

$$X = X' = \frac{P}{2}.$$

Si, además de la fuerza P, obrase sobre la viga otra fuerza P_1 aplicada á la distancia a_1, determinaríamos las reacciones X_1, X'_1 correspondientes á esta fuerza, y las sumaríamos con las X, X' correspondientes á P. Entonces la reacción total en A sería

$$X + X_1 = \frac{P (l - a)}{l} + \frac{P_1 (l - a_1)}{l}$$

y la correspondiente al punto B

$$X' + X'_1 = \frac{P a}{l} + \frac{P_1 a_1}{l}.$$

Del mismo modo procederíamos si hubiera tres ó más fuerzas aisladas.

Se presenta frecuentemente en la práctica el caso en que el peso está repartido uniformemente en toda la longitud l de la viga á razón de p kilogramos por metro lineal. El peso total es entonces $p\,l$, y, como la resultante está aplicada al punto medio, las reacciones de los apoyos serán iguales las dos á la mitad de este peso, es decir,

$$X = X' = \frac{p\,l}{2}.$$

Si la longitud cargada con pesos uniformemente repartidos no es toda la viga, sino una parte a de ella, se resolverá fácilmente el problema teniendo en cuenta que las reacciones son las mismas que para un peso aislado $p\,a$ aplicado al punto medio de la región cargada.

Finalmente, ocurre en el cálculo de las viguetas de los puentes metálicos que se hallan cargadas con un peso uniforme, el peso propio y el de las partes de la construcción sostenidas por la vigueta, que juntos constituyen la carga permanente, y, además, de pesos aislados transmitidos por las ruedas de los vehículos que insisten en ciertos puntos de las viguetas. Para hallar las reacciones de los apoyos en este caso, bastará sumar las producidas en cada uno de ellos por estas cargas.

Así, si la vigueta está sometida á una carga p por metro lineal, y á dos pesos aislados P y P_1 que actúan á las distancias a y a_1 del apoyo A de la izquierda, la reacción X correspondiente al punto A será

$$X = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,(l-a)}{l} + \frac{P_1\,(l-a_1)}{l};$$

y la X', correspondiente al apoyo B de la derecha,

$$X' = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,a}{l} + \frac{P_1\,a_1}{l}.$$

19. Definición del momento flector y del esfuerzo cortante. —Pasemos al estudio del segundo problema propuesto al final del

núm. 17. Empecemos por examinar el caso de una viga cargada de un peso en su punto medio (fig. 5.ª), y consideremos la sección $M_1 M'_1$. Se trata de reducir el sistema de fuerzas que obra en el trozo de la izquierda (que en este caso se reduce á la reacción del apoyo, $\frac{P}{2}$) á un sistema equivalente aplicado á la sección considerada. Sea x la distancia de la sección al apoyo A. Si introducimos en la sección $M_1 M'_1$ dos fuerzas iguales y contrarias, no se alterará el equilibrio, y podemos elegir estas fuerzas de modo que sean iguales á $\frac{P}{2}$. Según esto, la fuerza $\frac{P}{2}$ quedará reemplazada por el sistema equivalente de las fuerzas $\frac{P}{2}$, $\frac{P_1}{2}$, $\frac{P_2}{2}$. (Afectamos las fuerzas introducidas de los subíndices para poder distinguirlas, pero no se olvide que son iguales á $\frac{P}{2}$.) Este sistema, á su vez, es equivalente á la fuerza $\frac{P_1}{2}$, y al par formado por las $\frac{P}{2}$ y $\frac{P_2}{2}$, cuyo momento es $\frac{P}{2} \times x$.

La fuerza $\frac{P_1}{2}$ igual á $\frac{P}{2}$ y aplicada á la sección $M_1 M'_1$ es el *esfuerzo cortante* en esta sección, y se llama así porque su acción tiende á cortar la viga según $M_1 M'_1$.

El par $\frac{P}{2} \times x$ es el *momento de flexión* ó *momento flector* (1).

Según la teoría de los pares, puede transformarse el par $\frac{P}{2} \times x$ en otro cualquiera que obre en el mismo plano, con tal que el momento (producto de la fuerza por el brazo de palanca) no se altere. Así, el momento de flexión equivale á un par formado por las fuerzas horizontales F aplicadas á dos puntos cualesquiera de la sección equidistantes de la fibra neutra, siempre que se verifique la igual-

---

(1) No hay inconveniente en decir el par $\frac{P}{2} \times x$ en vez del par cuyo momento es $\frac{P}{2} \times x$, ni en llamar *momento flector* al par que produce la flexión, porque conocida la dirección del plano en que obra el par, su momento lo determina completamente.

dad de los momentos $F \times d = \frac{P}{2} \times x$, siendo d la distancia entre las fuerzas F. Este par tiende á producir el giro de la sección $M_1 M_1'$ alrededor del punto de su intersección con la fibra neutra, y, por lo tanto, el momento flector, que es equivalente, produce el mismo efecto, que no es otra cosa que la flexión, según la hemos definido.

Si consideramos ahora la sección MM' de la misma figura, podremos repetir los mismos razonamientos, aplicándolos separadamente á las dos fuerzas $\frac{P}{2}$ y P que actúan á la izquierda de la sección. Sean x y a las distancias de estas fuerzas á la sección. Introduciremos en ésta dos fuerzas iguales y contrarias, é iguales ambas á $\frac{P}{2}$, y la reacción del apoyo quedará reemplazada por un esfuerzo cortante $\frac{P}{2}$, que obra en la sección MM', y un par ó momento flector $\frac{P}{2} \times x$ aplicado á la misma, y que tiende á hacerla girar.

Del mismo modo, aplicando á la sección dos fuerzas P iguales y contrarias, reemplazaremos esta fuerza por un esfuerzo cortante P (que obra hacia abajo, en sentido contrario á $\frac{P}{2}$), y un par ó momento flector $P \times a$ (que tiende á hacer girar la sección en sentido contrario al del par $\frac{P}{2} \times x$).

El sistema de las dos fuerzas $\frac{P}{2}$ y P queda, por lo tanto, reemplazado por un esfuerzo cortante $\frac{P}{2} - P$, y un par ó momento flector igual á $\frac{P}{2} x - Pa$.

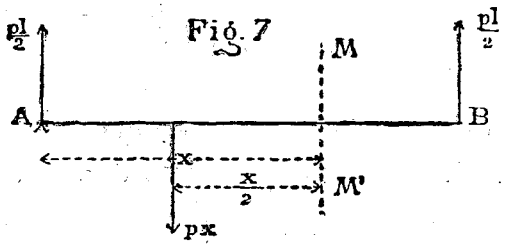
Se conviene en considerar como positivos los esfuerzos cortantes que obran de abajo hacia arriba, y como negativos los que actúan en sentido contrario.

Los momentos son positivos cuando el giro que determinan es de izquierda á derecha, como el de las agujas de un reloj, por ejemplo,

el del par $\frac{P}{2} \times x$. Y son negativos cuando el giro es en sentido contrario al anterior, como el del par Pa.

Si consideramos ahora el caso de un número cualquiera de fuerzas X, P_1, P_2, P_3 actuando á la izquierda de la sección MM', distantes de la misma x, a_1, a_2, a_3, veremos fácilmente, reemplazando cada fuerza por el esfuerzo cortante y el momento de flexión que le corresponde en la sección considerada, que el sistema equivale á un esfuerzo cortante $X - P_1 - P_2 - P_3$, que es la suma algebráica de las fuerzas situadas á la izquierda de la sección, con las convenciones que hemos admitido respecto á los signos, y á un *momento flector* $Xx - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3$, que se reduce también á la suma algebráica de los momentos de las mismas fuerzas respecto á la sección MM'.

Consideremos ahora el caso de una viga cargada con un peso uniformemente repartido p kg. por metro lineal (fig. 7), y sea x la abscisa de la sección MM'. Las fuerzas que actúan á la izquierda de esta sección son la reacción $\frac{pl}{2}$



del apoyo A y el peso que corresponde á esta porción de la viga que es px, y cuya resultante está aplicada á la mitad de la distancia x, ó sea á la distancia $\frac{x}{2}$ de MM'. Luego el esfuerzo cortante en MM' será

$$\frac{pl}{2} - px = p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

y el momento flector

$$\frac{pl}{2} \times x - px \times \frac{x}{2} = \frac{px}{2}(l - x).$$

Si tuviéramos que considerar á la vez una carga uniforme y varias fuerzas aisladas, como en el caso de las viguetas de los puentes

metálicos, bastaría sumar algebráicamente los esfuerzos cortantes correspondientes á los dos últimos casos para tener el esfuerzo cortante, y los momentos flectores para obtener el momento flector total.

En todos los casos examinados podríamos haber considerado el trozo de viga que queda á la derecha de la sección, determinando el esfuerzo cortante y el momento flector correspondientes á las fuerzas exteriores que actúan en este trozo. Pero, como el sistema de fuerzas exteriores que obra en la viga está en equilibrio, obtendríamos así valores iguales en valor absoluto á los que hemos calculado y de signo contrario.

20. Determinación de las fuerzas moleculares que se desarrollan en una sección.—El efecto de las fuerzas exteriores sobre una sección de la viga queda reducido á una fuerza (esfuerzo cortante), que tiende á separar las dos porciones de viga limitadas en esta sección, haciéndolas deslizar en sentido contrario á lo largo de la misma, y á un par $F \times d$ (momento flector), cuya accion tiende á hacer girar la sección alrededor de su intersección con el plano de las fibras neutras.

Para que la viga no se rompa y se halle en condiciones de resistencia aceptables es preciso que en esa sección puedan desarrollarse fuerzas moleculares capaces de equilibrar aquellas acciones, y esto sin que en ningún punto de la sección excedan dichos esfuerzos de los límites de seguridad definidos en el capítulo anterior.

La condición de resistencia al esfuerzo cortante exige que, dividido por la sección, dé un esfuerzo por unidad de superficie igual ó menor que el coeficiente de resistencia. Se admite frecuentemente como coeficiente de resistencia al esfuerzo cortante el mismo que para la tensión ó compresión.

En las vigas de sección constante esta condición se cumple sobradamente cuando la de resistencia al momento flector se halla satisfecha. La experiencia, de acuerdo con la teoría, hace ver que en estas condiciones, que son las de una viga de madera, por ejemplo, la rotura se verifica siempre aplastándose las fibras de la parte superior y separándose por extensión las de la parte inferior, indicio claro de que ha sido producida por el momento flector.

Prescindamos, pues, por ahora, del esfuerzo cortante, y estudiemos las condiciones de resistencia al momento flector en una sección MM'.

Volvamos á la fig. 4. En ella observamos que el par Fd ha hecho girar á la sección 3 alrededor de O', llevándola á la posición 3'. Como hemos observado ya, los alargamientos ó acortamientos de las fibras son proporcionales á sus distancias al punto O'. Por otra parte, los esfuerzos que los producen son también proporcionales á los alargamientos [núm. 2]; luego estos esfuerzos son proporcionales á sus distancias á O'.

En las fibras extremas $a\,a'$ y $b\,b'$ se verifican los mayores esfuerzos de tensión y compresión; por lo tanto, para que la sección se halle en condiciones de seguridad, bastará que dichos esfuerzos sean iguales ó menores que el coeficiente de resistencia R por unidad de superficie.

Conociendo el esfuerzo de la fibra extrema, nos es ya fácil calcular el que corresponde á una cualquiera $m\,m'$, por ejemplo. Llamemos r al esfuerzo por unidad de superficie que corresponde á esta fibra, v á la distancia $O'\,m'$, V á la distancia $O'\,a'$, y tendremos

$$\frac{r}{R} = \frac{v}{V};$$

de donde

$$r = \frac{R\,v}{V}$$

y el esfuerzo de tensión de la fibra, llamando ω á su sección, será

$$r\,\omega = R\,\frac{v\,\omega}{V}.$$

Este esfuerzo tiende á oponerse al par Fd, y su momento de resistencia es

$$r\,\omega \times v = R\,\frac{v^2\,\omega}{V}.$$

Si para cada fibra calculamos este momento, la suma de todos

ellos debe reducirse á un par que equilibre al Fd. Designando la suma con el signo Σ, el momento resistente de la sección será

$$\Sigma \frac{R}{V} \times v^2 \omega = \frac{R}{V} \Sigma \omega v^2.$$

Observaremos que, en la suma, $\frac{R}{V}$ es un factor común, y la transformación anterior se reduce á ponerlo en evidencia.

Llamando M al momento flector, vemos ahora que la condición para que la sección resista en condiciones de seguridad al momento flector, será

$$M \leqq \frac{R}{V} \Sigma \omega v^2.$$

La cantidad $\Sigma \omega v^2$ que resulta de verificar los productos de las secciones de las fibras por los cuadrados de sus distancias á O', y sumar todos estos productos, es lo que se llama el *momento de inercia* de la sección respecto al eje horizontal que pasa por O' (1). Es un número que puede determinarse por el cálculo integral para toda sección definida geométricamente, y se designa generalmente por I. La fórmula se reduce entonces á

$$M \leqq \frac{R I}{V}. \qquad [1]$$

Hemos visto cómo se halla el momento de flexión en una sección cualquiera. Sabemos elegir el coeficiente R según la clase de material de que se componga la viga. V no es otra cosa que la mitad de la altura de la sección en el caso que más interesa en la práctica, es decir, cuando la sección es simétrica respecto á un eje horizontal.

---

(1) Para poder evaluar el momento de inercia por medio del cálculo integral, hay que considerarlo como el límite hacia el cual tiende la suma $\Sigma \omega v^2$ extendida á toda la sección, cuando el elemento ω del área decrece indefinidamente en todos sentidos, ó en otros términos, cuando es infinitamente pequeño de 2.° orden.

Si tomamos por eje de las x el eje de giro de la sección, el momento de inercia se expresará por la integral doble

$$I = \int\int y^2 \, dy \, dx,$$

cuyos límites dependerán de la forma del contorno de la sección.

Para calcular ó elegir la sección de una viga sometida á cargas conocidas, cuya sección sea constante, bastará, por lo tanto:

1.° Hallar el momento flector en la sección en que adquiera su valor máximo, lo cual es fácil de conseguir en los casos que ocurren en la práctica, como veremos á continuación.

2.° Formar el producto $\frac{R\,I}{V}$ llamado *momento resistente*, para lo cual hay que calcular el momento de inercia I por medio de fórmulas sencillas que daremos á conocer.

3.° Comparar ambos números, y ver si el 2.° es mayor que el 1.° Si esto se verifica, sabremos que el trabajo del material no alcanza en ningún punto de la viga el valor del coeficiente R, y la resistencia de la pieza está asegurada.

Conviene, por otra parte, que el momento resistente se acerque todo lo posible al momento flector, para utilizar por completo la resistencia del material, y obtener toda la economía compatible con la seguridad.

Pasemos á resolver el primero de los problemas enunciados, ó sea hallar el momento flector máximo.

21. Determinación del momento flector máximo.— *Viga cargada de un peso uniformemente repartido á razón de* p *kilogramos por metro lineal.* Consideremos la viga $A\,B$ (fig. 8) apoyada en sus

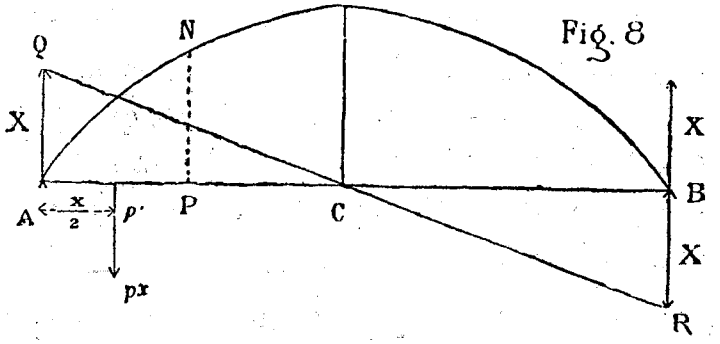


Fig. 8

extremos, y tratemos de calcular el momento de flexión y el esfuerzo cortante en una sección cualquiera $P\,N$ definida por su abscisa $x = A\,P$. Siendo $l = A\,B$ la luz, hemos visto ya que las reac-

ciones de los apoyos son $X = X' = \frac{p\,l}{2}$. Las cargas que obran á la izquierda de PN se reducen al peso $p\,x$, cuya resultante está aplicada al punto P', siendo $AP' = \frac{x}{2}$; luego el momento flector es

$$M = \frac{p\,l}{2} \times x - p\,x \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,p\,x\,(l - x). \qquad [2]$$

Hemos indicado anteriormente que, para aplicar la fórmula [1], es preciso hallar el mayor valor del momento M. Para ello, supongamos que demos á x valores diversos desde o hasta l, y estudiemos la forma general de la curva.

Observaremos, desde luego, que M se anula cuando $x = o$, y cuando $x = l$. Además, su valor es positivo para todos los valores de x comprendidos entre estos dos límites, y, por lo tanto, existe un valor máximo de M en este intervalo de x.

Como el factor $\frac{1}{2}\,p$ es constante, basta estudiar la variación del producto $x\,(l - x)$, y el mismo valor de x que haga máximo este producto será el que corresponderá al máximo de M.

Para hallar este valor, hagamos

$$x = \frac{l}{2} + z,$$

pudiendo z recibir valores positivos ó negativos. Es evidente que haciendo variar z desde $-\frac{l}{2}$ á $+\frac{l}{2}$, x pasará por todos los comprendidos entre o y l. El producto se convierte entonces en

$$x\,(l - x) = \left(\frac{l}{2} + z\right)\left(\frac{l}{2} - z\right) = \frac{l^2}{4} - z^2.$$

Bajo esta forma se ve que este producto tiene su valor máximo cuando $z = o$, es decir, para $x = \frac{l}{2}$.

Sustituyendo este valor en la expresión [2] del momento flector, obtendremos su valor máximo (1), que será

$$M_{máx} = \frac{1}{8} p\, l^2. \qquad [3]$$

En las aplicaciones prácticas bastará calcular numéricamente este valor y compararlo con el de $\frac{R\,I}{V}$ *de la fórmula [1], si la sección de la viga ha de ser constante.*

El esfuerzo cortante en el punto P es la suma algebráica de las fuerzas que actúan á la izquierda, es decir, llamando E á dicho esfuerzo,

$$E = \frac{p\,l}{2} - p\,x. \qquad [4]$$

Si estudiamos la variación de E cuando se dan á x valores comprendidos entre o y l, observaremos:

1.° Que si x crece partiendo de o, E disminuye, y su valor en el apoyo A, es decir, para $x = o$, es igual á la reacción del mismo

$$E = X = \frac{p\,l}{2}.$$

---

(1) Los lectores que conozcan la Geometría Analítica pueden observar simplemente, para demostrar todas estas propiedades, que el valor de M representa una parábola de eje vertical que pasa por el punto medio C de la viga.

También puede determinarse el máximo de M igualando á o su derivada con relación á x. Se obtiene así

$$\frac{d\,M}{d\,x} = \frac{1}{2} p\,(l - 2x) = o,$$

de donde se saca

$$x = \frac{l}{2}.$$

Obsérvese que la derivada del momento flector con relación á x es precisamente el esfuerzo cortante E. Esta propiedad es general, y puede demostrarse directamente.

También puede observarse que el producto $x\,(l - x)$ es tal que la suma de sus factores es l, y, por lo tanto, constante. Se sabe que en este caso el producto es máximo cuando los dos factores son iguales, es decir, cuando

$$x = l - x$$

ó bien

$$x = \frac{l}{2}.$$

2.° Que E decrece proporcionalmente á x, y se anula en C, para $x = \frac{l}{2}$, donde el momento es máximo.

3.° Que á partir de este punto se hace negativo y crece en valor absoluto pasando por los mismos valores que entre A y C, y alcanzando en el apoyo B, para $x = l$, el valor

$$E = -X = -\frac{pl}{2}.$$

En resumen, la ley de variación del esfuerzo cortante está representada por la recta QR de la figura. Según hemos indicado, la consideración del esfuerzo cortante no es necesaria en las vigas pequeñas de sección constante, y lo comprobaremos al estudiar ejemplos numéricos.

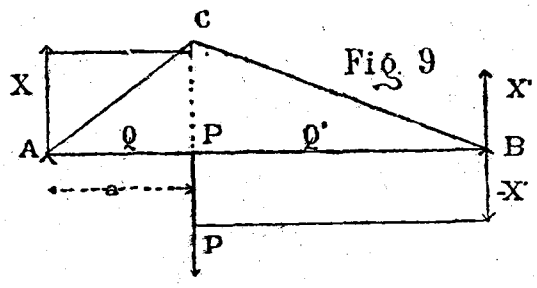


Fig. 9

22. VIGA CARGADA DE UN PESO AISLADO (fig. 9.ª).—Sea P el peso aplicado á la distancia a del apoyo. Sabemos (núm. 18) que las reacciones del apoyo son en este caso

$$X = \frac{P(l-a)}{l}$$

$$X' = \frac{Pa}{l}.$$

En un punto Q, á la izquierda de P, el momento flector será, haciendo $AQ = x$,

$$M = Xx = \frac{P(l-a)}{l}\,x.$$

Si x crece desde o hasta a, el momento crece proporcionalmente á x, y su ley de variación está representada por la recta AC. Para $x = a$ su valor es

$$M_{máx} = Pa\left(1 - \frac{a}{l}\right). \qquad [5]$$

Para un punto Q', á la derecha de P, el momento es

$$M' = \frac{P\,(l-a)}{l}\,x - P\,(x-a) = P\,a\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Comparando este valor con el correspondiente al punto en que está aplicado el peso, se ve que M' es menor que $M_{máx}$, puesto que x es siempre mayor que a. Como hemos visto que M crece desde A hasta P, puesto que desde aquí empieza á decrecer, su valor máximo corresponde al punto P, y es la expresión [5] hallada anteriormente. En la región $P\,B$ de la viga, la ley de variación está representada por la recta $B\,C$.

Si suponemos que el peso P pueda aplicarse á distintos puntos de la viga, corresponderá el mayor valor de $M_{máx}$ al caso en que se aplique al punto medio (1). Se tiene así

$$M_{máx} = \frac{P\,l}{4}. \qquad [6]$$

El esfuerzo cortante para el punto Q, á la izquierda de P, es X, cualquiera que sea dicho punto entre A y P. Está representado por la paralela á $A\,B$ á la distancia X del eje horizontal. Para el punto Q', á la derecha de P, es

$$X - P = \frac{P}{l}(l-a) - P = -\frac{P\,a}{l} = -X'.$$

Está representado por la paralela á $A\,B$ trazada en la parte inferior á la distancia X'. Si hubiera dos ó más fuerzas, se sumarían en cada sección los momentos flectores correspondientes; pero, para hallar el máximo, bastará calcular los correspondientes á las secciones en que obran aquellas, y elegir el mayor de los que así se

---

(1) Se trata de averiguar el máximo de $\frac{P}{l}(l-a)\,a$, cuando a varía. Prescindiendo del factor constante $\frac{P}{l}$, se sabe que el producto de los dos factores $(l-a)$ y a, cuya suma es constante, puesto que es l, es máximo cuando son iguales estos factores, es decir, cuando

$$l - a = a$$

ó, lo que es lo mismo,

$$a = \frac{l}{2}.$$

obtengan, porque, como en el caso que acabamos de examinar, entre dichos puntos la ley de variación está representada por una recta y no puede haber máximos.

Del mismo modo resolveremos el caso en que se superponen varios pesos aislados y uno repartido uniformemente. Bastará hallar los momentos totales en los puntos en que están aplicados los pesos y en el centro de la viga, y elegir el mayor.

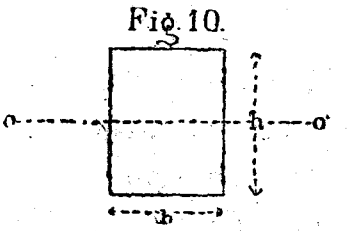
Examinaremos, al tratar de los ejemplos numéricos, todos los casos de aplicación frecuente.

23. MOMENTOS DE INERCIA DE LAS SECCIONES EMPLEADAS EN LAS VIGAS.—*Rectángulo.*—Para aplicar la fórmula [1] necesitamos conocer el momento de inercia de la sección respecto al eje horizontal de simetría. El momento de inercia que es preciso determinar es el del rectángulo, porque una vez conocido éste, de él se deducen fácilmente todos los correspondientes á las secciones usadas en la práctica. Pero el momento de inercia del rectángulo no puede determinarse sin el auxilio del Cálculo integral (1). Así es que nos contentaremos con dar la fórmula, y no intentaremos deducirla por razonamientos tortuosos, en que con más ó menos habilidad se disfrazan las consideraciones sobre límites y cantidades infinitesimales, como hacen algunos autores.

Si llamamos b á la base y h á la altura del rectángulo (fig. 10), el momento de inercia respecto al eje horizontal de simetría es

$$I = \frac{1}{12}\, b\, h^3. \qquad [7]$$

Fig. 10.



(1) Para los lectores que hayan estudiado el Cálculo integral, la determinación del momento de inercia del rectángulo de base b y altura h se reduce á lo siguiente:

$$I = \iint y^2\, dx\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \left(\frac{y^3}{3}\right)_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{1}{12}\, h^3 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx = \frac{1}{12}\, b\, h^3.$$

24. Doble T.—De tres modos distintos se forma esta sección. Unas veces es un hierro laminado de una sola pieza (fig. 11). Otras se compone de una chapa vertical, á la que se roblonan cuatro hierros de ángulo (fig. 12). Y, finalmente, se emplea la forma de la figura 13, en que se añaden á los elementos del caso anterior una ó

Fig. 11

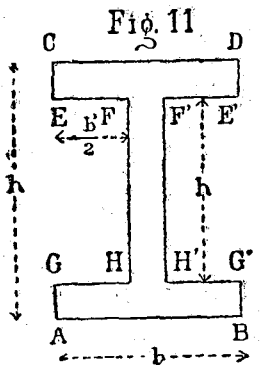


Fig. 12

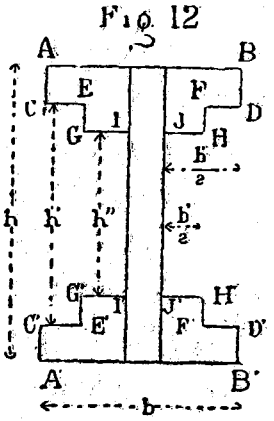
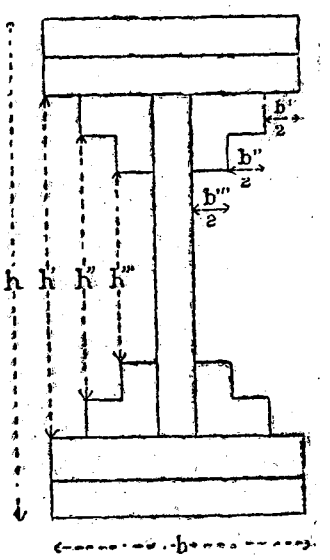


Fig. 13



más chapas horizontales roblonadas á los hierros de ángulo, para constituir las cabezas.

En todos estos casos la determinación del momento de inercia se reduce á aplicar varias veces la fórmula [7].

En el caso de la figura 11, observaremos que el momento de inercia es igual á la diferencia entre los correspondientes al rectángulo $A\,B\,C\,D$ y los dos rectángulos $E\,F\,G\,H$ y $E'\,F'\,G'\,H'$. Si llamamos b y h á la base $A\,B$ y á la altura $A\,C$ del rectángulo envolvente, $b' = 2\,E\,F$ y $h' = E\,G$ á la suma de las bases y á la altura común de los dos rectángulos á deducir, tendremos

$$I = \frac{1}{12}\,(b\,h^3 - b'\,h'^3). \qquad [8]$$

En el caso de la figura 12, el momento de inercia se hallará restando del correspondiente al rectángulo envolvente $A\,B\,A'B'$, los momentos de inercia del doble del rectángulo $C\,E\,C'\,E'$, y del doble del $G\,I\,G'\,I'$. Llamando, como en el caso anterior, b y h á la base y altura del rectángulo $A\,B\,A'B'$, y siendo $b' = 2\,CE$, $h' = CC'$, $b'' = 2\,GI$, $h'' = G\,G'$, se tendrá

$$I = \frac{1}{12}\,(b\,h^3 - b'\,h'^3 - b''\,h''^3). \qquad [9]$$

En el caso de la figura 13, se verá del mismo modo, empleando las notaciones indicadas en la figura, que el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{12}\,(b\,h^3 - b'\,h'^3 - b''\,h''^3 - b'''\,h'''^3). \qquad [10]$$

Estas fórmulas son exactas, y deben aplicarse como comprobación á la sección que se adopte definitivamente, siempre que la importancia del caso lo requiera. Pero, como el problema que estudiamos sólo puede resolverse por tanteos, y éstos se hacen interminables si se emplean estas fórmulas, es indispensable el conocimiento de fórmulas aproximadas más sencillas que permitan obtener con rapidez las secciones.

25. Fórmulas aproximadas.— *Tablas y cuadros gráficos.*—Las piezas en doble **T** laminadas son de uso muy limitado en los puentes, porque ciertas dificultades de fabricación impiden que la industria pueda suministrarlas de dimensiones bastante grandes para esta aplicación. Respecto á esta forma, nos limitaremos á presentar al final de este libro unas tablas que contienen un número suficiente de tipos, para los cuales se han calculado los momentos de inercia, ó para mayor facilidad en las aplicaciones, los cocientes $\frac{I}{V}$ llamados *módulos de resistencia*. Con su auxilio es muy fácil la aplicación de la fórmula [1] y la elección de una sección apropiada á cada caso particular.

Las secciones de las figuras 12 y 13, compuestas con chapas de palastro y hierros de ángulo, son, en cambio, de un empleo constante, y conviene adoptar medios sencillos y rápidos para obtener-

las. Para ello recordaremos la fórmula del momento de inercia de una sección, ya empleada en el capítulo I:

$$I = \theta\, \omega\, h^2,$$

de donde se deduce

$$\frac{I}{V} = \theta'\, \omega\, h,$$

en la cual, θ' es un coeficiente numérico que depende de la forma de la sección, ω, el área de la misma y h la altura.

Como el área ω es proporcional al peso por metro lineal de viga, podremos escribir, siendo π este peso,

$$\frac{I}{V} = \theta_1\, \pi\, h. \qquad [11]$$

y determinar, para cada forma de sección, el coeficiente numérico θ_1.

Fijándonos en la sección de la figura 12, compuesta del alma y cuatro hierros de ángulo, hemos determinado exactamente el valor de $\frac{I}{V}$ para varias piezas, y sustituyendo en la fórmula [11] este valor y los correspondientes de π y h, hemos deducido los valores del coeficiente θ_1, comprobando que varía muy poco, y que, dentro de los límites de alturas y pesos con que esta forma se usa, puede adoptarse

$$\frac{I}{V} = 0{,}000039\, \pi\, h, \qquad [12]$$

fórmula que da una aproximación muy suficiente en la práctica (1).

Del mismo modo hemos calculado la fórmula aplicable al caso de la figura 13, en que la sección está compuesta de alma, cuatro hie-

---

(1) P. Planat, en su *Pratique de la Mécanique appliquée*, deduce para el caso de la doble T compuesta de alma y cuatro hierros de ángulo, $\theta_1 = 0{,}000041$, fundándose en el valor de este coeficiente en dos casos únicos que estudia; y es de advertir que en esos dos tipos emplea para el alma chapas más delgadas que las que se usan en las aplicaciones á los puentes. Por esta razón hemos estudiado otras dos secciones con almas relativamente más gruesas, y el término medio de los cuatro casos da el coeficiente $\theta_1 = 0{,}000039$ que adoptamos. Esta pequeña modificación hace más aproximada la fórmula para la aplicación especial que estudiamos, y, en todo caso, es favorable á la estabilidad.

En el caso de ser necesarias chapas de refuerzo en las cabezas, hemos aprovechado los

rros de ángulo y chapas horizontales para formar las cabezas, y se obtiene

$$\frac{I}{V} = 0{,}000047\ \pi\ h. \qquad [13]$$

Para la aplicación fácil y rápida de estas fórmulas hemos dispuesto los cuadros núm. 1 y núm. 2 del modo siguiente: En el eje horizontal de las abscisas están inscritas las diversas alturas de la viga. En el eje vertical de la derecha figuran los valores de $\frac{I}{V}$, y para evitar la multiplicación por R, en las escalas verticales de la izquierda figuran los valores correspondientes de $\frac{RI}{V}$ para valores de R de 5 ó 6 kg. por mm.^{2}, que son los que se adoptan para esta clase de piezas. Finalmente, se observan una serie de rectas que corresponden á los diversos valores de π.

Para usar los cuadros basta buscar en la escala vertical de la izquierda el valor del momento flector máximo M que se ha calculado, ó sea $\frac{RI}{V}$ que ha de ser igual á este momento, y en la escala horizontal la altura que ha de tener la viga. Buscando el punto de intersección de la horizontal y vertical correspondientes, leeremos el peso π que corresponde á la oblicua que pasa por este punto, el cual será el peso de la viga por metro lineal.

Así, por ejemplo, si el momento máximo es 12.000 kg., y la viga ha de estar sometida á un trabajo máximo de 6 kg., siendo su altura 0,40 m., buscaremos en el cuadro núm. 1 el número 12.000 en la escala vertical de las $\frac{RI}{V}$ graduada para $R = 6$ kg., y en la escala horizontal 0,40. Vemos que por el punto de intersección de la horizontal y vertical correspondientes pasa la oblicua en que leemos $\pi = 130$, y el problema queda reducido á elegir una chapa de

---

cuatro casos estudiados por Planat, á los que hemos agregado otros dos correspondientes á distintas alturas, variando algo la composición en cuanto á los espesores de las chapas, y el término medio de los seis casos nos ha conducido á adoptar el mismo coeficiente que el autor mencionado. Las comprobaciones que más adelante presentamos de varios casos particulares hacen ver la exactitud de las fórmulas.

0,40 m. y cuatro hierros de ángulo que pesen juntos 130 kg. por metro lineal (1).

---

(1) Hé aquí el principio fundamental de la construcción de estos cuadros gráficos: Consideremos tres curvas, cuyas ecuaciones sean (I_1), (I_2), (I_3).

$$(I_1) \qquad F_1(x, y, \alpha) = o.$$
$$(I_2) \qquad F_2(x, y, \beta) = o.$$
$$(I_3) \qquad F_3(x, y, \gamma) = o.$$

Estas curvas, llamadas *isópletas*, encierran cada una un parámetro arbitrario α, β, γ, Si se eliminan x é y entre las tres ecuaciones, tendremos

$$(E) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = o.$$

Supongamos que, haciendo variar los parámetros α, β, γ, representemos en coordenadas rectangulares los tres sistemas de isópletas (I_1), (I_2), (I_3). Al punto de concurso de tres de estas curvas corresponderán valores α_1, β_1, γ_1 de los parámetros, que satisfarán á la ecuación (E). Por lo tanto, para representar una ecuación de tres variables que asimilaremos á la ecuación (E), podremos elegir arbitrariamente las isópletas (I_1), (I_2), que contienen las variables α y β y deducir la (I_3) eliminando α y β entre estas dos ecuaciones y la propuesta.

En el caso particular que examinamos la ecuación es

$$(E') \qquad \frac{I}{V} = \theta_1 \pi h.$$

Podemos hacer

$$\alpha = h; \qquad \beta = \frac{I}{V}; \qquad \pi = \gamma.$$

Admitamos las dos isópletas arbitrarias.

$$(I'_1) \qquad x = h.$$
$$(I'_2) \qquad y = \frac{I}{V}.$$

El tercer sistema (I'_3) de isópletas se obtendrá eliminando h é $\frac{I}{V}$ entre estas dos ecuaciones y la (E'), y será

$$(I'_3) \qquad y = \theta_1 \pi x.$$

El cuadro gráfico se reduce á la representación del sistema (I'_1) de paralelas al eje y, del (I'_2) paralelas al eje x, y del (I'_3), rectas que pasan por el origen y se obtienen dando valores arbitrarios á π.

Para mayores detalles puede verse el interesante folleto del ingeniero de puentes y calzadas M. M. d'Ocagne, titulado *Nomographie.—Les calculs usuels effectués au moyen des abaques.*

La Mecánica aplicada de M. P. Planat, citada en la nota anterior, contiene cuadros dispuestos de un modo idéntico, pero preparados para las aplicaciones á la edificación ordinaria; para adaptarlos especialmente á las aplicaciones usuales al cálculo de puentes metálicos, hemos tenido que modificar los límites de las variables, disponer las escalas de los momentos de resistencia para diferentes valores de R, y adoptar otro coeficiente numérico para el cuadro núm. 1. Hemos extendido el cuadro núm. 2 hasta una altura de un metro, y un momento máximo que corresponde á una vigueta de 10 m., en la cual se crucen dos locomotoras de 15 t. de peso sobre cada eje. Es suficiente para todos los casos usuales en que se emplean en la actualidad vigas de alma llena.

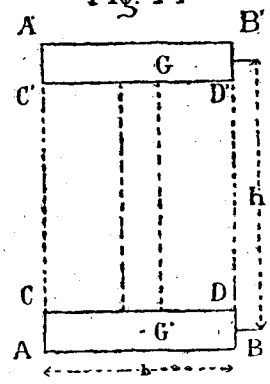
También pueden considerarse estos cuadros como la representación de un conoide recto en planos acotados; el plano director es el de los ejes coordenados $x\,y$, y la directriz se proyecta en el punto de concurso de las proyecciones de las generatrices, que constituyen el tercer sistema de isópletas.

Del mismo modo se aplica el cuadro núm. 2.

Estos cuadros tienen la extensión suficiente para el cálculo de las viguetas y de los cuchillos de puentes de luces pequeñas en los casos usuales de aplicación.

En las grandes vigas de los puentes, el momento de inercia del alma es muy pequeño comparado con el de las cabezas. En este caso puede obtenerse una expresión aproximada del momento de inercia muy usada en el cálculo de puentes metálicos. Se desprecia el momento de inercia del alma, y la sección queda reducida á dos rectángulos $A\,B\,A'B'$, $C\,D\,C'D'$ simétricos respecto al eje horizontal (fig. 14), y cuyos lados mayores son paralelos al mismo. El momento de inercia buscado será la diferencia entre los correspondientes á los rectángulos $A\,B\,A'B'$ y $C\,D\,C'D'$. Llamemos h á la distancia de los centros de gravedad G, G' de las cabezas (que coinciden con los de figura), b al ancho $A\,B$ de las mismas, e á su espesor. Aplicando la fórmula [7] tendremos:

Fig. 14



$$\text{Momento de inercia de } A\,B\,A'B' \quad \frac{1}{12}\,b\,(h+e)^3.$$

$$\text{Momento de inercia de } C\,D\,C'D' \quad \frac{1}{12}\,b\,(h-e)^3.$$

Luego el momento de inercia que buscamos será

$$I = \frac{1}{12}\,b\left[(h+e)^3-(h-e)^3\right] = \frac{1}{2}\,e\,b\,h^2 + \frac{1}{6}\,b\,e^3.$$

Como el valor de e es muy pequeño con relación á b y h, se puede despreciar el segundo término y resultará, observando que $b\,e$ es el área de una de las cabezas, que podemos representar por ω,

$$I = \frac{1}{2}\,e\,b\,h^2 = \frac{1}{2}\,\omega\,h^2. \qquad [14]$$

En la sección ω debe englobarse la de los hierros de ángulo que sirven para unir el alma á las cabezas.

Otras secciones se usan en los puentes metálicos, pero todas ellas se reducen fácilmente á la doble T.

Los hierros Zorès (fig. 15) se emplean á menudo para formar los pisos. Podemos transformar esta sección en la doble T de la fig. 16, mediante una translación de los elementos de su área paralelamente al eje *o o'*, y, como ni las áreas ni sus distancias al eje se han alterado, el momento de inercia de la doble T es el mismo que el del hierro Zorès. Pero, para evitar el cálculo del momento de inercia, presentamos en los apéndices unas tablas que contienen los módulos de resistencia y los pesos por metro lineal de hierros de esta forma de las dimensiones más usadas.

Otra sección que conviene conocer es la de las vigas llamadas tubulares (fig. 17). Su momento de inercia se reduce al de dos

Fig. 15

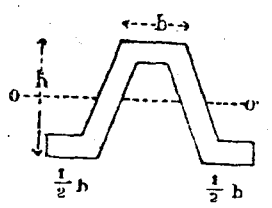


Fig. 16

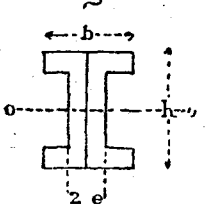
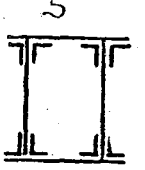


Fig. 17



dobles T que resultan de cortar la sección por su eje vertical de simetría, y á las cuales puede aplicarse el cuadro núm. 2.

En los pisos de palastro ondulado, cada ondulación puede asimilarse á una corona circular por el mismo procedimiento indicado al tratar de los hierros Zorès (1).

26. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.—1.° *Calcular la sección de una viga de madera apoyada en sus extremos, de 4,50 m. de luz y cargada unifor-*

---

(1) Siendo r el radio del círculo interior y R el del exterior, el momento de inercia de una corona circular con relación á un diámetro es

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$$

y el módulo de resistencia

$$\frac{I}{V} = \frac{\pi}{4}\frac{R^4 - r^4}{R}.$$

memente á razón de 200 kg. por metro lineal, incluyendo en esta cifra su peso propio.

Calcularemos el momento flector máximo por la fórmula [3], y será

$$M_{máx} = \frac{1}{8} \times 200 \times \overline{4,5}^2 = 507.$$

Admitamos para coeficiente de resistencia 60 kg. por centímetro cuadrado, ó puesto que la unidad de longitud es el metro y la de peso el kilogramo, 600.000 kg. por metro cuadrado, $R = 600.000$.

Siendo

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \qquad \text{y} \qquad V = \frac{h}{2}$$

tendremos

$$\frac{RI}{V} = 600.000 \times \frac{1}{6} b h^2 = 100.000\ b h^2;$$

luego b y h han de satisfacer á la ecuación

$$507 = 100.000\ b h^2$$

Para fijar la sección hay que recurrir á un tanteo, puesto que esta ecuación tiene dos incógnitas, y para facilitarlo, conviene dar valores arbitrarios á h y no á b, con el objeto de evitar extracciones de raíces. Si suponemos $h = 0,20$, hallaremos $b = 0,13$, y estas dimensiones serán aceptables.

En la práctica debe tenerse presente que conviene aumentar la altura h para disminuir el volumen de material empleado, como lo demuestra el valor del módulo de resistencia $\frac{I}{V}$, que es proporcional al cuadrado de la altura, mientras sólo crece proporcionalmente á b. Pero tampoco debe exagerarse la altura, porque esto conduce á disminuir el ancho en términos que la viga llegaría á ser demasiado débil en sentido transversal, y podría alabearse. La relación $\frac{b}{h}$ suele estar comprendida frecuentemente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ para las vigas

propiamente dichas (1). Pero, cuando deben satisfacer otras condiciones, como los tablones de un piso, la altura es menor que el ancho, aunque con esta disposición, el material no se aprovecha tan bien para la resistencia.

El esfuerzo cortante máximo es, según hemos visto, igual á la reacción del apoyo, en el caso actual 450 kg. La sección de la viga es $13 \times 20 = 260$ cm.^{2}, y el trabajo máximo debido al esfuerzo cortante $\frac{450}{260} = 1{,}73$ kg. Este trabajo máximo corresponde al apoyo, donde el momento es nulo; en el punto medio, en que el momento es máximo, el esfuerzo cortante es nulo. Por lo tanto, como habíamos indicado, la resistencia al esfuerzo cortante está asegurada sobradamente.

2.° *Calcular una vigueta laminada de sección en doble* **T** *para una pasarela de 2,20 de ancho destinada al tránsito de peatones y caballerías.*

La vigueta ha de resistir una carga permanente uniformemente repartida, que se compone de su peso propio y de las partes de la construcción que insisten en ella. Supongamos que, en vista de la construcción que se proyecta, se evalúe esta carga en 150 kg.

---

(1) Es fácil determinar la relación más favorable entre b y h, para extraer de un rollizo de diámetro d la viga más resistente. Para ello basta hacer máximo el momento resistente, ó sea $b\,h^2$, prescindiendo del factor constante.

Como la diagonal de la viga es el diámetro del rollizo, tendremos la condición $b^2 + h^2 = d^2$, en la que d es constante.

Expresando que la diferencial de $b\,h^2$ es cero, teniendo en cuenta que b y h son variables, obtendremos

$$h\,d\,b + 2\,b\,d\,h = o.$$

Diferenciando la ecuación de condición,

$$b\,d\,b + h\,d\,h = o.$$

La condición de compatibilidad de estas dos ecuaciones homogéneas y de primer grado con relación á $d\,h$ y $d\,b$, es que el determinante de los coeficientes sea cero.

$$h^2 - 2\,b^2 = o;$$

de donde se deduce

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ó, muy aproximadamente,

$$b = \frac{5}{7}\,h.$$

De las cargas móviles, se considera como la mayor posible el peso de una caballería cargada y su conductor, que se aprecia en 1.000 kg., y producirá el mayor momento flector cuando insista en el centro de la vigueta (núm. 22). Suponiendo que las viguetas disten entre sí 1,25 m., este peso necesariamente se repartirá entre dos, correspondiendo á cada una 500 kg.

La vigueta se halla, por lo tanto, sometida á un peso $p = 150$ kg. por metro lineal uniformemente repartido, y á un peso $P = 500$ kg. actuando en su punto medio. Luego el momento flector máximo corresponde al punto medio de la vigueta, y es la suma de los producidos por ambas cargas; se calcularán por las fórmulas [3] y [6] en las que $l = 2{,}20$; y se tendrá

$$M_{máx} = \frac{150 \times 2{,}20^2}{8} + \frac{500 \times 2{,}20}{4} = 365.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula [1], y haciendo en ella $R = 5.000.000$ (refiriendo este coeficiente al metro cuadrado, y suponiendo que se adopte como coeficiente de resistencia 5 kg. por milímetro cuadrado), tendremos

$$\frac{I}{V} = \frac{365}{5.000.000} = 0{,}000.073.$$

Vemos en las tablas (apéndice núm. 5) que podemos adoptar el hierro de sección $\frac{160}{8}\ \frac{48}{8}$, cuyo módulo de resistencia es 0,000.077.2. El trabajo efectivo que le corresponde será

$$R = \frac{365}{0{,}000.077.2 \times 1.000.000} = 4{,}72 \text{ kg. por mm.}^2$$

El esfuerzo cortante máximo es 415 kg., y, siendo la sección de 1920 mm.², resulta un trabajo de 0,22 kg., completamente despreciable.

3.° *Determinar la sección de una vigueta para puente de carretera de 5,50 m. de ancho sin aceras, de modo que permita el paso de carros*

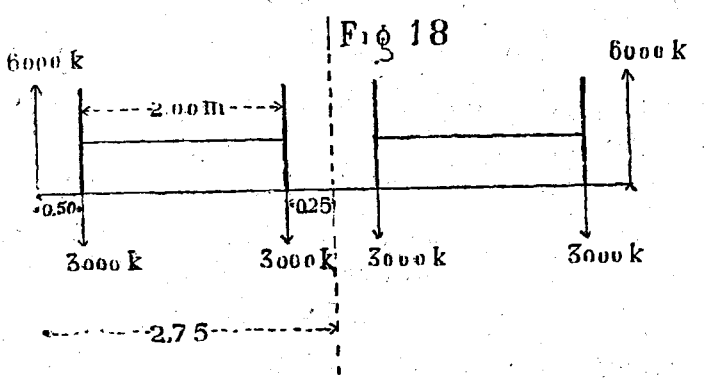
de dos ruedas cuyo peso máximo sea 6.000 kg., sin que el trabajo del hierro exceda de 6 kg. por milímetro cuadrado.

Supongamos que, en vista de las disposiciones que se proyecten, se evalúa el peso permanente que carga sobre la vigueta, el cual se compone del peso propio, del de los largueros, hierros Zorès para sostener el firme y del peso del firme; admitamos que resulta un peso $p = 1.200$ kg. por metro lineal. Su momento máximo, en el centro de la viga, será

$$M = \frac{1}{8} \times 1.200 \times 5{,}50^2 = 4.536.$$

El caso más desfavorable, en cuanto á los pesos aislados, corresponde al cruce de dos carros de 6.000 kg. sobre la vigueta, y los pesos se hallarán distribuídos como indica la figura 18. A causa de la simetría de las cargas, el momento máximo corresponderá tam-

Fig 18



bién al centro de la vigueta. Las reacciones de los apoyos serán de 6.000 kg., y hallaremos el momento flector máximo sumando algebráicamente los momentos de las tres fuerzas que actúan á la izquierda del punto medio de la vigueta tomados con relación á este punto; tendremos, pues,

$$6.000 \times 2{,}75 - 3.000 \times 2{,}25 - 3.000 \times 0{,}25 = 9.000.$$

Luego el momento máximo, cuando se acumulan las dos cargas, será

$$M_{máx} = 4.536 + 9.000 = 13.536.$$

Para obtener la sección acudiremos al cuadro núm. 1. Pero antes debemos fijar uno de los elementos que la definen, que es la altura. En esta clase de vigas la altura varía entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$ de la luz, y, cuando nada se opone á ello, conviene aumentarla y acercarse á la máxima admisible, con lo cual disminuye el peso. Admitamos $h = 0{,}60$ m.

Vemos en el cuadro que, para esta altura, y para el valor de $\frac{RI}{V} = 13.536$ tomado en la escala que corresponde á $R = 6$ kg., la horizontal y la vertical correspondientes á estas cifras se cortan muy cerca de la oblicua 97. El peso por metro lineal debe ser, por lo tanto, 97 kg. próximamente.

El problema queda reducido á constituir una sección de este peso con una chapa de 0,60 m. de altura y cuatro hierros de ángulo, y podemos formarla así:

Alma de 600 mm. por 10 de espesor, que pesa.....	46,2 kg.
4 hierros de ángulo $\frac{85 \times 85}{11}$, á 13 kg. por metro lineal	52,0 kg.
Total.....	98,2 kg. (1)

Ahora es fácil comprobar la sección, calculando su módulo de resistencia por medio de la fórmula [11]. Se obtiene así:

$$\frac{I}{V} = 0{,}002.373$$

y el trabajo efectivo del hierro será

$$R = \frac{M}{\frac{I}{V}} = \frac{13.536}{0{,}002373 \times 1.000.000} = 5{,}70 \text{ kg. por mm.}^2$$

que se acerca mucho al límite impuesto, y, por lo tanto, la sección proyectada es admisible.

---

(1) Véanse los apéndices números 3 y 4.

El esfuerzo cortante máximo es 9.300 kg. La sección de la viga tiene una área de 7.749 mm.², y el trabajo máximo debido al esfuerzo cortante es $\frac{9.300}{7.749} = 1{,}20$ kg, por milímetro cuadrado, despreciable, como en los casos anteriores.

4.° *Calcular una vigueta para puente de ferrocarril de vía estrecha de 1 m. El ancho del puente, ó luz de la vigueta, es 3 m. La máxima carga es la producida por los ejes motores de la locomotora que transmiten á los carriles en sus puntos de apoyo un peso de 10 toneladas cada uno. El coeficiente de resistencia es R = 6 kg. por milímetro cuadrado.*

Seguiremos la misma marcha que en el ejemplo anterior.

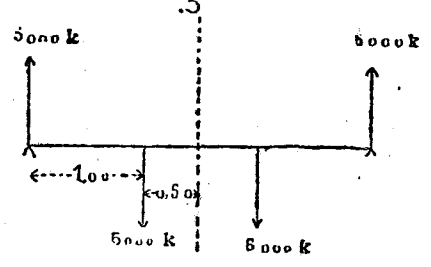
El peso permanente que actúa sobre la vigueta consta de su propio peso, el de los largueros y el de los carriles y demás elementos de la vía. Supongamos que den, por metro lineal de vigueta, $p = 150$ kg.

El momento máximo correspondiente al peso uniformemente repartido será

$$M = \frac{1}{8} \times 150 \times 3^2 = 169.$$

Los pesos aislados, en el caso más desfavorable, actuarán como indica la figura 19, suponiendo que la distancia entre las viguetas sea menor que la que hay entre los ejes de la locomotora. La reacción del apoyo es 5.000 kg., y los pesos de 5.000 kg. transmitidos por cada rueda actuarán sobre los carriles á 0,50 m. del eje de la vigueta. El momento máximo corresponderá también al punto medio, se hallará como en el ejemplo anterior, y será

Fig. 19



$$5.000 \times 1{,}5 - 5.000 \times 0{,}50 = 5.000.$$

El momento máximo total será

$$M_{máx} = 5.000 + 169 = 5.169.$$

En el cuadro núm. 1 vemos que, tomando como altura $h = 0{,}35$ en la escala horizontal, y 5.169 en la de $\frac{RI}{V}$ para $R = 6$ kg., el peso por metro lineal debe ser próximamente 63 kg. La sección puede componerse así:

Alma de 350 × 8 mm. que pesa por metro lineal.....	21,60 kg.
4 hierros de ángulo $\frac{70 \times 70}{10}$ á 10,70 kg.....	42,80 kg.
Total.....	64,40 kg.

Si se calcula exactamente el módulo de resistencia, se obtiene

$$\frac{I}{V} = 0{,}00088.$$

Luego el verdadero valor de R es

$$R = \frac{5.169}{0{,}00088 \times 1.000.000} = 5{,}88 \text{ kg. por mm.}^2$$

El trabajo máximo debido al esfuerzo cortante es

$$\frac{5.225}{4.100} = 1{,}02 \text{ kg. por mm.}^2$$

5.° *Calcular una vigueta para puente de ferrocarril de vía única de ancho normal.*—Admitiremos que el ancho del puente, ó la luz de la vigueta, sea de 4,50 m., y que se evalúe el peso permanente en $p = 350$ kg. por metro lineal. El momento flector máximo correspondiente será

$$M = \frac{1}{8} \times 350 \times \overline{4{,}50}^2 = 891.$$

La carga móvil más desfavorable se obtendrá colocando la locomotora de modo que uno de los ejes motores, que supondremos de 15 toneladas, insista sobre la vigueta. Entonces, en cada carril insistirá el peso de una rueda, ó sea 7.500 kg. Pero, además, si los ejes motores están más próximos entre sí que las viguetas contiguas,

una parte del peso de cada uno de los ejes inmediatos al que insiste sobre la vigueta considerada se transmitirá también á ésta. Si admitimos que la distancia entre dichos ejes es la mitad del intervalo entre las viguetas, se transmitirá de cada rueda inmediata la mitad de su peso, y, en el punto en que un carril se apoya sobre la vigueta, actuará un peso de 15 toneladas, como indica la fig. 20. El momento máximo correspondiente á esta carga será

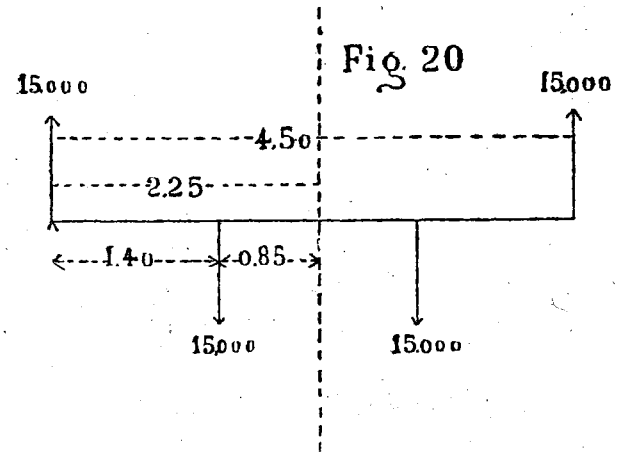


Fig. 20

$$15.000 \times 2{,}25 - 15.000 \times 0{,}85 = 21.000.$$

El momento máximo total será

$$M_{máx} = 21.000 + 891 = 21.891.$$

En el cuadro núm. 2 observaremos que, á este valor de $\frac{RI}{V}$, para $R = 6$ kg. por milímetro cuadrado, y á una altura $h = 0{,}45$ de la vigueta, corresponde un peso $\pi = 174$ kg. por metro lineal.

Podemos, por lo tanto, componer la sección como sigue, expresando en milímetros sus dimensiones:

Alma de 450 × 10 mm., que pesa por metro lineal.....	34,65 kg.
4 hierros de ángulo $\frac{100 \times 100}{12}$ á 17 kg. por metro lineal.	68,00 »
4 chapas de 210 × 11 á 17,80 kg. por metro lineal.....	71,20 »
Total.....	173,85 kg.

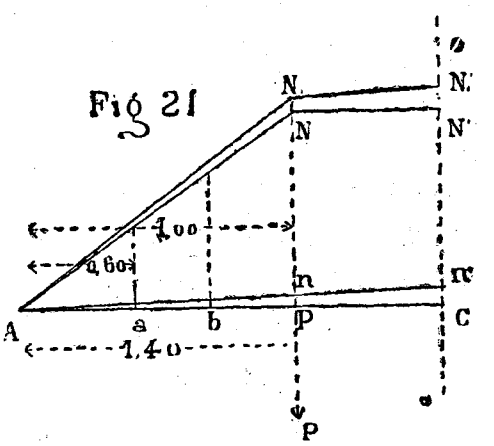
Comprobemos esta sección. Calcularemos el momento de inercia por medio de la fórmula [12], y obtendremos

$$\frac{I}{V} = 0{,}003.831$$

de donde

$$R = \frac{\frac{M}{I}}{V} = \frac{21.891}{0{,}003.831 \times 1.000.000} = 5{,}71 \text{ kg. por mm.}^2$$

Esta sección deberíamos adoptar en toda la longitud de la vigueta, si hubiera de ser constante. Pero, como los momentos flectores disminuyen hacia los apoyos hasta anularse en estos puntos, se comprende que las dos chapas que refuerzan las cabezas sólo son necesarias en una cierta zona del centro de la vigueta, y que podremos suprimirlas en aquellos puntos en que la resistencia al momento flector está asegurada con la sección que resulta de suprimir sucesivamente estas chapas.



Para averiguar la posición de estos puntos, dibujemos en una escala cualquiera la curva de los momentos flectores (fig. 21). Bastará dibujar la mitad de esta curva á causa de la simetría.

Empecemos por la curva correspondiente á los pesos aislados de 15.000 kg. En el apoyo, el momento es cero. En el punto *P*, el momento es

$$15.000 \times 1{,}40 = 21.000.$$

Hemos visto que en el punto medio de la vigueta tiene este mismo valor, y, por consiguiente, la curva de momentos flectores correspondiente á los pesos aislados es el contorno quebrado $A\,N\,N'$.

Tracemos ahora la curva correspondiente á la carga permanente uniformemente repartida. En el punto *A* es cero y en el punto medio de la viga 891, según hemos calculado ya. Calcularemos el correspondiente al punto *P* por medio de la fórmula [6], y obtendremos 759,50. Con otro punto que se determine entre *A* y *P*, podrá trazarse la curva $A\,n\,n'$ con suficiente aproximación para el objeto que nos proponemos.

Sumando en cada punto las ordenadas de estas dos curvas, ten-

dremos la curva $A\ N_1\ N_1'$, que es la de los momentos flectores totales.

Observemos ahora que, si en la sección determinada suprimimos una chapa en cada cabeza, el peso por metro lineal que resulta es $\pi = 138{,}35$ kg. En el cuadro núm. 2 vemos que á este peso corresponde un valor de $\frac{R\,I}{V}$ de 16.500 trabajando el hierro á 6 kg. por milímetro cuadrado. Si buscamos este momento en la curva, vemos que corresponde al punto *b*, distante 1 m. del apoyo. Por consiguiente, en la región *A b* y en su simétrica, podremos suprimir una chapa en cada cabeza.

Del mismo modo veremos que, suprimiendo las dos chapas, el peso de la sección se reduce á 102,65 kg. Acudiendo ahora al cuadro número 1, veremos que el momento flector máximo que le corresponde es 10.500, y buscando este valor en la curva, lo encontramos en el punto *a* á 0,60 m. del apoyo. Luego, en la zona *A a* y en su simétrica, pueden suprimirse las cuatro chapas de las cabezas, dejando reducida la sección al alma y á los 4 hierros de ángulo.

Como comprobación, determinemos los momentos flectores en los puntos *a* y *b*.

En *a* tendremos:

$$15.000 \times 0{,}60 + \frac{1}{2} \times 350 \times 0{,}60 \times (4{,}50 - 0{,}60) = 9.409{,}5.$$

En *b* encontraremos:

$$15.000 \times 1 + \frac{1}{2} \times 350 \times 1 \times (4{,}50 - 1) = 15.612{,}5.$$

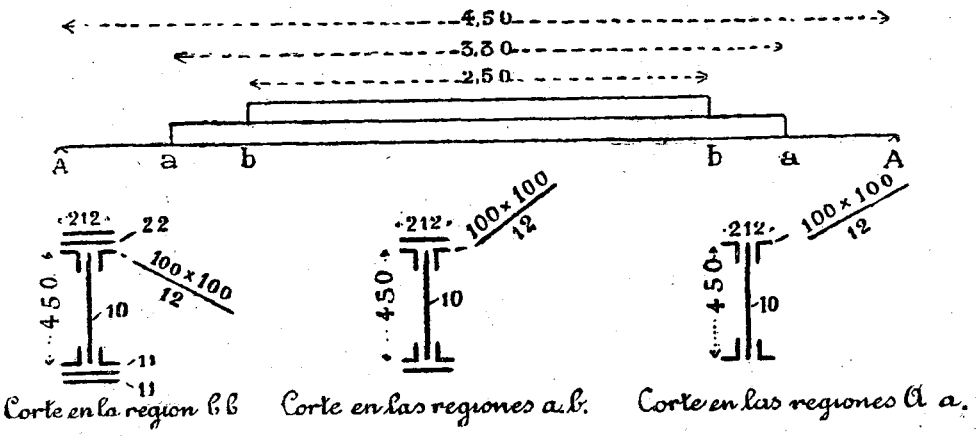
El 1.° es menor y el 2.° próximamente igual á los determinados gráficamente, y, por lo tanto, tendremos la seguridad de que en ningún punto de la viga llegará el trabajo del hierro á 6 kg. por milímetro cuadrado, á pesar de las supresiones de material indicadas. Las cabezas quedarán constituídas como se indica en la fig. 22 en alzado y cortes.

En la práctica no hay interés en determinar con exactitud los

puntos *a* y *b*, antes bien, conviene que las chapas se extiendan algo más de lo estrictamente necesario, y basta, por consiguiente, el sencillo procedimiento que hemos empleado.

El esfuerzo cortante en el apoyo es 15.787 kg., y la sección de la

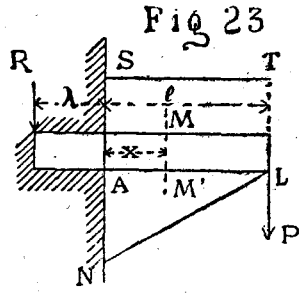
Fig. 22



viga en este punto de 6.756 mm.² Luego el trabajo máximo debido al esfuerzo cortante es $\frac{15.787}{6.756} = 2{,}33$ kg. por milímetro cuadrado. Fácil es ver que, en cualquiera sección en que el trabajo debido al momento flector es apreciable, el correspondiente al esfuerzo cortante es insignificante.

27. Vigas empotradas.—*Caso en que obra un peso en el extremo de la viga.*—Una viga cargada y apoyada en un solo punto no puede, en general, mantenerse en equilibrio. Sólo en condiciones muy especiales podría éste subsistir, siendo el caso asimilable al de una romana.

Fig. 23



Pero, si suponemos el extremo de la viga recibido ó empotrado en una cierta longitud dentro de un muro (fig. 23), el equilibrio se establece aunque se cargue la viga con pesos que no excedan de cierto límite.

Supongamos que en el extremo de la viga obre un peso P á la distancia l del paramento del muro, y consideremos, en primer lugar, las condiciones de equilibrio entre

las fuerzas exteriores, prescindiendo del equilibrio que debe establecerse entre dichas fuerzas y las interiores, en cada sección del sólido, para que éste no se rompa.

Veremos, desde luego, que, si la viga estuviera simplemente apoyada en el punto A, giraría alrededor de dicho punto por la acción del peso P. Pero se opone á ello la resistencia del techo del orificio en que está introducida la viga, que obra hacia abajo. Sea R esta resistencia, y llamemos λ á su distancia al punto de apoyo A. Para que el giro alrededor de este punto no se verifique será preciso que los momentos de R y de P con relación á A sean iguales, es decir, que

$$R\lambda = P\,l.$$

El momento $R\,\lambda$ es el *momento ó par de empotramiento*. Este momento y una reacción igual á P y dirigida hacia arriba, que se desarrolla en A, bastan para asegurar el equilibrio del sistema, si se considera la viga como un cuerpo indeformable.

Consideremos ahora una sección MM' á la distancia x de la sección de empotramiento, la cual supondremos invariablemente fija.

Si suponemos cortada la viga en MM', la única fuerza que obra á su derecha es P; y si aplicamos en la sección MM' dos fuerzas iguales y contrarias, é iguales á P, el sistema se reducirá, del mismo modo que en las vigas apoyadas, á un esfuerzo cortante P aplicado en la sección considerada, y á un momento flector igual á dicho peso multiplicado por su distancia al plano MM'. De modo que, si llamamos x á la abscisa de la sección contada desde el paramento del muro, el momento flector será

$$M = P\ (l - x). \qquad [15]$$

Se ve inmediatamente que M aumenta cuando x disminuye, y adquiere su valor máximo para $x = o$, de modo que

$$M_{máx} = P\,l. \qquad [16]$$

En el extremo de la viga, para $x = l$, el momento es nulo, y en resumen, representando gráficamente la ecuación [15], obtendremos

la recta NL, cuyas ordenadas dan á conocer los momentos en cada sección (1).

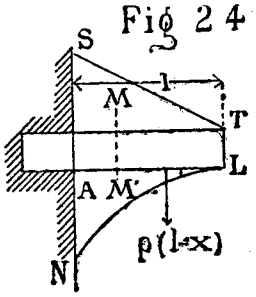
Si la sección ha de ser constante basta calcular el momento máximo [16], y seguir luego, para determinar la sección, el mismo procedimiento que para la viga apoyada, aplicando la fórmula [1] ó los cuadros gráficos.

Claro está que también puede hacerse variable la sección proporcionándola al momento flector que le corresponde según la fórmula [15], siguiendo el mismo procedimiento que hemos explicado detalladamente en el ejemplo 5.° del número anterior.

El esfuerzo cortante es igual á P en todas las secciones de la viga, y está representado por la horizontal ST, cuya distancia al eje de las x es igual á P.

28. VIGA EMPOTRADA POR UN EXTREMO Y CARGADA DE PESOS UNIFORMEMENTE REPARTIDOS EN TODA SU LONGITUD.—Supongamos que el peso que obra por metro lineal sea p, y busquemos la expresión del momento flector en una sección cualquiera MM'. Las longitudes l y x tienen la misma significación que en el caso anterior (fig. 24).

Fig 24



A la derecha de MM' obra en este caso un peso $p\,(l-x)$. Su punto de aplicación, si lo reemplazamos por su resultante, estará á la mitad de la distancia entre MM' y el extremo de la derecha de la viga, de modo que el brazo de palanca será $\frac{l-x}{2}$. Luego el momento será

$$M = \frac{1}{2}\,p\,(l-x)^2. \qquad [17]$$

Vemos que M aumenta cuando x disminuye, y adquiere su valor máximo cuando $x = o$, de modo que

$$M_{máx} = \frac{1}{2}\,p\,l^2. \qquad [18]$$

---

(1) Estos momentos son de signo contrario á los considerados al tratar de la viga apoyada por sus extremos, y tienden á encorvar la pieza de modo que la concavidad esté hacia abajo, al contrario de lo que ocurre en el caso citado. Por esa razón se representa la recta NL por debajo del eje de las x.

Este momento máximo puede escribirse bajo la forma $p\,l \times \frac{l}{2}$, ó $\frac{p\,l}{2} \times l$, y se ve que es igual al que resultaría de aplicar todo el peso que carga sobre la viga á su punto medio, ó la mitad del peso al extremo.

Si se representa gráficamente la ecuación [17], obtendremos una curva de la forma $N\,L$.

El esfuerzo cortante en $M\,M'$ es $p\,(l - x)$, y, haciendo variar x, obtendremos la recta $T\,S$ que lo representa.

29. VIGA EMPOTRADA EN SUS DOS EXTREMOS Y CARGADA DE PESOS UNIFORMEMENTE REPARTIDOS EN TODA SU LONGITUD.—Sin detenernos en la demostración que exige consideraciones relativas á la deformación de la viga, indicaremos la expresión del momento flector de una sección cualquiera, que es la siguiente:

$$M = \frac{1}{2}\,p\,l\,x - \frac{1}{2}\,p\,x^2 - \frac{1}{12}\,p\,l^2.$$

El momento máximo en valor absoluto tiene lugar en los extremos de la viga, y es

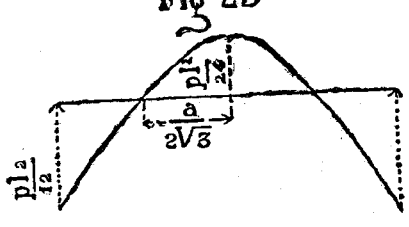
$$M_{máx} = -\frac{1}{12}\,p\,l^2.$$

En el centro de la viga, el momento es un máximo positivo, y su valor es

$$M = \frac{1}{24}\,p\,l^2.$$

En dos secciones equidistantes de la central, y á una distancia de la misma igual á $\frac{l}{2\sqrt{3}}$, el momento flector es nulo.

Fig 25



De modo que el lugar geométrico de los momentos tiene la forma indicada en la fig. 25. Los esfuerzos cortantes son los mismos que en el caso en que la viga está simplemente apoyada por sus extremos.

El empotramiento perfecto que suponen estas fórmulas es muy difícil de realizar, por lo cual, en la práctica, son de muy escasa aplicación las fórmulas relativas á este caso que, como se ve, conducen á dar á las vigas dimensiones menores que si se consideran simplemente apoyadas.

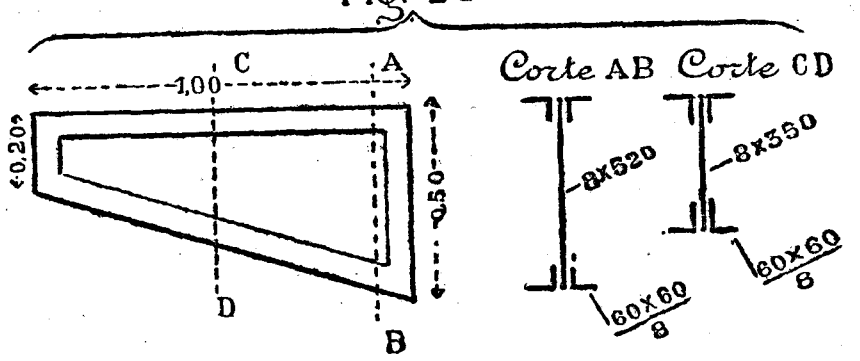
Las viguetas de los pisos, aun con entregas de 0,30 á 0,50 m. en los muros, se calculan siempre como si estuvieran simplemente apoyadas, y lo mismo sucede con las de los puentes metálicos, que nunca deben considerarse empotradas en sus extremos.

30. CÁLCULO DE UNA CONSOLA PARA SOSTENER UNA ACERA VOLADA EN UN PUENTE METÁLICO.—Como aplicación de las fórmulas que preceden, vamos á estudiar un caso que se presenta con alguna frecuencia en los puentes metálicos.

Con el objeto de disminuir la luz, y, por consiguiente, el peso de las viguetas, muchas veces se colocan las vigas principales á la distancia necesaria para comprender entre ellas el ancho preciso para el tránsito de los carruajes, y las aceras se disponen exteriormente, sosteniéndolas por medio de consolas en prolongación de las viguetas. Estas consolas son verdaderas vigas empotradas por uno de sus extremos y cargadas de pesos uniformemente repartidos, caso estudiado en el núm. 28.

Supongamos que las consolas disten entre sí 4 m. Su disposición se indica en alzado de frente y en sección transversal en la fig. 26.

Fig. 26



La luz es de 1 m.; la altura en el empotramiento sobre la viga principal es de 0,50 m., y de 0,20 en el extremo. La consola está formada

de dos hierros de ángulo de $\frac{60 \times 60}{8}$ que la contornean y cogen un alma de 8 mm. de espesor.

Vamos á calcular el trabajo del metal en la sección de empotramiento *A B*, y en la correspondiente á la mitad de la luz, *C D;* es inútil calcularlo en la sección extrema que teóricamente debe ser nula, puesto que el momento flector y el esfuerzo cortante se reducen en ella á cero.

Supondremos que el peso permanente que obra sobre la consola es 100 kg.

El peso accidental debido á una acumulación de personas se evalúa á razón de 300 kg. por metro cuadrado, y distando las consolas 4 m., actuará sobre cada una, por metro lineal, un peso de $4 \times 300 = 1.200$ kg.

Luego el peso total será $p = 1.300$ kg.

El momento flector, á la distancia x del empotramiento, se calcula por la fórmula [17], y será

$$M = \frac{1}{2} \times 1.300\ (1 - x)^2.$$

Para $x = o$, se obtiene

$$M_{máx} = 650.$$

Y para $x = 0{,}50$, á la mitad de la luz,

$$M = 162.$$

Para determinar el valor de R en la sección de empotramiento observaremos, aplicando la fórmula [1] y empleando la expresión aproximada [14] del momento de inercia, que

$$M = \frac{R\,I}{v} = R\,\omega\,h$$

de donde

$$R = \frac{M}{\omega\,h} = \frac{\frac{M}{h}}{\omega}$$

Si despreciamos el momento de inercia del alma, bastará recordar la significación del momento flector para ver que $\frac{M}{h}$ no es otra cosa que la compresión de la cabeza superior ó la tensión de la inferior, y siendo ω el área de una de las cabezas, la verdad de esta fórmula se evidencia directamente.

Ahora, siendo $h = 0{,}50$ m. en la sección de empotramiento, dicha tensión ó compresión será

$$\frac{M_{máx}}{h} = \frac{650}{0{,}50} = 1.300 \text{ kg.}$$

El área ω de los dos hierros de ángulo es 896 mm.^{2}

Luego el valor de R será

$$R = \frac{1.300}{896} = 1{,}45 \text{ kg. por mm.}^2$$

En la segunda sección considerada, CD, la altura es

$$\frac{0{,}50 + 0{,}20}{2} = 0{,}35 \text{ m.}$$

Luego la tensión ó compresión de las cabezas es

$$\frac{M}{h} = \frac{162}{0{,}35} = 463 \text{ kg.}$$

Y el valor de R

$$R = \frac{463}{896} = 0{,}52 \text{ kg. por mm.}^2$$

El esfuerzo cortante en la sección de empotramiento es 1.300 kg.

Y el trabajo del alma, cuya área en milímetros cuadrados es $500 \times 8 = 4.000$, será, por consiguiente,

$$\frac{1.300}{4.000} = 0{,}32 \text{ kg. por mm.}^2$$

En la sección media de la viga, CD, el esfuerzo cortante es

$$1.300 \times 0{,}50 = 650 \text{ kg.}$$

El área de la sección del alma en milímetros es

$$350 \times 8 = 2.800.$$

Y el trabajo del material

$$\frac{650}{2.800} = 0{,}26 \text{ kg. por mm.}^2$$

Todas estas cifras son insignificantes, y la resistencia del material queda muy mal aprovechada con la disposición indicada. Pero prácticamente sería imposible adoptar tipos de hierros de ángulo más pequeños, ni se puede admitir una reducción en el espesor del alma, porque los palastros más delgados se destruyen rápidamente por la oxidación.

El aprovechamiento de la resistencia del hierro sería aún menor si las consolas estuviesen más próximas, como sucede ordinariamente en la práctica.

Pero á pesar de este defecto, la disposición indicada resulta generalmente económica, por la gran reducción que se obtiene en el peso de las viguetas al disminuir su luz.

Puede también reducirse el peso de las consolas enlazando las cabezas por medio de una celosía en vez de emplear el alma llena, como hemos supuesto.

CAPÍTULO III.

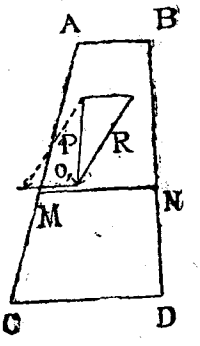
REPARTICIÓN DE LAS PRESIONES EN UNA SECCIÓN PLANA DE UN SÓLIDO.

---

31. Problema de la estabilidad de un macizo de fábrica.— Un macizo de fábrica no es un sólido indeformable como los que considera la Estática, y, por consiguiente, no basta, para asegurar su estabilidad, que las fuerzas exteriores que obran sobre él estén en equilibrio. Es preciso, además, que las presiones que experimenta el material no excedan en ningún punto del coeficiente de resistencia á que puede someterse la fábrica.

Este estudio puede hacerse por un método análogo al seguido para el de las vigas en el capítulo anterior. Consideremos (fig. 27) un macizo prismático cuya sección recta es $ABCD$, que puede representar el perfil de un muro de sostenimiento ó de un estribo de puente. Del mismo modo que al tratar de las vigas estudiábamos la distribución de los esfuerzos en una sección transversal cualquiera, consideraremos aquí secciones horizontales MN. Si todas las fuerzas exteriores que obran sobre la porción de macizo $ABMN$ son conocidas, podremos determinar su resultante, contando como una de las componentes el peso propio de dicha porción. Sea R dicha resultante; para que exista el equilibrio, es preciso que la parte inferior $MNCD$ del macizo pro-

Fig. 27



duzca una reacción igual y contraria á R, y aplicada al mismo punto del plano MN. Pero esta reacción no puede ser otra cosa que la resultante de las elementales que se producen en cada punto de la sección MN. De aquí se deduce la necesidad de conocer la reacción elemental que corresponde á cada punto de la sección, puesto que es preciso asegurarse de que la mayor no excede del valor admisible para el coeficiente de resistencia.

Para plantear este problema, descompondremos la fuerza R en sus dos componentes P y Q, normal y paralela respectivamente al plano MN. La fuerza Q tiende á hacer deslizar la porción $ABMN$ á lo largo de la sección MN. A este deslizamiento se oponen la cohesión y el rozamiento que se desarrollaría al iniciarse el movimiento; y, como en la práctica, este movimiento no se verifica nunca cuando las condiciones de estabilidad relativas á la componente normal se hallan satisfechas, podemos prescindir del efecto de la fuerza Q. Así, el problema queda reducido á averiguar cómo se reparte la fuerza normal P en la sección considerada.

El problema, considerado analíticamente, es evidentemente indeterminado, y su resolución por la observación directa presenta tales dificultades, que ni siquiera se ha intentado. Es preciso, por lo tanto, acudir, como en el estudio de la flexión de las vigas, á una hipótesis, que viene á ser la misma que en aquel caso. Se admite que, después de la deformación, la sección MN sigue siendo plana; y esta hipótesis, comprobada por sus consecuencias como suficientemente exacta para las necesidades de la práctica, determina el problema y permite resolverlo.

Considerado en general, este problema presenta grandes dificultades de análisis; pero los casos necesarios en la práctica son los más sencillos, y pueden resolverse fácilmente por consideraciones elementales.

En las aplicaciones á los puentes se presenta esta cuestión al comprobar la estabilidad de las bóvedas y de los estribos. En las primeras, las secciones que se consideran son los planos de junta normales al intradós, y en los estribos son generalmente planos horizontales. Su forma es siempre rectangular, y como todas las zonas del puente que tienen por base la sección recta y por profundidad un metro, se

hallan en las mismas condiciones, resulta que basta verificar la comprobación para una de estas zonas; y, por consiguiente, los rectángulos que debemos considerar tienen siempre uno de sus lados igual á la unidad. Además, como los empujes y los pesos están repartidos uniformemente á lo largo del estribo, las resultantes sobre estos rectángulos de un metro de profundidad obran siempre en el eje ó mediana del rectángulo. Podemos, pues, limitarnos á estudiar la repartición de las presiones en el caso en que la fuerza es normal á una sección rectangular y está aplicada en un punto de una de las medianas.

32. DISTRIBUCIÓN DE LAS PRESIONES EN UNA SECCIÓN RECTANGULAR. —Distinguiremos los cuatro casos siguientes:

1.° La fuerza está aplicada en el centro de gravedad de la sección.

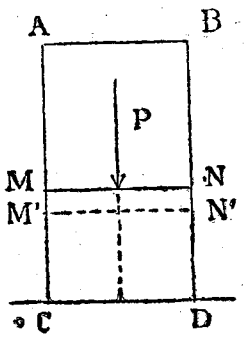
2.° El punto de aplicación está al tercio de la mediana.

3.° Dicho punto está dentro del tercio central de la mediana.

4.° La fuerza se aplica en un punto de la mediana situado fuera del tercio central.

1.er caso.—Si la fuerza está aplicada en el centro de gravedad (fig. 28), estamos en el caso examinado en el capítulo I al tratar de la extensión y compresión de prismas de poca altura. El efecto de la fuerza P consistirá en trasladar la sección MN á la posición $M'N'$ paralela á la anterior; todos los filetes de base igual á la unidad superficial, en que podemos considerar descompuesto el prisma $MNCD$, sufren acortamientos iguales, y, por lo tanto, las presiones por unidad superficial que los producen son también iguales; luego, si llamamos R á dicha presión y ω al área, la presión en un punto cualquiera, por unidad de superficie, será

Fig. 28.



$$R = \frac{P}{\omega}. \qquad [1]$$

2.° caso.—Supongamos que la fuerza P esté aplicada en el punto C

tal que $CM = \frac{1}{3} MN$ (figuras 29 y 30). Traslademos la fuerza P al centro de gravedad o, para lo cual introduciremos en dicho punto dos fuerzas P iguales y contrarias; el equilibrio no se habrá alterado, y veremos que la fuerza P aplicada en C equivale á la misma

Fig. 29

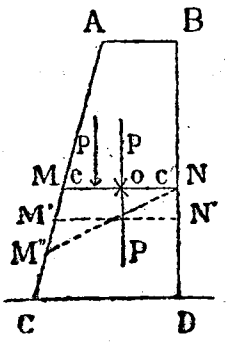
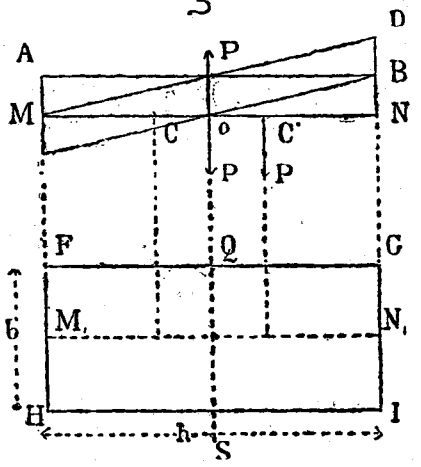


Fig. 30



fuerza aplicada en o, y á un par cuyas fuerzas son iguales á P y cuyo brazo de palanca es Co. Por lo tanto, si evaluamos separadamente la presión R_1 que produce en un punto cualquiera la fuerza P aplicada en o, y la R_2 producida en el mismo punto por el par, tendremos la presión total R en dicho punto, sumando algebráicamente las anteriores; es decir, que

$$R = R_1 + R_2.$$

R_1 se calcula por la fórmula [1]; de modo que, llamando h al lado del rectángulo paralelo á la mediana $M_1 N_1$ (fig. 30), y b al perpendicular á la misma, tendremos

$$R_1 = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{b\,h}.$$

En cuanto á R_2, se calculará por la fórmula de la flexión [núm. 20], y será

$$R_2 = \frac{M\,v}{I},$$

en la cual M es el momento del par formado por las dos fuerzas P, cuyo valor será

$$M = P \times Co = \frac{1}{6} Ph;$$

I es el momento de inercia de la sección con relación á QS, ó sea $I = \frac{1}{12} b h^3$; luego

$$R_2 = \frac{Mv}{I} = 2 \frac{Pv}{b h^2}$$

y sustituyendo en vez de R_1 y R_2 sus valores

$$R = \frac{P}{b h} + 2 \frac{Pv}{b h^2} = \frac{P}{\omega} \left[1 + \frac{2v}{h}\right] \qquad [2]$$

teniendo en cuenta que $\omega = bh$. Tal es la fórmula que da el valor de la presión por unidad de superficie en un punto cualquiera situado á la distancia v del eje QS, debiéndose contar como positivos los valores de v para los puntos situados al mismo lado del eje que el punto de aplicación de la fuerza, y como negativos para los situados al lado opuesto.

Si damos á v diversos valores y calculamos los correspondientes de R, veremos fácilmente que se obtiene una recta MD, en que cada ordenada representará la presión correspondiente á todos los puntos de la paralela á QS situada á la distancia v de dicho eje.

Para el punto M tenemos

$$v = -\frac{h}{2}; \qquad R = o.$$

La presión en M es nula, y el lado del rectángulo proyectado en dicho punto es el eje alrededor del cual gira la sección.

En el punto o tenemos

$$v = o; \qquad R = \frac{P}{\omega}.$$

Todos los puntos de la recta QS sufren la misma presión que si la fuerza estuviera aplicada al centro de gravedad.

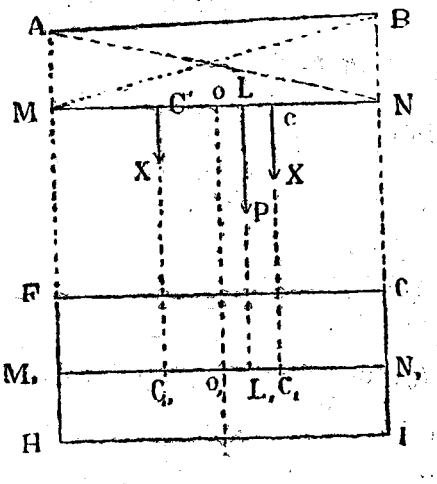
En el punto N en que

$$v = \frac{h}{2}, \qquad R_{máx} = 2\frac{P}{\omega}. \qquad [3]$$

Esta es la presión máxima que, como vemos, es doble de la media, y tiene lugar en el lado b del rectángulo más próximo al punto de aplicación de la fuerza. La fórmula [3] es la más importante para las aplicaciones, puesto que da en cada sección la mayor presión, la cual debe ser igual ó menor que el coeficiente de resistencia adoptado.

En la figura se han representado las rectas cuyas ordenadas son las presiones correspondientes á la fuerza P trasladada al centro de gravedad, y al par formado por las otras dos fuerzas. La 1.ª es AB paralela á MN, y cuya ordenada tiene por valor constante $\frac{P}{\omega}$; la 2.ª CB, cuyas ordenadas son proporcionales á las distancias v, siendo negativas las correspondientes á la izquierda de la sección. Se observará la perfecta correspondencia que existe entre la deformación producida por la fuerza P, que es una traslación paralela á MN, y las fuerzas, todas iguales á $\frac{P}{\omega}$, que producen estos acortamientos del prisma. Del mismo modo, el par $P \times Co$ produce una rotación alrededor de QS; á la izquierda de este eje los filetes elementales del prisma situado debajo de la sección se alargan, y por esta razón obtenemos en esta región presiones negativas, ó sea tensiones. La suma de las ordenadas de ambas rectas da la MD que representa las presiones totales, y que hemos estudiado ya discutiendo la fórmula [2].

Fig 31



3.er caso (fig. 31). — Supongamos que la fuerza P esté aplicada en un punto L definido por su abscisa $oL = a < \frac{h}{6}$. Reduciremos este caso al anterior, descomponiendo P en dos

fuerzas X y X' aplicadas á los puntos C y C' que dividen á la mediana en tres partes iguales; bastará hallar las presiones correspondientes á ambas fuerzas en el punto cuya abscisa es v y sumarlas. Pero, siendo X y X' fuerzas aplicadas al tercio de la mediana, podremos aplicarles la fórmula [2], y tendremos:

$$R = \frac{X}{\omega}\left(1 + \frac{2v}{h}\right) + \frac{X'}{\omega}\left(1 - \frac{2v}{h}\right).$$

El signo negativo del segundo término proviene de que las abscisas v se han de contar para la fuerza X' en sentido opuesto que para la X.

Para determinar los valores de X y X' en función de P, bastará tomar momentos con relación á los puntos C' y C, lo que dará:

$$X \times \frac{h}{3} = P \times LC' = P\left(\frac{h}{6} + a\right),$$

de donde

$$X = \frac{3P}{h}\left(\frac{h}{6} + a\right);$$

$$X' \times \frac{h}{3} = P \times LC = P\left(\frac{h}{6} - a\right),$$

luego

$$X' = \frac{3P}{h}\left(\frac{h}{6} - a\right).$$

Substituyendo estos valores en la ecuación anterior, tendremos:

[4] $$R = \frac{3P}{\omega h}\left[\left(1 + \frac{2v}{h}\right)\left(\frac{h}{6} + a\right) + \left(1 - \frac{2v}{h}\right)\left(\frac{h}{6} - a\right)\right] =$$

$$= \frac{3P}{\omega h}\left(\frac{h}{3} + \frac{4av}{h}\right) = \frac{P}{\omega}\left(1 + \frac{12av}{h^2}\right).$$

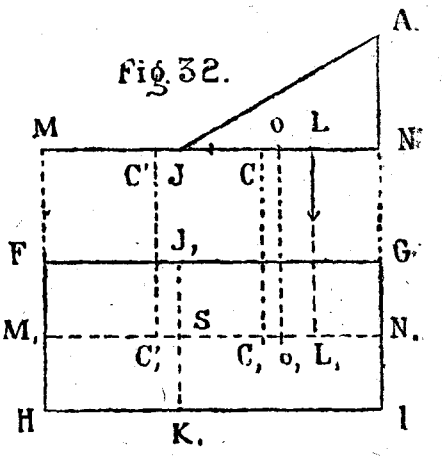
Puede obtenerse gráficamente la recta cuyas ordenadas representan los valores de R. Para ello, bastará trazar la recta MB correspondiente á la fuerza X, la cual sabemos que ha de pasar por el punto M y por el B, determinado de modo que $NB = \frac{2X}{\omega}$. Del

mismo modo se trazará la $A\,N$ que pasa por N y por A, siendo $MA = \frac{2X'}{\omega}$. Sumando las ordenadas de ambas, obtendremos la $A\,B$, cuyas ordenadas representarán, en cada punto, las presiones correspondientes, y no es otra cosa que la representación gráfica de la ecuación [4].

El mayor valor de R corresponde á $v = \frac{h}{2}$, es decir, al lado del rectángulo más próximo al punto de aplicación de la fuerza, y se obtendrá substituyendo este valor en la ecuación [4];

$$R_{máx} = \frac{P}{\omega}\left(1 + \frac{6\,a}{h}\right). \qquad [5]$$

4.° caso (fig. 32).—Si la fuerza P está aplicada en un punto L fuera del tercio central $C\,C'$, puede reducirse fácilmente el problema al 2.° caso. En efecto, si se toma á partir del punto N hacia la izquierda la distancia $NJ = 3\,LN$, el rectángulo $J_1\,G\,I\,K_1$ (proyección horizontal) se halla en el mismo caso que el $F\,G\,I\,H$ de la fig. 30. Todas las presiones debidas á la fuerza P se suponen repartidas en dicho rectángulo parcial, y el $F\,J_1\,K_1\,H$ no sufre presión alguna. Según eso, habremos de aplicar la fórmula [2] al rectángulo $J_1\,G\,I\,K_1$, y haciendo $L_1\,N_1 = LN = d$, tendremos que substituir en ella



$$\omega = 3\,d\,b,$$

$$h = 3\,d$$

y obtendremos

$$R = \frac{P}{3\,d\,b}\left(1 + \frac{2\,v}{3\,d}\right) \qquad [6]$$

siendo ahora el origen de las abscisas el punto O_1 medio de $S\,N_1$.

El máximo de R se verifica en el lado GI que se proyecta verticalmente en N, y lo obtendremos haciendo $v = \frac{3}{2} d$, de modo que

$$R_{máx} = \frac{2P}{3db}. \qquad [7]$$

33. RESUMEN.—De la discusión anterior deduciremos las siguientes reglas prácticas para calcular la presión máxima en los cuatro casos considerados.

1.er caso.—Si la fuerza está aplicada en el centro de gravedad de la sección, se reparte uniformemente en toda ella, y se calcula por la fórmula [1].

$$[1] \qquad R = \frac{P}{\omega}.$$

2.º caso.—Si la fuerza se aplica al tercio de la mediana, el lado del rectángulo perpendicular á la misma, más próximo al punto de aplicación, es el que sufre la presión máxima, que es igual al doble de la media.

$$[3] \qquad R_{máx} = \frac{2P}{\omega}.$$

El lado opuesto no sufre presión alguna, y en la paralela á aquel que pasa por el centro de gravedad la presión es la media $\frac{P}{\omega}$.

3.er caso.—Cuando la fuerza actúa dentro del tercio central de la mediana, el problema se reduce al caso anterior, descomponiéndola en otras dos que obren en los puntos situados al tercio. La presión máxima es el doble de la media correspondiente á la mayor de las dos componentes, y puede calcularse por la fórmula

$$R_{máx} = \frac{P}{\omega}\left(1 + \frac{6a}{h}\right), \qquad [5]$$

en la cual P es la fuerza, ω el área del rectángulo, a la distancia del punto de aplicación al centro de gravedad y h el lado del rectángulo paralelo á la mediana en que se aplica la fuerza. El lado más

cargado es el más próximo á la fuerza de los perpendiculares á la mediana.

4.º caso.—Cuando la fuerza obra fuera del tercio central, se distribuye en un rectángulo cuyo lado paralelo á la mediana es tres veces la distancia del punto de aplicación al lado perpendicular más próximo, y la presión máxima es el doble de la media correspondiente á dicho rectángulo.

$$R_{máx} = \frac{2P}{3db}. \qquad [7]$$

En los casos 1.º, 2.º y 3.º toda la sección se halla comprimida, y se dice que la fuerza obra dentro del *núcleo central*. En el 4.º, sólo una parte de la sección se utiliza para resistir á la fuerza, y se dice que ésta obra fuera del núcleo central. En los tres primeros casos la presión máxima varía entre el valor de la presión media y el doble de ésta. En el cuarto la presión máxima es siempre mayor que el doble de la media correspondiente á toda la sección, y aumenta rápidamente cuando el punto de aplicación L (fig. 32) se acerca al lado GI, por repartirse toda la presión en rectángulos $J_1 K_1 I G$ cuyo lado IK_1 va siendo cada vez menor. Se deduce de aquí la conveniencia de disponer las dimensiones MN en las fábricas de modo que las resultantes corten á las secciones lo más lejos posible de los paramentos, representados aquí por los lados GI, FH, y que, á ser posible, pasen siempre por dentro del núcleo central.

34. Ejemplos de aplicación.—1.º *Una pila de puente de 3 m. de espesor en la base y 5,50 m. de longitud sostiene un peso que se evalúa en 940.000 kg. ¿Cuál es la presión máxima en la base de la pila?*

Como los empujes de los dos arcos contiguos son iguales y contrarios, la base de la pila sólo resiste el peso de los dos semi-arcos contiguos y su propio peso. Esta suma es 940.000 kg. Además, por efecto de la simetría, dicho peso obra en el centro de gravedad de la pila, y habrá que aplicar la fórmula [1]. De modo que tendremos, expresando el área en centímetros cuadrados, $300 \times 550 = 165.000$

y

$$R = \frac{940.000}{165.000} = 5{,}69 \text{ kg. por cm.}^2$$

Se ha prescindido de la superficie de los tajamares que no están cargados directamente con el peso de las bóvedas, pero, si la pila tiene suficiente altura, puede tenerse en cuenta al calcular la presión en la base.

2.° *Una bóveda tiene en la junta de la clave un espesor de 1,20 m., y resiste un empuje de 68.000 kg. en 1 m. de longitud de cañón. Este empuje está aplicado al tercio de la junta á contar del trasdós. ¿Cuál es la presión máxima, y en qué parte de la junta se ejerce?*

Este problema corresponde al 2.° caso, y la fórmula que se debe aplicar es la [3].

El área de la junta es en centímetros cuadrados $120 \times 100 = 12.000$ cm.² Luego la presión máxima será

$$R_{máx} = 2 \times \frac{68.000}{12.000} = 11{,}33 \text{ kg. por cm.}^2$$

Esta presión se ejerce en la generatriz del trasdós, y la del intradós no sufre presión. La presión media de $\frac{68.000}{12.000} = 5{,}666$ kg. corresponde al punto medio de la junta de la clave.

3.° *Una bóveda elíptica de 40 m. de luz y 12 de flecha tiene un estribo cuyo espesor en la base es de 9,30 m. La componente vertical de la resultante de todas las fuerzas que obran en esta base es de 408.000 kg. (por cada metro de longitud del estribo) y está aplicada á 4,05 m. de la arista exterior del estribo. ¿Cuál es la presión máxima?*

Se observa, en primer lugar, que el centro de gravedad está á 4,65 m. de la arista, y su distancia al punto de aplicación de la fuerza es 0,60 m. Luego dicho punto está en el tercio central, y la fórmula aplicable es la [5], correspondiente al 3.er caso, en la cual $a = 0{,}60$ y $h = 9{,}30$; tendremos, pues,

$$R_{máx} = \frac{408.000}{93.000}\left(1 + \frac{6 \times 0{,}60}{9{,}30}\right) = 6{,}10 \text{ kg. por cm.}^2$$

4.° *Con los mismos datos del problema anterior, pero suponiendo que el punto de aplicación de la fuerza esté á 1,50 m. de la arista exterior del estribo, determínese la presión máxima.*

Como el punto de aplicación de la fuerza está fuera del núcleo central, la fórmula que debe aplicarse es la [7], siendo $d = 150$, $b = 100$ para evaluar el área en centímetros cuadrados; tendremos así

$$R_{máx} = 2 \times \frac{408.000}{3 \times 150 \times 100} = 18{,}14 \text{ kg. por cm.}^2$$

La arista más cargada es, en estos dos casos, la del lado del terraplén, que es la más próxima á la resultante.

Puede observarse en estos ejemplos la gran influencia que ejerce el punto de aplicación de la fuerza en la presión máxima. Así, con los datos de los dos últimos encontramos que, sin variar la fuerza ni la sección de la fábrica, la presión máxima será

$$\frac{408.000}{93.000} = 4{,}39 \text{ kg. por cm.}^2$$

si la fuerza se aplica al centro de gravedad, 6,10 kg. si se aplica á 0,60 m. de dicho punto, 8,78 kg. si se aplica al tercio, y 18,14 kg. si se aplica á la distancia 4,65 — 1,50 = 3,15 m. del centro.

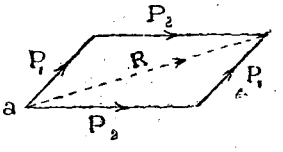
Estos resultados numéricos comprueban, por lo tanto, la conveniencia de que las resultantes pasen lo más cerca posible del centro de gravedad, y de que su punto de aplicación quede comprendido en el núcleo central.

CAPÍTULO IV.

PRINCIPIOS DE LA ESTÁTICA GRÁFICA.

35. COMPOSICIÓN DE FUERZAS APLICADAS Á UN PUNTO Y SITUADAS EN UN PLANO.—Se sabe que si dos fuerzas P_1 y P_2 están aplicadas á un punto a, su resultante R es la diagonal del paralelógramo construído sobre dichas fuerzas (fig. 33). Se ve en la figura que dicha diagonal puede obtenerse dibujando solamente el triángulo superior, ó lo que es lo mismo, trazando desde el extremo de P_1 una paralela á P_2, de la misma longitud y sentido que esta fuerza, y uniendo el origen de P_1 con el extremo de P_2. Observaremos que si se recorre el triángulo en el sentido de las fuerzas, que es el indicado por las flechas, la resultante debe recorrerse en sentido opuesto, es decir, partiendo del origen a.

Fig 33



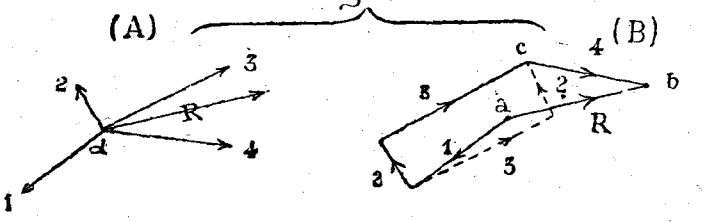
Se deduce de aquí, que, si cambiamos el sentido de R, el punto de aplicación a se hallará en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas. En efecto, las fuerzas P_1 y P_2 equivalen á la R con el sentido indicado en la figura. Luego, si cambiamos el sentido de R, el sistema será equivalente al de dos fuerzas R iguales y opuestas, aplicadas al punto a, y, por lo tanto, se harán equilibrio. Obsérvese que en este caso obtenemos un contorno cerrado.

Puede verse también que, en vez de valernos del triángulo superior para obtener la resultante, podemos servirnos del inferior; esto

equivale á trazar la recta P_1 á continuación de la P_2, y nos indica que el orden en que consideremos ambas fuerzas es indiferente, llegándose en ambos casos á la misma resultante.

Consideremos ahora (fig. 34 A) un grupo de varias fuerzas

Fig 34



1, 2, 3, 4, aplicadas á un punto α. Es evidente que podríamos obtener la resultante, componiendo, por la regla anterior, la *1* con la *2*, la resultante de ambas con la *3*, y esta resultante con la *4*. Pero verificando así la composicion, se obtendría una figura muy confusa, sobre todo si el número de fuerzas fuese considerable.

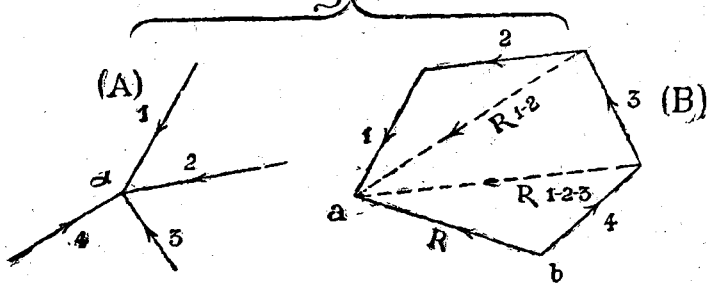
Para evitarlo, se hace el trazado en una figura aparte (B). Desde un punto cualquiera *a*, trazaremos la fuerza *1* igual, paralela y del mismo sentido que la que está aplicada al punto α considerado; desde el extremo de la *1*, trazaremos una paralela igual á la *2*, y de este modo tendremos, cerrando el triángulo, la resultante de ambas. Pero siendo nuestro objeto obtener la resultante de las cuatro fuerzas, no es menester trazar esta primera resultante; el resultado será el mismo trazando desde el extremo de la *2* la paralela á la *3* con su dirección, magnitud y sentido; uniendo el punto *a* con el extremo de la *3*, tendríamos la resultante de las tres primeras fuerzas, pero tampoco necesitamos trazarla; por dicho extremo trazaremos la fuerza *4*, y uniendo el punto á su extremo *b*, obtendremos la resultante buscada *R*, cuyo sentido es de *a* á *b*, es decir, contrario al de las componentes *1, 2, 3, 4.*

Conocemos así la resultante en cuanto á su magnitud, dirección y sentido, y para tener su posición habrá que aplicarla al punto α de la figura (A), trazando desde dicho punto una paralela sobre la que se tomará la longitud *a b*, señalando el sentido con una flecha.

En la figura (B) se han representado de puntos las fuerzas *2* y *3* invertidas, es decir, colocando la *3* á continuación de la *1* y la *2* á continuación de la *3*. Se ve que la resultante de las tres primeras fuerzas es *a c* en ambos casos, y, por consiguiente, esta alteración no influye en la resultante final. Se sigue de aquí que pueden invertirse siempre dos fuerzas contiguas, y, por lo tanto, llegar, repitiendo esta operación varias veces, á colocar las componentes en un orden cualquiera, sin que por ello se altere la resultante.

Consideremos el caso de la figura 35. Según la observación ante-

Fig. 35



rior, podremos obtener la resultante de las dos primeras fuerzas llevando la *2* á continuación de la *1*, pero de modo que el contorno debe recorrerse en el sentido *2, 1;* del mismo modo llevaremos á continuación las fuerzas *3* y *4*, y obtendremos la resultante *R* de las *4* fuerzas, cuyo sentido es de *b* á *a*. Las diagonales R_{1-2} y R_{1-2-3} serán las resultantes parciales de las dos primeras fuerzas, y de las tres primeras respectivamente.

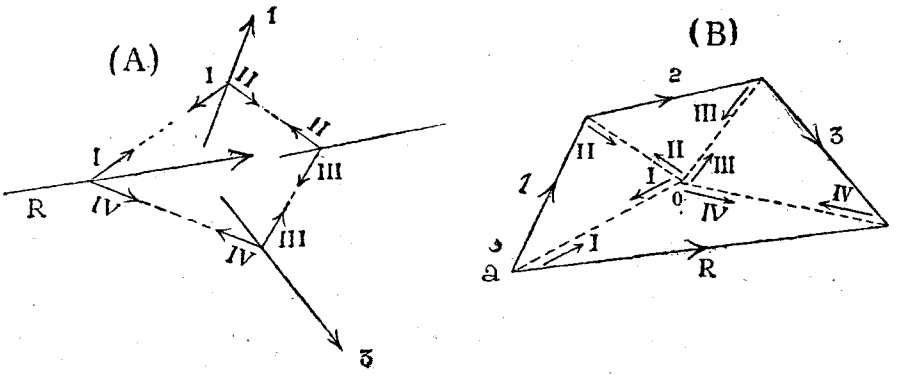
Haremos notar una diferencia importante entre los casos representados por las figuras 34 y 35. Si suponemos que las fuerzas se transmiten á los puntos de aplicación α por el intermedio de barras cuyos ejes coincidan con las rectas *1, 2, 3, 4*, en el caso de la figura 34, dichas barras *tiran* del punto α y obran por tensión, pudiendo entonces ser reemplazadas por cuerdas ó cables. En el caso de la figura 35 las barras *empujan* ú *oprimen* al punto α, y, por lo tanto, obran por compresión, debiendo ser necesariamente barras rígidas.

En todas las aplicaciones de la estática gráfica se verifica en una

figura aparte (B) la composición de las fuerzas. Dicha figura recibe el nombre de *polígono de las fuerzas.*

36. Composición de fuerzas cualesquiera en un plano.—Definición del polígono funicular.—Consideremos (fig. 36 A) un sis-

Fig. 36.



tema de fuerzas *1*, *2*, *3* que no concurren en un punto. Tracemos el polígono de las fuerzas en (B), y obtendremos, como en los casos anteriores, la resultante *R* en dirección, magnitud y sentido. Pero, para encontrar su posición, deberíamos prolongar las fuerzas *1* y *2* hasta su encuentro, trazar en la figura (A) la paralela á la resultante de *1* y *2*, y encontrar la intersección de esta resultante con la fuerza *3*. Esta construcción se puede reemplazar por otra mucho más cómoda y elegante, como vamos á ver.

Tomemos arbitrariamente un punto *o* en el plano del polígono de las fuerzas, y unamos dicho punto con los vértices del polígono por medio de los radios vectores I, II, III y IV. En el triángulo formado por las rectas *1*, I, II, podemos equilibrar la fuerza *1* por las dos componentes II y I en el sentido indicado por las flechas representadas en el interior del triángulo que consideramos. Si, desde un punto cualquiera de la fuerza *1* en la figura A, trazamos paralelas á I y II y tomamos las magnitudes correspondientes iguales á los lados I y II del triángulo de la fig. B, quedará equilibrada dicha fuerza.

Repitamos el mismo razonamiento en el triángulo *2*–III–II (fig. B). Las fuerzas III y II en el sentido de las flechas interiores del trián-

gulo dan una resultante igual y opuesta á *2*. En la figura A, prolonguemos el lado II hasta su intersección con la fuerza *2*, y apliquemos á dicho lado y al paralelo á III trazado por dicho punto, las fuerzas II y III. La fuerza *2* quedará equilibrada.

En el triángulo *3*-IV-III, repitamos la misma operación que en los anteriores; las fuerzas IV y III en el sentido de las flechas harán equilibrio á *3*, y, en la figura (A), aplicaremos estas fuerzas sobre el lado III ya trazado, y en el punto de su encuentro con *3*, y la IV en una paralela al radio vector IV (fig. B) trazada desde el punto de encuentro con el lado III de la fig. A.

En resumen, vemos que lo que hemos hecho hasta ahora es reemplazar la fuerza *1* por las I-II que dan una resultante igual y contraria, la *2* por las II-III, y la *3* por las III-IV. Luego el sistema de las fuerzas I-II, II-III y III-IV (fig. A) es equivalente y de sentido contrario al de *1*, *2*, *3*.

En la misma figura se ve que las II-II y las III-III se destruyen como iguales y opuestas, y quedan únicamente las I-IV cuya resultante, igual y opuesta á la buscada, se halla aplicada en su punto de intersección, y el problema queda resuelto.

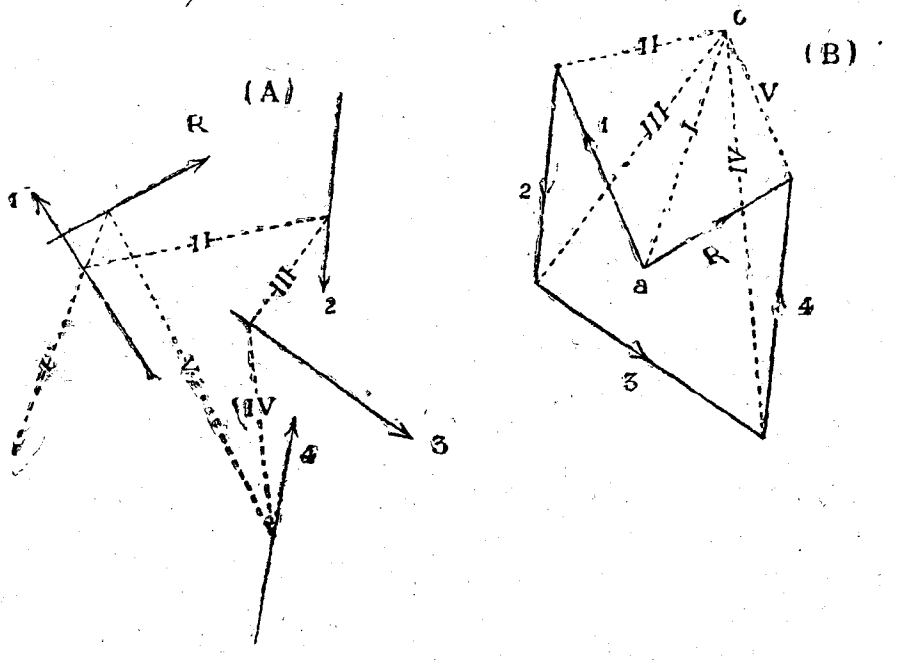
Se observa que, si en dicho punto y sobre los lados I y IV, aplicamos las componentes correspondientes, dadas por las diagonales de la fig. B y cambiamos el sentido de la resultante *R*, el sistema de las fuerzas *1*, *2*, *3*, *R* se hallará en equilibrio, y el de las fuerzas aplicadas al polígono I-II-III-IV, que es equivalente y de sentido opuesto al anterior, también se hallará en equilibrio. Además, los dos sistemas superpuestos también constituyen un sistema en equilibrio, por lo que acabamos de decir.

El polígono cerrado I-II-III-IV recibe el nombre de *polígono funicular*, porque si suponemos que dicho polígono sea un cordón, quedará en equilibrio afectando esa forma bajo la acción de las fuerzas *1*, *2*, *3* y la igual y opuesta á *R*. El punto *O* se denomina *polo* del polígono funicnlar; como este punto se ha elegido arbitrariamente, se pueden trazar para cada sistema de fuerzas infinitos polígonos funiculares, y es evidente que los lados éxtremos correspondientes á los I y IV se cortan sobre la recta *R*. Se puede comprobar su dirección trazando dos polígonos funiculares.

Repitamos esta construcción con las fuerzas *1*, *2*, *3*, *4* de la figura 37, prescindiendo de los razonamientos que nos han servido para la demostración.

Desde un punto cualquiera *a* (fig. B), trazaremos el polígono de las fuerzas *1*, *2*, *3*, *4*, llevándolas unas á continuación de otras con

Fig. 37



su dirección, magnitud y sentido, y cerraremos el polígono por medio de la resultante *R*.

Tomaremos como polo el punto *O*, y lo uniremos á los vértices del polígono de las fuerzas empezando por el *a*, y numerando estos radios vectores con números romanos para distinguirlos de las fuerzas dadas.

Trazaremos el polígono funicular (fig. A) por medio de paralelas á estos radios vectores empezando por el lado I cuya posición es arbitraria y debe terminar en su intersección con la fuerza 1. Desde este punto trazaremos la II paralela al radio vector del mismo nombre en la fig. B hasta que encuentre á la fuerza *2*. Desde este punto se trazará la paralela á la III hasta su encuentro con la fuerza *3*, y luego la paralela á IV hasta encontrar á la fuerza *4*. Desde

su intersección se trazará la paralela v al radio vector correspondiente y se prolongará hasta su encuentro con el lado 1 que será el punto de aplicación de la resultante.

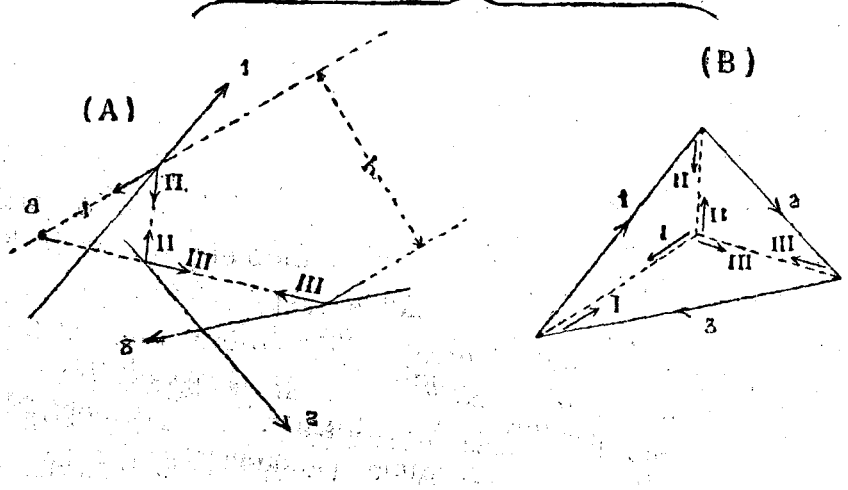
Esta construcción es la base de todas las aplicaciones de la Estática gráfica. Rogamos al lector que la estudie por primera vez, que la repita variando los datos hasta poseer á la perfección su mecanismo, repitiendo, después de ejecutadas las construcciones, los razonamientos de la demostración para penetrarse bien de su fundamento.

37. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS SITUADAS EN UN PLANO.—Si las fuerzas están aplicadas á un mismo punto, como en las figuras 34 y 35, bastará, para que el sistema esté en equilibrio, que la resultante sea nula, y para ello es necesario y suficiente que el polígono de las fuerzas sea cerrado, siendo el mismo el sentido de todos sus lados. Así, en las figuras citadas, sería necesario cambiar el sentido de *R* para que el sistema estuviera en equilibrio.

Pero cuando las fuerzas están aplicadas á distintos puntos, esta condición, que es necesaria, no es suficiente, porque el sistema puede reducirse á un par.

Sea el sistema *1*, *2*, *3* (fig. 38). Repitamos las construcciones y

Fig. 38



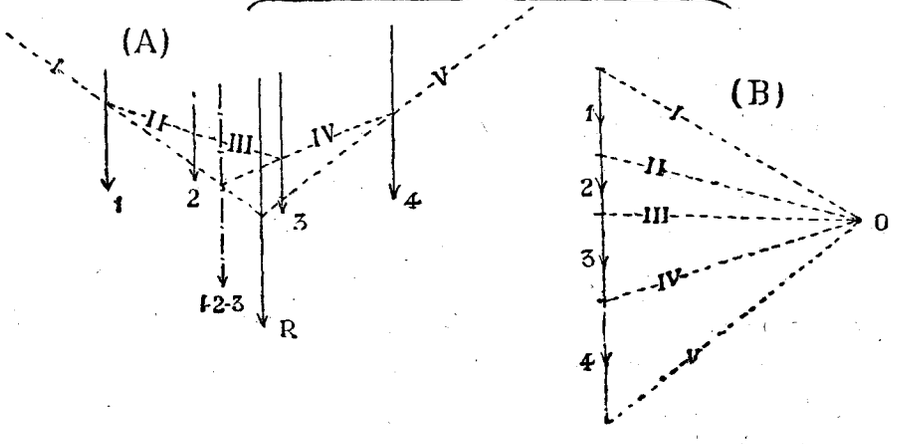
razonamientos relativos al trazado del polígono funicular. Vemos, desde luego, que el polígono de las fuerzas es cerrado. Las fuer-

zas II–II y las III–III se destruyen como iguales y opuestas, pero vemos que las I–I del polígono funicular (fig. A) no están aplicadas en la misma recta, sino en dos rectas paralelas, y constituyen un par cuyo brazo de palanca es *h*. El sistema no está, por consiguiente, en equilibrio, y se ve fácilmente que para ello sería necesario que la fuerza *3* estuviera aplicada al punto *a* de encuentro de los lados extremos I y III del polígono funicular.

Luego es preciso, en este caso, que sea también cerrado el polígono funicular.

38. COMPOSICIÓN DE FUERZAS PARALELAS.—Un caso muy importante en la práctica es el de las fuerzas paralelas, por ser frecuente que las fuerzas exteriores que obran sobre el sistema de barras que se trata de proyectar se reduzcan á pesos. Consideremos (fig. 39) las

Fig. 39



fuerzas verticales *1*, *2*, *3*, *4*, á las que vamos á aplicar el procedimiento del polígono funicular para hallar su resultante. El polígono de las fuerzas (fig. B) resulta, en este caso, una vertical igual á la suma de las fuerzas dadas. Tomando el punto *o* como polo, trazaremos, como siempre, los radios vectores I–II–III–IV–V, y luego, en la figura (A), los lados correspondientes del polígono funicular, paralelos á los radios vectores de la figura (B), prolongados hasta los encuentros sucesivos con las fuerzas dadas *1*, *2*, *3*, *4*. La resultante *R*, cuya magnitud, dirección y sentido conocemos, pasará por el punto de intersección de los lados I y V del polígono funicular en la

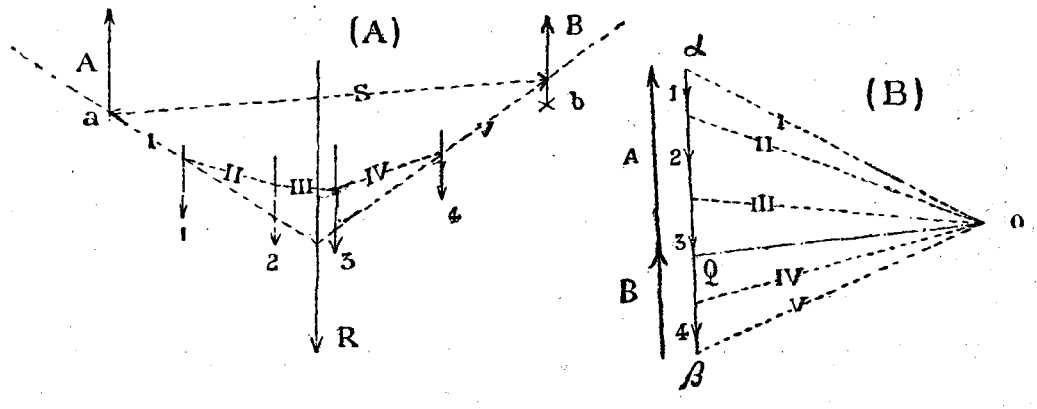
figura (A), y, por lo tanto, queda completamente determinada. Las resultantes parciales se hallan con igual facilidad; si queremos conocer el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas *1*, *2* y *3*, bastará prolongar el lado IV hasta su encuentro con I, como se ha indicado en la figura. En efecto, las fuerzas *1*, *2*, *3* se hallan en equilibrio con las I y IV, como se ve en la fig. B, puesto que forman un triángulo; luego la resultante de *1*, *2* y *3*, debe pasar por el punto de intersección de los lados I y IV, toda vez que la resultante de estas dos ha de estar en equilibrio con la que buscamos.

Del mismo modo, si queremos el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas *2* y *3*, lo hallaremos en la intersección de los lados II y IV, como puede verse observando en el polígono de las fuerzas (B) que las II, *2*, *3* y IV constituyen un polígono cerrado, ó sea un sistema en equilibrio.

39. DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES DE LOS APOYOS.—Otro problema, que se presenta con frecuencia en las aplicaciones prácticas, consiste en la determinación de las reacciones de los apoyos de un sólido ó sistema de barras, al cual están aplicados varios pesos. Hemos resuelto ya este problema por medio de las ecuaciones de la Estática, al estudiar las vigas sometidas á flexión; vamos á ver cómo puede resolverse gráficamente el mismo problema por la consideración del polígono funicular.

Sean *1*, *2*, *3*, *4* (fig. 40) las fuerzas aplicadas al sólido, *a* y *b* sus

Fig. 40.



puntos de apoyo. A estos puntos deberán aplicarse las reacciones de los apoyos A y B, que evidentemente serán verticales, dirigidas de abajo hacia arriba, y cuya suma será igual á la de las fuerzas dadas.

Para determinar las magnitudes A y B, tracemos en *(B)* el polígono de las fuerzas dadas, que se reducirá á una vertical; el polígono se cerrará con la suma de las reacciones de los apoyos, que, llevada hacia arriba desde el punto β, terminará en el origen α del polígono.

Tracemos ahora el polígono funicular relativo á un polo arbitrario o, correspondiente á las fuerzas dadas y á las desconocidas A y B.

Sabemos que el polígono funicular ha de ser cerrado, puesto que el sistema está en equilibrio, y, por lo tanto, el lado desconocido de dicho polígono será el s, que resulta de unir el punto a, de intersección del lado I y la reacción A, con el de intersección del lado V y de la reacción B.

Completado así el polígono funicular, se puede ya trazar el radio vector $O\,Q$ correspondiente á la línea de cierre s del polígono funicular, y el punto Q dividirá á la recta $\alpha\beta$ en dos partes que serán las reacciones buscadas.

Es fácil averiguar cuál de las porciones corresponde á cada apoyo. En el apoyo b concurren las tres fuerzas s, V y B (fig. A), las cuales deben estar en equilibrio; en la figura B corresponden á ellas las OQ, V y βQ que forman un triángulo; luego βQ es la reacción B.

Del mismo modo, en el apoyo izquierdo se equilibran las fuerzas s, I y A, á las que corresponden en el polígono de las fuerzas *(B)*, las OQ, I y $Q\alpha$ que forman triángulo; luego $Q\alpha$ es la magnitud de la reacción A del apoyo izquierdo.

Muy fácil es generalizar esta solución al caso de fuerzas cualesquiera, en que no se conoce desde luego la dirección ni la suma de las reacciones de los apoyos. No lo desarrollaremos, por no ser de frecuente aplicación en la práctica, contentándonos con indicarlo, proponiéndolo como ejercicio á los lectores.

40. Propiedades del polígono funicular.—El polígono funicular goza de propiedades que se estudian en los tratados especiales

de Estática gráfica; pero, no siendo de inmediata aplicación para la redacción de proyectos de puentes metálicos, prescindiremos de ellas (1). Unicamente indicaremos, sin detenernos en su demostración, una que puede servir para obtener comprobaciones. Se enuncia así:

Si se trazan dos polígonos funiculares correspondientes á un mismo sistema de fuerzas con dos polos o y o', los lados I y I', II y II', III y III', etc. de ambos polígonos funiculares, se cortan sobre una recta paralela á la que une los polos o y o'.

Bastan las nociones que preceden para poder determinar las tensiones y compresiones de un sistema de barras como los que constituyen las cerchas de las cubiertas ó las vigas principales de un puente metálico, siempre que sea un sistema determinado, ó lo que es lo mismo, que no contenga líneas inútiles para el equilibrio estático en los puntos en que concurren varias barras, puntos que se llaman *nudos*.

Más adelante estudiaremos su aplicación á los diversos sistemas de uso frecuente en la práctica; pero conviene, desde luego, hacer algunas aplicaciones sencillas para comprender la utilidad práctica de las construcciones gráficas que acabamos de estudiar.

41. Aplicación á una armadura Polloneeau sin tornapuntas. —Consideremos la armadura representada en la figura 41 (A), sobre la cual obra en el vértice c, en que descansa la cumbrera, un peso $2P$. Las reacciones de los apoyos A y B se conocen inmediatamente, y serán dos fuerzas iguales á P dirigidas hacia arriba; se trata de determinar las tensiones ó compresiones de las diversas barras que forman la cercha, distinguiendo la clase de esfuerzo que corresponde á cada una.

Para ello, tracemos en *(B)* el polígono de las fuerzas aplicadas al sistema. Se compondrá de una vertical $2P$ dirigida de arriba hacia abajo, y de dos verticales iguales á P dirigidas en sentido contrario,

(1) No nos referimos aquí á las propiedades relativas al momento flector y á la elástica ó curva que afecta la fibra neutra deformada, cuya utilidad práctica es innegable. Sin embargo, hemos creído conveniente prescindir de ellas por razón del carácter elemental de este libro; más adelante veremos que se pueden calcular gráficamente todos los sistemas usuales de grandes mallas sin recurrir á dichas propiedades.

que representan las reacciones de los apoyos y cierran el polígono de las fuerzas exteriores.

El sistema que vamos á seguir se reduce á expresar gráficamente que existe el equilibrio en cada uno de los nudos a, b, c, a' y b'

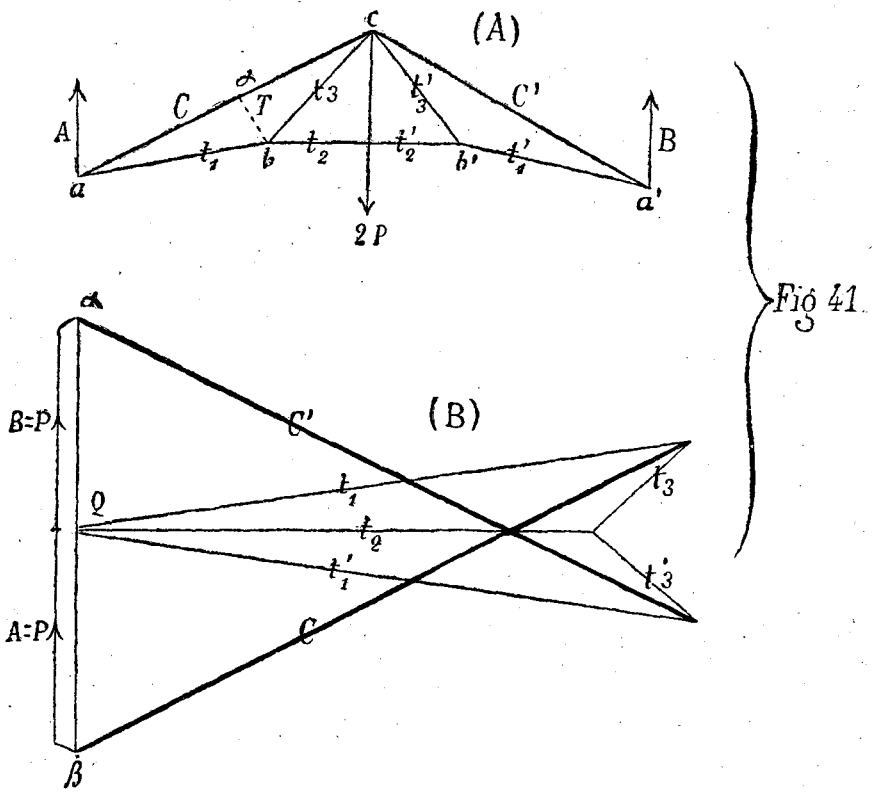


Fig 41

entre todas las fuerzas que concurren en dichos puntos, ya sean fuerzas exteriores, ya tensiones ó compresiones transmitidas por las barras.

Consideremos el nudo a, en el cual concurren la reacción A del apoyo y los esfuerzos C y t_1 de las dos piezas metálicas; los esfuerzos correspondientes habrán de formar en la figura (B) un triángulo que obtendremos trazando desde el extremo inferior β de la fuerza A una paralela á C, y desde su extremo superior Q una paralela á t_1, hasta que se encuentren.

Para averiguar la naturaleza de estos esfuerzos, recorramos este triángulo en el sentido de las fuerzas. La A está dirigida hacia arriba, luego la t_1 deberá recorrerse hacia la derecha y la C hacia la izquierda. En la figura (A) observaremos que, según eso, la t_1 *tira*

del nudo a hacia la derecha, luego la barra correspondiente está sometida á tensión y es un tirante; la C, por el contrario, tiende á *empujar* el punto a hacia la izquierda, y, por lo tanto, el par C de la armadura está sometido á una compresión C, dada por el triángulo de las fuerzas.

Pasemos al nudo b, en el cual obran la tensión ya conocida t_1 y los esfuerzos desconocidos t_2 y t_3 que debemos determinar.

Para ello bastará trazar en *(B)*, por el extremo izquierdo Q de t_1, una paralela á t_2, y por el derecho una paralela á t_3. Las fuerzas t_1, t_2 y t_3 forman un triángulo que expresa que el nudo b está en equilibrio.

Examinemos la naturaleza de los esfuerzos t_2 y t_3. Para ello, observaremos que el tirante t_1 tira del nudo hacia la izquierda; luego si recorremos la t_1 en este sentido, llegaremos á cerrar el triángulo recorriendo los lados t_2 y t_3 de izquierda á derecha. Observando la figura (A) veremos que t_2 *tira* del nudo b hacia la derecha y t_3 *tira* hacia arriba; se deduce de aquí que t_2 y t_3 obran por tensión.

Tenemos ya calculadas las tensiones y compresiones de la mitad izquierda de la cercha, y en rigor, no hace falta más, puesto que la otra mitad es simétrica respecto á la vertical, lo mismo que las fuerzas que obran sobre ella.

Sin embargo, como ejercicio, continuaremos estudiando el equilibrio en los nudos b' y a'. En el nudo b' obra la tensión t_2 ya determinada. Trazando por sus extremos las paralelas á t_1' y t_3' en (B), obtendremos el triángulo $t_2\ t_1'\ t_3'$ simétrico del $t_1\ t_2\ t_3$, y vemos que $t_1' = t_1$ y $t_3' = t_3$, como debe resultar por causa de la simetría del sistema. Fácil es ver que estas fuerzas son tensiones de las barras.

Finalmente, en a' conocemos la tensión t_1' y la reacción B. Cerrando el triángulo obtendremos el lado C' que resultará paralelo al par C' de la figura (A), como es fácil ver. La simetría de los triángulos P, C', t_1' y P, C, t_1 respecto á la horizontal, demuestra que $C = C'$, como estaba previsto. Recorriendo el triángulo de modo que el lado vertical vaya dirigido hacia arriba, se verá que el par C' empuja hacia la derecha al punto a', y, por lo tanto, está comprimido.

Conocidos los esfuerzos que han de desarrollar las diversas piezas, se determinan fácilmente sus secciones con arreglo á lo expuesto en el capítulo I.

Se observará que en cada nudo se han encontrado sólo dos fuerzas desconocidas al estudiar su equilibrio; de este modo, ha bastado, para determinarlas, completar el polígono de las fuerzas ya conocidas, trazando desde sus extremos paralelas á las direcciones de las desconocidas. Este es el carácter distintivo de los sistemas determinados. Si en un nudo concurrieran tres ó más barras cuyos esfuerzos fueran desconocidos, sería imposible determinar sus reacciones, porque el polígono de las fuerzas no quedaría determinado. En este caso se dice que el sistema tiene líneas ó piezas superfluas, que hay que considerar suprimidas al estudiar el equilibrio, fijándose sus secciones por otras consideraciones.

Así, por ejemplo, en la armadura que estudiamos, se agrega, á veces, una pieza vertical que parte del vértice c y viene á ensamblarse en el punto medio del tirante t_2. Esta pieza es innecesaria para el equilibrio del sistema, y, por lo tanto, no puede calcularse como las precedentes. Si consideramos el nudo que forma en su unión con el tirante, veremos que las dos porciones de t_2 con sus tensiones horizontales iguales y opuestas, se equilibran, y la pieza vertical no necesita trabajar para el equilibrio de ese nudo; lo mismo sucede en el nudo superior, donde los dos pares y los tirantes t_3 t_3' aseguran el equilibrio.

Esta pieza vertical tiene únicamente por objeto sostener el punto medio del tirante, que tiende á tomar una flecha bajo la acción de su propio peso. Por esta consideración podría calcularse su sección, pero esto exige ya el conocimiento de la deformación del tirante por flexión producida por su peso, problema que no hemos estudiado. Puede considerarse el tirante horizontal como una viga de dos tramos sometida á su peso propio, y la reacción del apoyo intermedio será la tensión buscada.

Generalmente la armadura que estudiamos lleva una tornapunta T que viene á sostener el punto medio del par, donde obra, por el intermedio de una correa, una parte del peso de la cubierta. En este caso, si después de estudiar el equilibrio del nudo a pasára-

mos al b, encontraríamos tres piezas que son T, t_2 y t_3 cuyas reacciones son desconocidas y no las podríamos determinar. Pero pasando al nudo α donde se reunen los dos tramos del par, la tornapunta y el peso aplicado en dicho punto, sólo hay desconocidas las compresiones correspondientes á la tornapunta y al trozo superior del par, y, por lo tanto, pueden determinarse. Pasando entonces al nudo b, sólo quedan desconocidas las tensiones t_2 y t_3, y no hay dificultad para determinarlas.

42. Aplicación á una viga triangular del sistema Warren.— Consideremos la viga representada en la figura 42 (A), compuesta

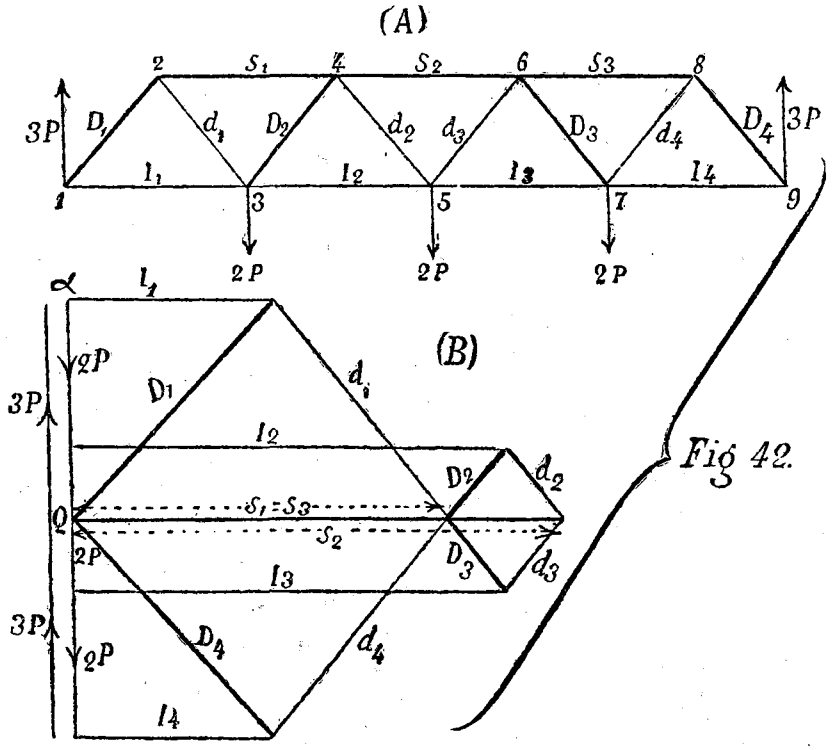


Fig 42.

de las dos cabezas superior é inferior rectas, enlazadas por una serie de barras que forman triángulos isósceles, que recibe las cargas $2P$ en cada uno de los nudos inferiores. Las reacciones de los apoyos serán iguales á $3P$. Las notaciones adoptadas se han inscrito en la figura. Los trozos de la cabeza superior se distinguen con la letra S, los de la inferior con la letra I, las diagonales que bajan desde el centro de la viga hacia los apoyos se llaman D, y d las que descienden de los apoyos hacia el centro. Se distinguen entre sí las barras

que llevan la misma letra por medio de sub-índices, y se han numerado los nudos recorriendo la viga de izquierda á derecha.

Se empieza trazando en (B) el polígono de las fuerzas exteriores que se reduce á una vertical. Desde el punto α se lleva hacia abajo tres veces el peso $2\,P$, y las dos reacciones cuyo valor es $3\,P$, contadas hacia arriba, cierran el polígono, llegando el extremo de la segunda reacción al origen α.

Empezaremos expresando la condición de equilibrio en el nudo *1*, donde se reunen la reacción $3\,P$ del apoyo y las fuerzas D_1, I_1. Para determinarlas, basta trazar por α la paralela á I_1 y por Q la paralela á D_1; para reconocer la naturaleza del esfuerzo de estas barras, recorreremos el triángulo empezando por el lado que representa la fuerza conocida $3\,P$ dirigida hacia arriba; la I_1 se dirige hacia la derecha y es una tensión; la D_1 hacia la izquierda y hacia abajo, empuja al nudo *1*, y, por lo tanto, la barra D_1 está comprimida.

En el nudo *2* concurren la compresión conocida D_1 y las fuerzas S_1, d_1; determinaremos estas trazando por el extremo superior de D_1 la paralela á d_1, y por el inferior la paralela á S_1; la fuerza D_1, que es una compresión, empuja hacia arriba y á la derecha al nudo *2*, luego d_1 debe ser recorrido hacia abajo y hacia la derecha y tira del nudo *2*, es decir, que es una tensión. Siguiendo el contorno en el mismo sentido, S_1 va de derecha á izquierda, empuja al nudo *2*, y es una compresión.

En el nudo *3* conocemos las fuerzas d_1, I_1 y $2\,P$; recorriendo el polígono correspondiente de la fig. B. en este orden, lo completaremos con la paralela á I_2 por el extremo inferior de $2\,P$, y la paralela á D_2 por el de d_1; obtendremos así la tensión I_2 y la compresión D_2.

Pasando al nudo *4*, encontraremos en él las dos fuerzas conocidas S_1 y D_2, y las dos que debemos determinar d_2 y S_2. Las dos primeras se hallan una á continuación de la otra en la fig. B; luego basta completar el polígono por medio de la paralela á d_2 desde el extremo superior de D_2, y la paralela á S_2 desde el extremo Q de la S_1. Fácilmente se verá que d_2 es una tensión y S_2 una compresión. Debe observarse que esta última llega hasta el punto Q, origen del polígono correspondiente al nudo *4*.

Con esto conocemos todas las tensiones y compresiones de las piezas que componen la viga, pues en la otra mitad encontraremos esfuerzos iguales para las piezas simétricas. Sin embargo, se ha trazado la figura completa, y dejamos al lector el cuidado de seguir los razonamientos hasta el fin, comprobando, como lo hemos hecho en el ejemplo anterior, que las barras simétricas sufren esfuerzos iguales y de la misma naturaleza.

En las aplicaciones que acabamos de estudiar, todo el artificio consiste en agrupar las fuerzas de modo que los polígonos de fuerzas correspondientes á los nudos que se van considerando sucesivamente se enlacen entre sí por algunos lados comunes; la figura geométrica que afecta el sistema de barras resulta ser un polígono funicular de las fuerzas exteriores que le están aplicadas.

Este método, notable por su elegancia, se conoce con el nombre de método de las *figuras recíprocas* ó *diagrama de Cremona*. Pero no todos los sistemas se prestan á esta agrupación, áun siendo determinados, y entonces es necesario estudiar el equilibrio de cada nudo con una figura para cada uno; claro está que esta figura será el polígono de las fuerzas, y este procedimiento es aplicable siempre que el sistema sea determinado. Vamos á aplicarlo á un ejemplo.

43. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LAS TENSIONES Y COMPRESIONES EN UNA CERCHA COMPUESTA DE PARES, TIRANTE, PENDOLÓN Y TORNAPUNTAS.—Consideremos la cercha de la figura 43 en cuyos nudos superiores se aplican los pesos *1*, *2*, *3* de la cubierta. Como las fuer-

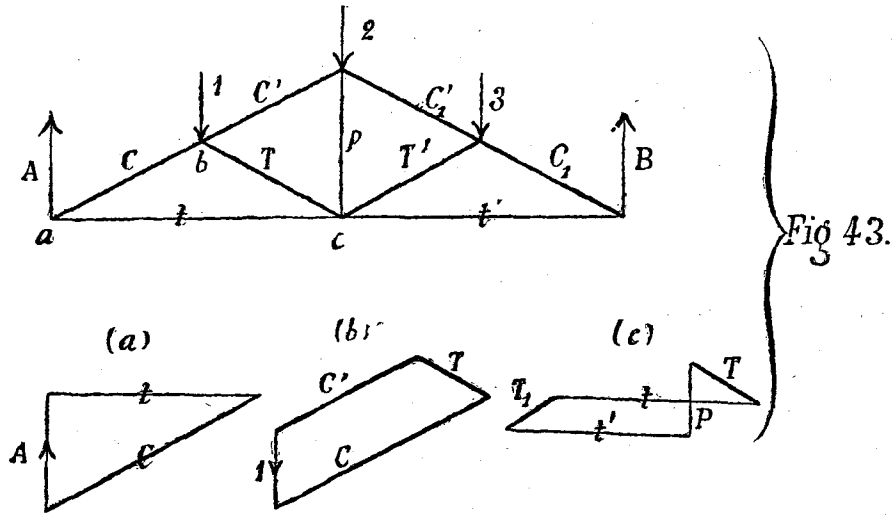


Fig 43.

zas *1* y *3* son iguales, las reacciones *A* y *B* serán desde luego conocidas é iguales á la mitad de la suma de los tres pesos.

Para determinar las fuerzas *C* y *t*, trazaremos en *(a)* el polígono de las fuerzas correspondientes al nudo *a*; partiendo de la reacción *A* del apoyo, que es conocida, podremos trazar por medio de las paralelas á *C* y á *t* el triángulo correspondiente, que nos dará la tensión *t* del tirante y la compresión *C* del par, según resulta de recorrer el triángulo partiendo del origen de la fuerza *A* considerándola dirigida hacia arriba.

Para el nudo *b*, trazaremos en *(b)* el polígono de las fuerzas correspondientes; de las fuerzas que concurren en este punto, son conocidas *1* y *C* que trazaremos en este orden, y completaremos el polígono con la *T* y *C'* respectivamente paralelas á sus correspondientes en la cercha. Partiendo de la fuerza *1* para recorrer el polígono, vemos que esta fuerza está dirigida hacia abajo y la compresión *C* hacia arriba; luego la *T* empuja hacia arriba y hacia la izquierda al nudo *b*, y la *C'* lo empuja hacia abajo y hacia la izquierda; ambas piezas están comprimidas.

Finalmente, en el nudo *c* son conocidas las fuerzas *T* y *t* que ya hemos determinado, y las *T'*, *t'*, que son iguales á las anteriores por la simetría, y sólo queda por determinar la fuerza *p*. Para determinarla, trazaremos el polígono de las fuerzas empezando por la compresión *T*, que empuja al punto *c* hacia abajo, seguiremos con el tirante *t* que tira á la izquierda, la tornapunta T_1 que empuja hacia abajo y á la izquierda, y es igual en magnitud á *T*, el tirante *t'* que tira hacia la derecha y es igual en magnitud á *t*; uniendo los extremos del contorno descrito, encontramos el valor de *p*, que tira del nudo *c* hacia arriba, y es, por consiguiente, una tensión. Es fácil comprobar que su dirección es vertical, como debe suceder.

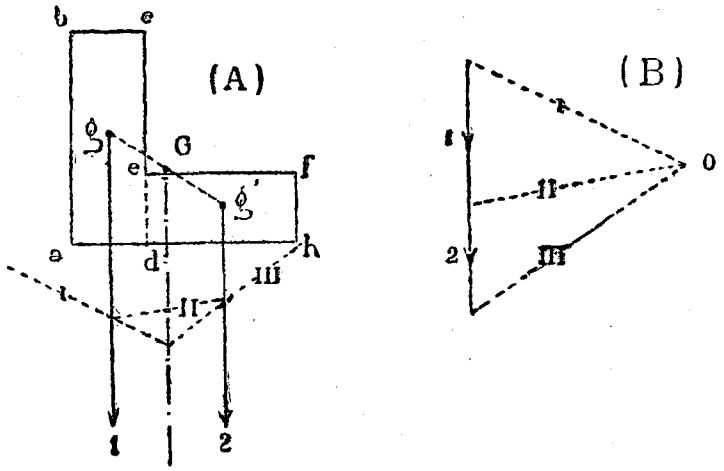
Los esfuerzos C_1 y C'_1 serán respectivamente iguales á *C* y *C'* á causa de la simetría.

44. APLICACIÓN DE LA COMPOSICIÓN DE FUERZAS POR MEDIO DEL POLÍGONO FUNICULAR Á LA DETERMINACIÓN DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD DE FIGURAS IRREGULARES.—Se sabe que para hallar el centro de gravedad de una figura irregular terminada por líneas rectas, hay que descomponerla en figuras geométricas, cuyos centros de

gravedad sean conocidos, y luego componer entre sí fuerzas proporcionales á las áreas de las figuras parciales aplicadas á sus respectivos centros de gravedad, para hallar el punto de aplicación de la resultante, que es el centro de gravedad buscado. La composición de las fuerzas paralelas se puede hacer cómodamente por medio de la construcción geométrica del núm. 38.

Supongamos que se trata de hallar el centro de gravedad de la sección de un hierro de ángulo (fig. 44) que puede descomponerse

Fig. 44.

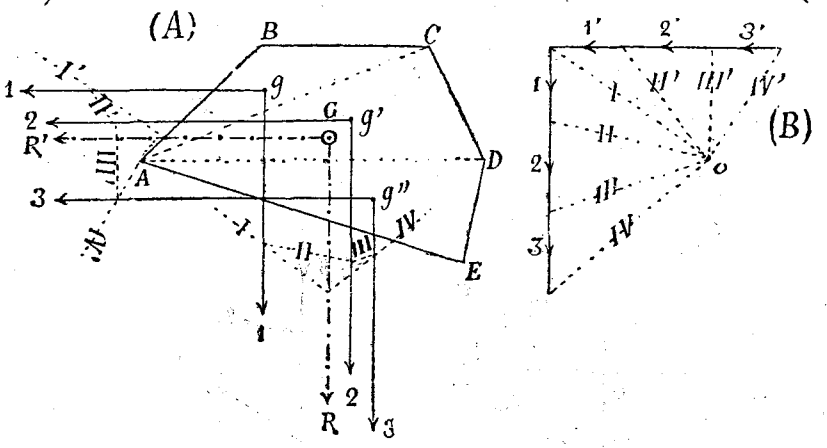


en los dos rectángulos *abcd* y *efhd* cuyos centros de gravedad *g* y *g'* se hallan inmediatamente, puesto que coinciden con los centros de figura. El centro de gravedad *G* que buscamos debe hallarse en la recta *gg'*, y, además, en la resultante de dos fuerzas *1* y *2* proporcionales á las áreas de dichos rectángulos y aplicadas en sus centros de gravedad respectivos. El problema se reduce á hallar la resultante de *1* y *2*. Para ello nos valdremos de un polígono funicular cualquiera; trazaremos en *(B)* el polígono de las fuerzas *1* y *2*, y desde un polo arbitrario *o*, trazaremos los radios vectores *I*, *II*, *III*. En la figura (A) trazaremos los lados correspondientes del polígono funicular, y en la intersección de *I* y *III* tendremos un punto de la resultante. Trazando por dicho punto una paralela á la dirección de las fuerzas *1* y *2*, tendremos la resultante que corta en *G* á la recta *gg'*. Este punto *G* será el centro de gravedad buscado.

Si no se conoce, desde luego, una recta en la cual debe estar situado el centro de gravedad, bastará obtener dos resultantes correspondientes á dos direcciones cualesquiera de las fuerzas, y su intersección será el centro de gravedad que se busca.

Sea un polígono *A B C D E* (fig. 45 A), cuyo centro de gravedad

Fig 45.



queremos hallar; lo descompondremos, por medio de las diagonales *A C* y *A D*, en tres triángulos cuyos centros de gravedad hallaremos por el procedimiento conocido. Sean *g*, *g'*, *g''* dichos centros de gravedad; á ellos se aplicarán fuerzas paralelas proporcionales á las áreas de los triángulos *A B C*, *A C D* y *A D E*. Sean *1*, *2*, *3* estas fuerzas. Para componerlas, tomaremos el polo *o* (fig. B), trazaremos el polígono de las fuerzas *1*, *2*, *3* y el funicular correspondiente, que nos dará la resultante *R* que pasa por el punto de intersección de los lados extremos I y IV. En dicha resultante debe hallarse el centro de gravedad.

Pero, como la dirección de las fuerzas es arbitraria, también se hallará en la resultante *R'* de las mismas fuerzas tomadas en otra dirección cualquiera, la horizontal, por ejemplo, y aplicadas á los mismos puntos *g*, *g'* y *g''*. Sean *1'*, *2'* y *3'* estas fuerzas. Formemos el polígono correspondiente en la figura (B), y valiéndonos del mismo polo *o*, tracemos los radios vectores correspondientes y el polígono funicular I–II'–III'–IV'. La resultante *R'* pasará por la intersección de I' con IV', y en la intersección de las resultantes *R* y *R'* estará el centro de gravedad *G* del polígono.

PARTE SEGUNDA.

CAPÍTULO I.

FÓRMULAS EMPÍRICAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS DIMENSIONES DE LOS ELEMENTOS DE UN PUENTE DE FÁBRICA.

45. ELEMENTOS PRINCIPALES DE UN PUENTE DE FÁBRICA.—Para el objeto de determinar las dimensiones de que depende la estabilidad de la obra, un puente de fábrica se reduce á una serie de apoyos que sostienen bóvedas en cañón sobre las cuales se establece el camino. Vamos á tratar de fijar los elementos geométricos que definen el perfil transversal de los apoyos y de las bóvedas.

No existe un método verdaderamente científico para resolver este problema directamente. La Mecánica aplicada sólo suministra los medios de estudiar las condiciones de estabilidad de un perfil dado; y, por consiguiente, es menester admitir provisionalmente un perfil de ensayo deducido de la experiencia, al cual se aplican las consideraciones teóricas de la Mecánica; estas hacen ver las correcciones que deben introducirse en dicho perfil para obtener uno que reuna las condiciones de seguridad y economía necesarias. Conviene, pues, empezar el estudio de los puentes de fábrica por el del trazado geométrico del perfil de ensayo y de las fórmulas y reglas empíricas usuales que sirven para definirlo.

46. DIVERSAS CLASES DE BÓVEDAS EMPLEADAS EN LOS PUENTES.—Siendo siempre bóvedas en cañón las que se usan en los puentes, la forma de la sección recta del intradós sirve para clasificarlas. A tres se reducen estas formas, el medio punto, el arco escarzano y el elíp-

tico ó carpanel. El primero es un semi-círculo; el segundo una porción de arco de circunferencia menor que 180°; el elíptico es media elipse cortada por su eje mayor, y el carpanel medio óvalo compuesto de arcos de círculo tangentes entre sí.

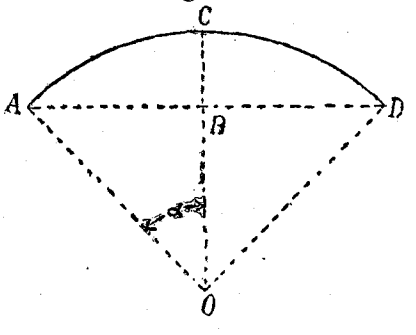
Se empieza por fijar la luz y la flecha del arco por consideraciones que se indicarán más adelante. Cuando es posible aumentar suficientemente la flecha, se adopta el arco de medio punto. Pero, cuando se trata de arcos de puentes cuyas luces no sean muy pequeñas, esto conduce ordinariamente á elevar demasiado la rasante, lo cual es muy costoso; y, por lo tanto, dándole la elevación extrictamente necesaria, resulta el arco más ó menos rebajado.

El rebajamiento es la relación de la flecha á la luz, y nunca debe ser menor de $^1/_{12}$.

Cuando se halla comprendido entre $^1/_5$ y $^1/_{12}$, se adopta un arco escarzano.

Para rebajamientos comprendidos entre $^1/_3$ y $^1/_5$ se suele adoptar la elipse ó el arco carpanel. Sin embargo, en España, es frecuente emplear el arco escarzano para rebajamientos comprendidos entre $^1/_4$ y $^1/_5$, y con razón, á nuestro juicio, pues su construcción es más sencilla, y no produce el mal efecto que se le atribuye sino cuando el rebajamiento se acerca á $^1/_3$.

Fig. 46.



Prescindiremos del trazado de los arcos carpaneles, limitándonos á fijar los elementos geométricos del escarzano.

Suponiendo conocidas la flecha $f = BC$ y la luz $l = AD$, hace falta determinar el radio R y el ángulo en el centro ó su mitad α (fig. 46). El triángulo rectángulo OAB da la relación

$$R^2 = \frac{l^2}{4} + (R - f)^2 = \frac{l^2}{4} + R^2 - 2Rf + f^2;$$

de donde se deduce

$$R = \frac{\frac{l^2}{4} + f^2}{2f}.$$

El mismo triángulo da

$$\frac{l}{2} = R \operatorname{sen} \alpha;$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{l}{2R} = \frac{f\,l}{\frac{l^2}{4} + f^2}.$$

Esta última permite calcular el ángulo en el centro y el desarrollo del arco, que es necesario conocer para subdividirlo en dovelas.

Todos los elementos geométricos necesarios para definir el arco quedan así determinados.

El cuadro siguiente da los valores del ángulo α y del desarrollo del arco, siendo el radio la unidad, para todos los rebajamientos $\frac{1}{n}$ en que n es entero, dentro de los límites en que se emplea el arco escarzano.

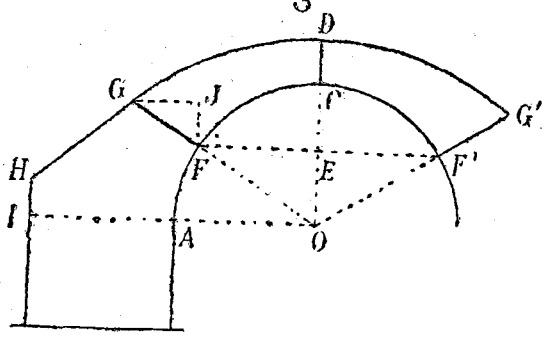
Rebajamientos.	Valor de sen α.	Valor de α.	Desarrollo para $R = 1$.
$^1/_3$	0,92308	67° 23′	1,1761
$^1/_4$	0,80000	53° 8′	0,9273
$^1/_5$	0,68965	43° 36′	0,7515
$^1/_6$	0,60014	36° 53′	0,6437
$^1/_7$	0,52830	31° 53′	0,5565
$^1/_8$	0,47060	28° 4′	0,4898
$^1/_9$	0,42353	25° 3′	0,4372
$^1/_{10}$	0,38461	22° 37′	0,3853
$^1/_{11}$	0,35200	20° 37′	0,3504
$^1/_{12}$	0,32428	18° 55′	0,3301

47. Trazado del perfil de ensayo.—Una vez trazada la curva del intradós, se procede á completar el perfil de ensayo. Distinguiremos dos casos: 1.°, que el arco sea de medio punto, elíptico ó carpanel; y 2.°, que sea escarzano.

En ambos casos se empieza por fijar el espesor en la clave por medio de las fórmulas empíricas que daremos á continuación, y

llevando sobre la normal al intradós en la clave este espesor, obtendremos un punto de la curva de trasdós. Luego se traza la junta de rotura, que más adelante definiremos; por ahora basta saber determinar prácticamente su posición. En el primer caso, es decir, en los arcos de medio punto y en los elípticos ó carpaneles, se toma el punto medio E de la flecha, y por él se traza la horizontal EF (fig. 47). La junta FG es la de rotura. Para obtener un punto del trasdós situado en ella, generalmente se toma una longitud FG, doble del espesor en la clave. Otras veces se lleva sobre la vertical del punto F la magnitud $FJ = CD$, espesor en la clave; y por el punto J se traza la horizontal que corte á la junta de rotura en G. Ambas reglas dan espesores que difieren poco. Para curva de trasdós se adopta un arco de círculo que pase por los puntos D, G y G', simétrico de G.

Fig 47.

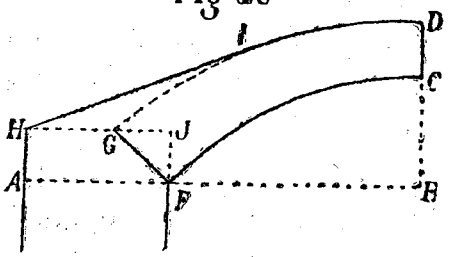


Para completar el trazado del trasdós en la región próxima al apoyo, unas veces se prolonga por la tangente en G al círculo de trasdós hasta su intersección H con el paramento interior del estribo; este paramento se obtendrá determinando el espesor AI del estribo por las fórmulas que estudiaremos, y trazando por el punto I una recta vertical ó con cierto talud. Conviene que el punto H quede por encima de la junta AI de arranque. Si quedase debajo, se trazaría desde el punto I, ó mejor desde otro punto algo más alto tomado en el paramento interior, una tangente al círculo GDG', la cual serviría para completar el perfil del trasdós.

En el segundo caso, de los arcos escarzanos, se considera que la junta de rotura coincide con la de arranque; y así sucede, en efecto, para todos los rebajamientos menores de $^1/_4$. Sobre esta junta se fija el espesor, lo cual puede hacerse de dos maneras. La más sencilla consiste en aplicar la segunda regla indicada para el primer caso,

es decir, tomar en la vertical del arranque la magnitud FJ igual al espesor en la clave, y trazar la horizontal JG (fig. 48). El punto G pertenece al trasdós. Esta regla es aplicable á todos los rebajamientos.

Fig 48



Otras veces se toma la magnitud FG igual al espesor en la clave multiplicado por un coeficiente que depende del rebajamiento, y está comprendido entre 1 y 2. Este coeficicnte es

Para el rebajamiento de	$^1/_4$.....	1,80
—	$^1/_6$.....	1,40
—	$^1/_8$.....	1,25
—	$^1/_{10}$.....	1,15
—	$^1/_{12}$.....	1,10

También coinciden sensiblemente los espesores que dan estas dos reglas. El trasdós se traza haciendo pasar un círculo por los puntos D, G y su simétrico respecto al eje DE. Para enlazar el trasdós con el paramento interior del estribo, se empieza por trazar este paramento después de haber fijado por las fórmulas empíricas correspondientes el espesor FA del estribo. Desde el punto H, en que el paramento encuentra á la horizontal GJ, ó desde otro algo más alto, se traza la tangente HI, y el perfil del trasdós será HID.

Las mismas reglas se aplican para los arcos elípticos ó carpaneles, si su rebajamiento es menor que $^1/_4$.

Tal es el procedimiento que se sigue para trazar el perfil de ensayo. Vemos que, para aplicarlo, es necesario determinar previamente el espesor en la clave y el espesor del estribo, lo cual se hace por medio de diversas fórmulas empíricas deducidas de obras construídas, cuyas condiciones de estabilidad han sido reconocidas como satisfactorias por la experiencia. Pasemos á ocuparnos del estudio y comparación de las más usuales y conocidas.

48. FÓRMULAS EMPÍRICAS DEL ESPESOR EN LA CLAVE PARA ARCOS DE MEDIO PUNTO, CARPANELES Y ELÍPTICOS. — Estas fórmulas hacen

depender el espesor en la clave exclusivamente de la luz. Dada la gran variedad de resistencias que presentan los materiales, y lo indeterminado del problema de la fijación del espesor en la clave, se comprende la dificultad de hacer depender este espesor de la clase de fábrica. Algunas fórmulas hay que tienen en cuenta esta circunstancia, pero no son las más usadas, y el ingeniero debe apreciar el espesor más conveniente dentro de los límites indicados por las fórmulas, teniendo en cuenta la resistencia de los materiales de que puede disponer. Las fórmulas no dan otra cosa que términos medios de los espesores asignados á obras ejecutadas en condiciones diversas, y á veces con espesores muy diferentes para las mismas luces. Si se toman dos ejes rectangulares, y sobre ellos, como abscisas, las luces, y como ordenadas, los espesores en la clave de un cierto número de puentes, se obtiene una serie de puntos aislados. Toda curva definida geométricamente que promedie la región en que aquellos se hallan comprendidos puede servir para fijar los espesores, y la ecuación que la representa es una fórmula empírica más ó menos aceptable, según el criterio que haya presidido á su elección y á la de las obras cuyos términos medios representa. Se comprende, por lo tanto, la gran variedad de fórmulas que existen, y la facilidad con que pueden establecerse otras nuevas.

La forma de la expresión algebraica que representa el espesor en la clave en función de la luz es generalmente muy sencilla, y con arreglo á dicha forma pueden clasificarse las fórmulas.

Las primeras que se han empleado son de forma lineal, correspondiendo á las expresiones

[1] [A] $e = a\,l$; [1] [B] $e = a + b\,l$;

e es el espesor en la clave, l la luz, a y b coeficientes numéricos.

Habiéndose observado que en las fórmulas lineales el espesor crece con demasiada rapidez cuando aumenta la luz, se han propuesto modernamente otras de las formas

[2] [A] $e = a\sqrt{l}$; [2] [B] $e = a + b\sqrt{l}$.

El Ingeniero Sr. Boix ha propuesto en su *Estabilidad de las cons-*

trucciones de mampostería, una fórmula de la forma

$$[3]\ [A] \qquad e = a\sqrt[3]{l}.$$

Puede completarse este grupo con otra de la forma

$$[3]\ [B] \qquad e = a + b\sqrt{l} + c\sqrt[3]{l}$$

cuyos coeficientes determinaremos, justificando la fórmula, lo cual ayudará al lector á formar idea cabal del carácter y significación de estas fórmulas.

Las primeras reglas que se usaron corresponden á la forma [1] *A*; se reducían á tomar para espesor en la clave una fracción sencilla de la luz. Se hacía frecuentemente $a = {}^1/_{15}$ para luces pequeñas. Pero los espesores así determinados llegan á ser excesivos para luces superiores á 16 m., y Gauthey propone $a = {}^1/_{24}$ para luces comprendidas entre 16 y 32 m.

A la forma [1] [B] corresponde la fórmula de Perronet

$$e = 0{,}325 + 0{,}035\ l.$$

Léveillé ha modificado ligeramente los coeficientes para darle una forma más sencilla y más fácil de recordar, adoptando

$$e = \frac{1 + 0{,}1\ l}{3} = 0{,}33 + 0{,}033\ l.$$

Los resultados son sensiblemente iguales en ambas fórmulas.

Gauthey, además de la ya indicada, da fórmulas correspondientes á la forma [1] [B] para las luces inferiores á 16 m. y superiores á 32. Estas fórmulas son

$$\text{Para } l < 16 \qquad e = 0{,}33 + 0{,}021\ l.$$
$$\text{Para } l > 32 \qquad e = 0{,}67 + 0{,}021\ l.$$

A las fórmulas lineales se les ha atribuído el inconveniente de que *e* crece muy rápidamente cuando aumenta *l*, y, por consiguiente, conducen á espesores exagerados para grandes luces.

Para evitar este inconveniente, Dupuit propuso una fórmula parabólica correspondiente á la forma [2] [A]

$$e = 0{,}20 \sqrt{l}.$$

Se le atribuye el inconveniente de dar espesores demasiado pequeños aun para las luces más usadas, y algunos autores sostienen que todas estas fórmulas deben contener una constante, en atención á que el espesor no debe descender de cierto límite por muy pequeña que sea la luz. Aun prescindiendo de este inconveniente, que, á nuestro juicio, no tiene importancia, puesto que no hay necesidad de fórmulas para luces muy pequeñas, es lo cierto que los valores dados por esta fórmula son inferiores á los adoptados en la mayor parte de las obras que se consideran como modelos. Lesguiller adopta una fórmula del tipo [2] [B] que resulta de agregar á la anterior una constante de 0,10 m., con lo que se corrigen los anteriores inconvenientes

$$e = 0{,}10 + 0{,}20 \sqrt{l}.$$

Croizette-Desnoyers propone otra de la misma forma, á saber,

$$e = 0{,}15 + 0{,}15 \sqrt{l}.$$

Para grandes luces da valores aún más pequeños que la de Dupuit.

La fórmula de la forma [3] [A] propuesta por el Sr. Boix es

$$e = \frac{1}{3} \sqrt[3]{l}.$$

Da valores aceptables para las luces medias más frecuentemente usadas, pero para grandes luces, sus resultados son aún más pequeños que los que da la de Dupuit, aproximándose mucho á los de la fórmula de Croizette-Desnoyers.

Hemos determinado los coeficientes a, b, c de la fórmula [3] [B] de modo que los espesores para grandes luces sean intermedios entre los que dan las fórmulas lineales y las que contienen radicales. Para ello hemos adoptado los espesores siguientes

Para $l = 10$ m.	$e = 0{,}70$ m.
» $l = 25$ m.	$e = 1{,}00$ m.
» $l = 80$ m.	$e = 2{,}00$ m.

Si se sustituyen estos valores en la fórmula, se obtiene un sistema de tres ecuaciones de primer grado que determinan *a*, *b* y *c*. La fórmula numérica que resulta es

$$[3]\ [B] \qquad e = 1{,}35 + 0{,}75\ \sqrt{l} - 1{,}40\ \sqrt[3]{l}.$$

Para justificarla basta representar la curva correspondiente en coordenadas rectangulares (fig. 49 y cuadro núm. 3), y en la misma

Fig 49

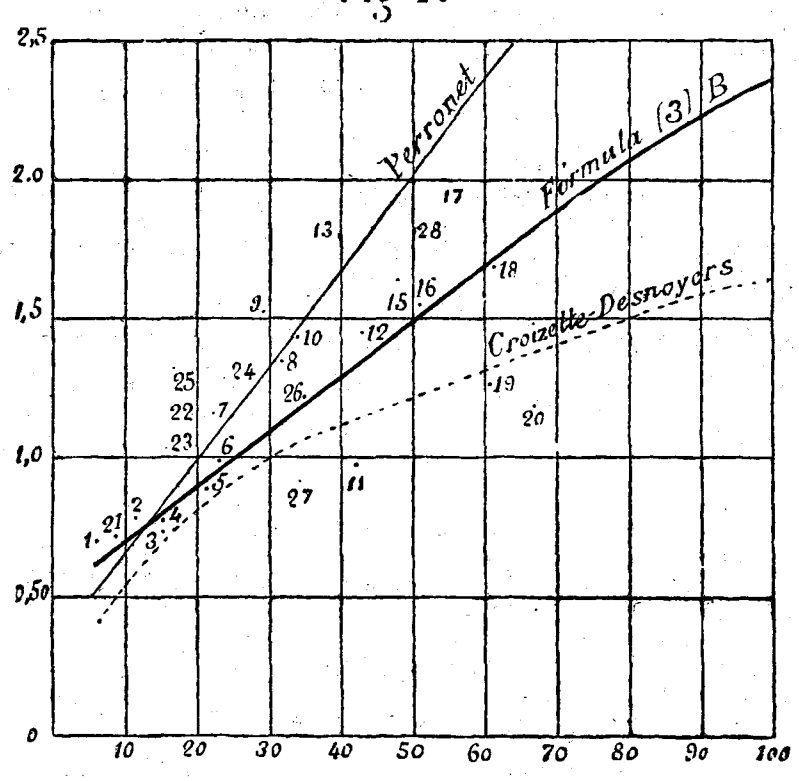


figura las que resultan de las demás fórmulas. Además, se representan, en la figura 49, los puntos aislados que corresponden á las luces y espesores en la clave de 28 puentes construídos, y se ve que la curva promedia la región ocupada por dichos puntos. Es de notar que la fórmula da casi exactamente los espesores adoptados en los puentes de Antoinette y Lavaur de 50 y 60 m. de luz respectivamente, construídos en estos últimos años y esmeradamente estudiados. Cada punto lleva un número de orden que corresponde á los puentes siguientes:

1. Pontón de la colección oficial.
2. Saint Germain de Roanne.
3. Weedon.
4. Saint Michel.
5. Bellecour.
6. Roanne.
7. Tilsitt.
8. Port-de-Pile.
9. Black-Friars.
10. Valtelina.
11. Ponty Pridd.
12. Saint Sauveur.
13. Scrivia.
14. Glocester.
15. Londres.
16. Antoinette.
17. Anibal.
18. Lavaur.
19. Chester.
20. Cabin-John.
21. Viaducto de Herrera.
22. Buniel.
23. Tablete.
24. Júcar.
25. Cabriel.
26. San Juan de las Abadesas.
27. Toulouse.
28. Nogent-sur-Marne.

En la zona de las luces medias, los espesores difieren poco de los que dan las demás fórmulas, y para luces inferiores á 5 m. no es aplicable la fórmula.

La forma casi rectilínea de la curva que la representa indica que se puede sustituir esta fórmula por otra lineal más sencilla.

La fórmula

$$e = 0{,}50 + 0{,}02\, l$$

da resultados muy sensiblemente iguales, y puede reemplazar á la [3] [B] con ventaja.

En el cuadro núm. 3 representamos las curvas correspondientes á las fórmulas más usadas en escala bastante grande para evitar el cálculo, pues se comprende que, dado el carácter de estas fórmulas, es inútil calcular los espesores con gran exactitud. El cuadro da inmediatamente los espesores que asignan las diversas fórmulas, una vez conocida la luz.

Todas estas fórmulas sirven también para calcular el espesor en la clave de los arcos elípticos y carpaneles.

49. Espesores en la clave de los arcos escarzanos.—Dos medios ocurren á primera vista para aplicar á los arcos rebajados las fórmulas anteriores. Se puede considerar que un arco escarzano no es otra cosa que una porción de arco de medio punto cuya luz es el diámetro del arco, y en tal caso podría calcularse el espesor en la

clave reemplazando en las fórmulas la luz por el diámetro. Podrían también aplicarse sin hacer en ellas modificación alguna. De acuerdo con las indicaciones de la teoría, la práctica constante de los constructores ha sido adoptar espesores intermedios entre los obtenidos por estos dos procedimientos; pero hasta estos últimos tiempos no se había examinado bastante detenidamente este problema.

Únicamente Dupuit había dado la fórmula $e = 0{,}15\sqrt{l}$; pero ésta es completamente inadmisible, porque asigna el mismo espesor para todos los rebajamientos, y estos espesores son inferiores á los que corresponden al medio punto de la misma luz, lo cual no puede aceptarse, y es contrario á la práctica constante y á las indicaciones de la teoría.

Croizette-Desnoyers adopta una regla más racional, aplicando la fórmula dada para el medio punto, pero sustituyendo en ella el diámetro del intradós en vez de la luz, y rebajando el coeficiente numérico del radical cuando disminuye el rebajamiento. Adopta las fórmulas siguientes, en las que d representa el diámetro.

Para rebajamiento de $^1/_4$....	$e = 0{,}15 + 0{,}15\sqrt{d}$
— $^1/_6$....	$e = 0{,}15 + 0{,}14\sqrt{d}$
— $^1/_8$....	$e = 0{,}15 + 0{,}13\sqrt{d}$
— $^1/_{10}$...	$e = 0{,}15 + 0{,}12\sqrt{d}$
— $^1/_{12}$...	$e = 0{,}15 + 0{,}11\sqrt{d}$

La fórmula del Sr. Boix ofrece la particularidad de aplicarse igualmente al medio punto y á los arcos rebajados, dando valores que se aproximan en muchos casos á los de Croizette-Desnoyers, y á los adoptados en un número considerable de obras importantes. Tomamos de su obra, ya citada, el siguiente cuadro comparativo que lo demuestra.

Cuadro de espesores en la clave para arcos escarzanos.

DESIGNACIÓN DE LA OBRA.	Luz.	Flecha.	Radio.	ESPESOR EN LA CLAVE.		
				Adoptado.	Fórmula de Croizette.	Fórmula de Boix.
Puente de Mélizey.....	11,40	1,50	11,58	0,60	0,77	0,75
» Brunswick.....	11,62	1,57	11,54	0,63	0,77	0,76
» Couturette.....	13,00	1,86	12,28	0,90	0,82	0,78
» Wiperfurth.....	14,13	3,53	8,83	0,78	0,78	0,80
» Nemours.....	16,20	1,11	30,84	0,97	0,93	0,84
» Glasgow.....	17,69	3,35	13,33	0,76	0,89	0,87
» Bendly.....	18,30	6,10	9,91	0,66	0,88	0,87
» Conon.....	19,80	6,60	10,72	0,74	0,84	0,90
» Tilsitt.....	22,84	2,75	25,00	1,10	1,07	0,95
» Plateros (Florencia)..	25,90	4,60	20,45	1,01	1,10	0,99
» Darlaston.....	26,37	4,11	23,25	1,07	1,10	0,99
» Dunkeld.....	27,40	9,10	14,86	0,96	0,97	1,00
» Inválidos.....	31,60	4,10	32,89	1,20	1,20	1,06
» Saint Esprit.....	33,00	8,20	20,70	1,08	1,11	1,07
» Tongueland.....	36,00	11,60	19,77	1,07	1,09	1,10
» Ponty Pridd.....	42,67	10,67	26,65	0,91	1,25	1,16
» Tournon.....	47,80	19,82	24,32	0,85	1,26	1,21
» Chester.....	61,00	12,81	42,73	1,22	1,49	1,31
» Cabin John.....	67,00	18,00	40,17	1,27	1,49	1,35

Reducciones análogas á las admitidas por Croizette-Desnoyers podrían adoptarse para aplicar las demás fórmulas que dan el espesor de los arcos de medio punto. Pero, en resumen, se ve la gran diversidad de criterios con que se han fijado los espesores en la clave, especialmente en el caso de los arcos rebajados, siendo siempre conveniente aplicar varias reglas para evitar exageraciones en más ó en menos, y comparar el espesor adoptado con el de alguna obra ejecutada que se halle en condiciones semejantes. Es esto tanto más necesario, cuanto que las indicaciones de la teoría acerca de este particular son muy vagas y deficientes, como más adelante veremos.

En los puentes para ferrocarriles se adoptan espesores algo mayores que en los de carreteras por ser mayores las cargas. Croizette-

Desnoyers da, para este caso, las siguientes fórmulas, en las que conserva la misma forma que en las anteriores, forzando los coeficientes numéricos.

Medios puntos y arcos elípticos ó carpaneles.. $e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{d}$

Arcos escarzanos...

Rebajamiento de $^1/_4$...	$e = 0{,}20 + 0{,}17\sqrt{d}$
— $^1/_6$...	$e = 0{,}20 + 0{,}16\sqrt{d}$
— $^1/_8$...	$e = 0{,}20 + 0{,}15\sqrt{d}$
— $^1/_{10}$..	$e = 0{,}20 + 0{,}14\sqrt{d}$
— $^1/_{12}$..	$e = 0{,}20 + 0{,}13\sqrt{d}$

La comparación de los resultados de estas fórmulas con las correspondientes á los puentes para carreteras permitirá juzgar del aumento necesario cuando se apliquen las demás fórmulas que hemos indicado.

El trazado del trasdós se lleva á cabo por las reglas expuestas anteriormente, fijando el espesor en la junta de rotura del mismo modo que en los puentes para carreteras.

50. Determinación del espesor de los estribos. — Para determinar el espesor de los estribos se emplean también fórmulas empíricas que, como las anteriores, no son más que la expresión de términos medios deducidos de cuadros estadísticos de obras construídas. Las más usadas son las de Leveillé y las de Lesguiller que estudiaremos detenidamente; y, para simplificar su aplicación, las reduciremos á cuadros gráficos, con los cuales se podrá determinar el espesor de un estribo sin cálculo alguno.

Las fórmulas de Leveillé son las siguientes:

Arcos de medio punto

$$E = (0{,}60 + 0{,}162\,L)\sqrt{\frac{(h + {}^1/_4\,L)\,0{,}865\,L}{(e + {}^1/_4\,L)\,H}}.$$

Arcos escarzanos

$$E = (0{,}33 + 0{,}212\,L)\sqrt{\frac{h\,L}{H\,(f + e)}}.$$

Arcos elípticos y carpaneles

$$E = (0{,}43 + 0{,}154\ L)\ \sqrt{\frac{(h + 0{,}54\ f) \times 0{,}84\ L}{(e + 0{,}465\ f)\ H}}.$$

E representa el espesor del estribo.

h, su altura desde la base del zócalo hasta el arranque del arco.

L, la luz del arco.

e, el espesor en la clave.

H, la altura de la rasante sobre la base del zócalo.

f, la flecha.

Vamos á prepararlas convenientemente para traducirlas en cuadros gráficos, empezando por la relativa al medio punto. La primera dificultad que se encuentra consiste en que la fórmula contiene cinco variables, y un cuadro gráfico sólo debe contener tres. Para resolver esta dificultad podemos eliminar dos de ellas, eligiendo e y H, que pueden expresarse sencillamente en función de las restantes. Para ello conviene adoptar como expresión de e una fórmula muy sencilla, y hemos elegido la de Gauthier $e = 0{,}042\ L$. Como los espesores que da para luces pequeñas son demasiado pequeños, el valor de E quedará ligeramente aumentado para estas luces, puesto que e entra en el denominador de la cantidad sub-radical; H puede expresarse fácilmente si se adopta para altura de la carga sobre el trasdós de la clave un término medio usual en la práctica. Como aquélla no difiere mucho ordinariamente de 0,50 m., tendremos muy aproximadamente

$$H = h + \frac{1}{2}\ L + e + 0{,}50 = h + 0{,}542\ L + 0{,}50$$

y haciendo estas sustituciones en la fórmula, hallaremos

$$E = (0{,}60 + 0{,}162\ L)\ \sqrt{\frac{0{,}865\ L\ (h + 0{,}25\ L)}{0{,}292\ L\ (h + 0{,}542\ L + 0{,}50)}} =$$

$$= (1{,}03 + 0{,}279\ L)\ \sqrt{\frac{h + 0{,}25\ L}{h + 0{,}542\ L + 0{,}50}}.$$

Así transformada la fórmula, E depende sólo de h y L, y puede

formarse el cuadro núm. 4, representando las diversas curvas correspondientes á valores de L que varían de 2 en 2 m. hasta 30 m. [núm. 22 nota].

El uso de este cuadro es sencillísimo, y bastará un ejemplo para comprenderlo. Supongamos que se quiere averiguar el espesor del estribo para un arco de medio punto de 18 m., siendo la altura del estribo 6 m.

En la escala h buscaremos el número 6, y seguiremos la ordenada correspondiente hasta su intersección con la curva cuya cota es 18. En la escala E vemos que esta intersección corresponde á 4,85 m., que es el espesor buscado. Se comprende que los errores producidos por no ser exactamente los admitidos al transformar la fórmula el espesor en la clave y la altura de la sobrecarga han de resultar despreciables, dado el objeto de esta fórmula, que generalmente no es otro que fijar un punto de partida para un tanteo, á no tratarse de una obra de poca importancia, porque en este caso se puede adoptar definitivamente el espesor dado por el cuadro.

Para reducir á cuadro gráfico la fórmula relativa á los arcos escarzanos, deberemos seguir un procedimiento algo diferente, en atención á que en ella figura una nueva variable f. Al efecto, formaremos dos cuadros diferentes. Eliminaremos e, valiéndonos de la fórmula de Dupuit $e = 0{,}20\sqrt{l}$, y tendremos

$$E = (0{,}33 + 0{,}212\,L)\sqrt{\frac{L}{f + 0{,}20\sqrt{L}}} \times \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Haciendo

$$K = (0{,}33 + 0{,}212\,L)\sqrt{\frac{L}{f + 0{,}20\sqrt{L}}}; \quad \frac{h}{H} = m$$

resultará

$$E = k\sqrt{m}.$$

Formaremos el cuadro núm. 5, que nos dará el valor de K conociendo f y L. Después formaremos el cuadro núm. 6 que nos dará E, una vez conocido K por el cuadro anterior, y $m = \frac{h}{H}$ que será uno de los datos del problema.

Supongamos un arco de 16 m. de luz y 2,80 m. de flecha; la altura del estribo es $h = 5$, la altura de la rasante $H = 9{,}20$ m.

El cuadro núm. 5 nos dará el valor de K correspondiente á $f = 2{,}80$ y á la curva acotada 16; se ve que dicho valor es $K = 7{,}80$.

Buscaremos este valor en la escala horizontal del cuadro núm. 6, y en la vertical correspondiente la recta cuya cota es $m = \frac{5}{9{,}20} = 0{,}55$ (se interpolará á la vista entre la $m = 0{,}50$ y $m = 0{,}60$). A estos valores corresponde en la escala vertical $E = 5{,}70$ m. que es el espesor buscado.

Pasemos al caso de un arco elíptico ó carpanel. Seguiremos un procedimiento análogo al anterior. Adoptando para término medio del espesor en la clave $e = 0{,}042\ L$, el mismo que para el medio punto, la fórmula se transformará del modo siguiente:

$$E = (0{,}43 + 0{,}154\ L)\sqrt{\frac{h + 0{,}54\ f}{H} \times \frac{0{,}84\ L}{0{,}465 f + e}} =$$

$$= (0{,}43 + 0{,}154\ L)\sqrt{\frac{0{,}84\ L}{0{,}465 f + 0{,}042\ L}} \times \sqrt{\frac{h + 0{,}54\ f}{H}} = K\sqrt{m}$$

siendo

$$K = (0{,}43 + 0{,}154\ L)\sqrt{\frac{0{,}84\ L}{0{,}465 f + 0{,}042\ L}};\ \text{y}\ m = \frac{h + 0{,}54 f}{H}.$$

El cuadro núm. 7 da los valores de K, y el núm. 8 los de E.

Sea un arco elíptico de 24 m. de luz y 6 m. de flecha. La altura del estribo es $h = 5$ m., y la de la rasante 12,50; por lo tanto,

$$m = \frac{5 + 0{,}54 \times 6}{12{,}50} = \frac{8{,}24}{12{,}50} = 0{,}65.$$

En el cuadro núm. 7 encontraremos que al punto de intersección de la curva 24 con la ordenada de $f = 6$ corresponde $K = 9{,}40$.

El cuadro núm. 8 hace ver que á los valores $K = 9{,}40$; $m = 0{,}65$ corresponde en la escala vertical $E = 7{,}60$ que es el espesor buscado.

Las fórmulas de Lesguiller son las siguientes:

Arcos de medio punto

$$E = \sqrt{L}\,(0{,}60 + 0{,}04\ h).$$

Arcos escarzanos

$$E = \sqrt{L}\left[0{,}60 + 0{,}04\,h + 0{,}1\left(\frac{L}{f} - 2\right)\right].$$

Arcos elípticos ó carpaneles

$$E = \sqrt{L}\left[0{,}60 + 0{,}04\,h + 0{,}05\left(\frac{L}{f} - 2\right)\right].$$

La fórmula relativa al medio punto se reduce inmediatamente al cuadro gráfico núm. 9, cuya aplicación se comprenderá á primera vista. En la escala horizontal se encuentran los valores de la altura del estribo h, las cotas indicadas para las diversas rectas son las luces, y en la escala vertical se encuentran los espesores correspondientes á los puntos de intersección de aquellas rectas con las ordenadas correspondientes á los valores de h. Así, por ejemplo, á un arco de 22 m. y una altura de estribo de 5 m. corresponderá un espesor de 3,75 m.

Respecto á los arcos escarzanos y los elípticos ó carpaneles, observaremos que las fórmulas constan de los mismos términos que para los de medio punto y un término complementario. Si nos fijamos en la fórmula de los arcos escarzanos y llamamos E al espesor del medio punto de la misma luz, E_1 al espesor del estribo del arco escarzano y K_1 al término complementario, tendremos

$$E_1 = E + K_1 \qquad \text{siendo} \qquad K_1 = 0{,}1\left(\frac{L}{f} - 2\right)\sqrt{L}.$$

Del mismo modo, llamando E_2 y K_2 al espesor del estribo y al término complementario correspondiente á un arco elíptico ó carpanel, tendremos

$$E_2 = E + K_2 \qquad \text{siendo} \qquad K_2 = 0{,}05\left(\frac{L}{f} - 2\right)\sqrt{L}.$$

Bastará, por lo tanto, construir un cuadro que represente los términos K_1 y K_2. Un solo cuadro podrá dar ambos valores puesto que K_1 es doble de K_2. Hemos construído el cuadro que da K_1 término complementario para el arco escarzano, que depende de L y $\frac{L}{f}$. Otra

escala vertical cuyas divisiones sean dobles nos dará el término K correspondiente al arco elíptico ó carpanel.

Consideremos un arco escarzano de 17 m. de luz y 1,70 m. de flecha, con un estribo de 6 m. de altura.

En el cuadro núm. 9 buscaremos el espesor del estribo de un arco de medio punto de 17 m. de luz y 6 m. de altura, que es $E = 3{,}47$ m.

En el cuadro núm. 10 encontraremos el valor de K_1 correspondiente á $\frac{L}{f} = 10$, $L = 17$, que es $K_1 = 3{,}60$. Luego $E_1 = E + K_1 = 3{,}47 + 3{,}60 = 7{,}07$ m., que es el espesor buscado.

Supongamos ahora que, conservando la misma luz y la misma altura del estribo, se trate de un arco elíptico ó carpanel cuya flecha es 4,25 m., y cuyo rebajamiento será, por consiguiente, $\frac{4{,}25}{17} = {}^1/_4$.

Del mismo modo encontraremos en el cuadro núm. 9, $E = 3{,}47$.

El término K_2 lo encontraremos en la escala vertical de la izquierda del cuadro núm. 10 en la horizontal del punto de intersección de la recta $L = 17$ con la vertical del punto $\frac{L}{f} = 4$, leído en la escala horizontal. Este valor es $K_2 = 0{,}40$; luego $E_2 = 3{,}47 + 0{,}40 = 3{,}87$ m.

Las fórmulas de Lesguiller hacen ver que, á igualdad de luz y de rebajamiento, el espesor del estribo debe ser notablemente mayor en un arco escarzano que en el elíptico ó carpanel, lo cual está perfectamente de acuerdo con la teoría. Basta observar que el término complementario K_1 que hay que agregar al espesor del estribo de un medio punto de igual luz para obtener el del arco escarzano, es doble del K_2 correspondiente al arco elíptico ó carpanel de igual luz y la misma flecha.

51. Espesor de las pilas.—Se ha observado que, en las obras en que las dimensiones principales están bien proporcionadas, el espesor de las pilas suele estar comprendido entre ${}^1/_5$ y ${}^1/_7$ de la luz, en los arcos de dimensiones pequeñas. Puede esta proporción servir como regla para las luces pequeñas; cuando estas crecen, el espesor relativo puede decrecer, habiendo llegado en algunos puentes á ${}^1/_{10}$ de la luz; pero se pueden citar muchos puentes de grandes luces en que el espesor de la pila está comprendido entre ${}^1/_6$ y ${}^1/_7$ de la luz.

Otras veces se relaciona el espesor de la pila con el espesor en la

clave de la bóveda, y se considera como un límite inferior el doble del espesor en la clave. Se aumenta generalmente este límite inferior en un cuarto ó un medio de dicho espesor en la clave, de modo que el espesor de la pila será 2,25 *e* ó 2,50 *e*.

Cuando la altura de la pila es de alguna consideración, es menester tenerla en cuenta, y algunos autores dan la regla siguiente, que hace depender exclusivamente de la altura el espesor de la pila,

$$E = \frac{1}{5}\ h + a.$$

siendo h la altura y a una constante que varía entre 0,20 y 0,52 m.

Finalmente, si se quiere tener en cuenta á la vez el espesor en la clave y la altura de la pila, puede emplearse la fórmula

$$E = 2{,}50\ e + \frac{1}{10}\ h.$$

Todas estas fórmulas se aplican á los puentes propiamente dichos. Si se aplicaran las dos últimas á los viaductos de pilas muy elevadas darían espesores excesivos, y en este caso el mejor procedimiento que se puede seguir es la comparación con obras construídas cuyas condiciones se aproximen á las del viaducto que se estudia.

52. Cuadro de las principales dimensiones de algunos puentes.—Todas estas reglas dan una primera aproximación de las dimensiones que han de adoptarse en un proyecto. Deben, sin embargo, completarse haciendo comparaciones con las dimensiones adoptadas en obras ejecutadas, y con este objeto formó Morandière un extenso cuadro cuya utilidad práctica no es necesario encarecer. A continuación insertamos dicho cuadro, variando algo su forma para facilitar las investigaciones, y en él hemos añadido las dimensiones de 42 puentes construídos en España. Esta comparación es indispensable, sobre todo cuando se adoptan definitivamente las dimensiones sin proceder á la comprobación de la estabilidad, como se hace en la práctica tratándose de obras de pequeñas luces. Pero no es recomendable este procedimiento, y siempre que se trate de obras especiales que no se construyen con arreglo á un modelo experimentado previamente, es conveniente comprobar su estabilidad, lo cual puede hacerse con facilidad y brevemente, como se verá en los siguientes capítulos.

Cuadro de las principales dimensiones de algunos puentes.

DESIGNACIÓN DE LA OBRA.	Epoca de la construcción.	Luces de los arcos principales.	Flechas.	Altura de las pilas entre el zócalo y los arranques.	Espesor en la clave.	Espesor de las pilas en los apoyos.	Espesor de los estribos
Arcos de medio punto.							
1 Puente de Nogent-sur-Marne.....	1856	50,00	25,00	0,00	1,80	6,00	9,25
2 » » Céret, sobre el Tech.....	1336	45,00	22,50	»	1,62	»	»
3 » » Napoleón, en S^{t} Sauveur	1861	42,00	21,00	0,00	1,45	»	»
4 » » San Martín de Toledo (ojival).....	1203	40,25	16,50	3,50	2,00	9,00	»
5 » » Orense, sobre el Miño (ojival).....	Edad M.^{a}	39,00	22,00	3,40	1,90	9,30	»
6 » » Almaraz, sobre el Tajo...	Siglo XVI.	38,00	19,00	11,50	1,60	18,00	»
7 » » Têtes, sobre la Durance..	1732	38,00	19,00	0,00	1,62	»	»
8 » » Martorell, sobre el Noya (puente del Diablo) (ojival).....	Edad M.^{a}	38,00	16,30	»	1,60	»	13,00
9 » » San Juan de las Abadesas (ojival).....	Id.	34,00	15,80	»	1,20	»	»
10 » » Córdoba, sobre el río San Juan.....	Siglo XVI.	31,00	15,50	»	2,80	6,20	»
11 » » Alcántara, sobre el Tajo..	997	30,00	15,00	38,50	2,50	8,80	»
12 » » Maligny, sobre el Serin..	»	26,00	13,00	15,00	0,92	»	3,65
13 Viaducto de Hennebont.....	1862	22,00	11,00	14,36	1,05	3,60	9,92
14 Puente de Port-Launay, sobre el Aulne.....	1867	22,00	11,00	33,30	1,20	4,80	20,10
15 Viaducto de Pont-de-Buis.....	1867	18,00	9,00	26,10	1,00	4,00	14,00
16 Puente de Daoulas.....	1867	18,00	9,00	23,40	0,95	3,80	16,90
17 » » Marie, París..... ...	1635	17,65	8,82	2,00	1,30	3,57	8,50
18 » » Cabriel, carretera de Madrid á Valencia.....	1851	16,70	8,35	»	1,25	»	7,00
19 » » Tablete, carretera de Granada á Motril.....	1853	16,70	8,35	»	1,00	»	»
20 » » Tudela, sobre el Ebro.....	1194	15,60	7,80	0,50	0,80	9,00	4,80
21 Viaducto de Morlaix.....	1863	15,50	7,75	44,15	1,25	4,25	8,50
22 Puente de Manse.....	1848	15,00	7,50	24,50	0,90	3,40	16,40
23 » » Lozoya (prov.^{a} de Madrid)	1888	15,00	7,50	3,50	0,85	2,00	4,00
24 Viaducto de Gartempe.....	1854	15,00	7,50	40,00	0,85	5,00	12,00
25 » » Auray.....	1861	15,00	7,50	19,50	0,95	3,30	12,15
26 » » Quimperlé.....	1863	15,00	7,50	22,32	0,90	3,60	15,00
27 Puente de Bayas, línea del Norte....	1859	15,00	7,50	4,00	0,83	2,85	3,15
28 » » Peralta, sobre el Arga....	»	13,80	6,90	0,55	0,50	4,25	»
29 » » San Juan, sobre el Alberche.....	Siglo XII?	13,50	7,75	6,00	0,80	4,00	6,00
30 Viaducto del barranco de la Val-Mala en la línea directa de Barcelona á Zaragoza.	1892	12,00	6,00	13,86	0,80	2,80	4,34
31 Viaducto del barranco de los Massos, en la línea directa de Barcelona á Zaragoza.	1893	12,00	6,00	28,80	0,90	2,70	6,60

DESIGNACIÓN DE LA OBRA.	Epoca de la construcción.	Luces de los arcos principales.	Flechas.	Altura de las pilas entre el zócalo y los arranques.	Espesor en la clave.	Espesor de las pilas en los apoyos.	Espesor de los estribos
32 Puente de Zulema, sobre el Henares.	Siglo XI?	8,50	4,25	3,50	0,60	3,27	5,00
33 Viaducto de Herrera, línea del Norte	1859	8,00	4,00	11,80	0,70	1,60	»
34 Puente del Abroñigal (provincia de Madrid).....	1788	7,50	3,25	1,00	0,60	3,00	4,50
Arcos carpaneles.							
35 Puente del Verona.....	1354	48,73	16,00	0,00	2,00	13,00	»
36 » » Lavaur, sobre el Agout...	1775	48,70	16,81	0,00	3,25	»	16,56
37 » » Gignac, sobre el Hérault.	1807	47,26	»	4,00	1,95	8,40	»
38 » » Vizille, sobre la Romanche	1766	41,90	13,33	0,00	1,95	»	9,75
39 » » Mantes, sobre el Sena....	1765	39,00	11,85	0,00	1,43	7,80	8,77
40 » » Neuilly, sobre el Sena....	1774	39,00	9,70	0,00	1,62	»	»
41 » » Waterlóo, sobre el Támesis	1817	36,60	9,15	»	1,52	6,10	»
42 » » Toulouse, sobre el Garona	1632	34,40	12,70	2,00	0,81	8,12	»
43 » » Orleans, sobre el Loira...	1760	32,50	8,10	0,00	2,11	5,85	7,15
44 » » Port-de-Pile, sobre el Creuse.....	1717	31,60	12,35	0,00	1,30	5,85	»
45 » » Carbonne, sobre el Garona	1770	31,20	12,35	0,00	1,30	6,88	»
46 » » Munich (Baviera).....	1814	31,19	5,20	»	1,30	2,92	9,75
47 » » Rouen.....	1818	31,00	4,20	»	1,45	»	18,00
48 » » Dresde, sobre el Elba.....	1850	28,33	7,36	»	1,18	4,53	»
49 » » Sisteron, sobre el Durance (peraltado).....	1500	26,00	17,50	0,00	0,81	»	»
50 » » Tours, sobre el Loira.....	1762	24,40	8,23	0,43	1,42	4,90	»
51 » » Orleans, sobre el Loira...	1848	24,00	8,00	0,87	1,20	4,00	»
52 » » Plessis-les-Tours.....	1857	24,00	7,10	1,50	1,30	3,00	13,09
53 » » Compiègne, sobre el Oise.	1738	23,40	1,95	6,50	1,46	2,92	5,85
54 » » Roanne, sobre el Loira ...	1789	23,40	8,12	0,00	0,97	4,06	»
55 » » Tullerías, París.....	1689	23,00	7,80	2,00	1,42	4,90	6,17
56 » » Bellecour, Lyon.....	1789	20,80	7,45	0,00	0,81	5,68	6,18
57 » Internacional del Bidasoa....	1860	20,00	6,67	0,00	1,00	2,67	4,05
58 » del Canal de Agen.....	»	20,00	8,00	1,60	0,81	3,60	»
59 Viaducto sobre el Durance.....	1848	20,00	6,66	0,00	1,10	3,50	24,50
60 Puente de Moulins, sobre el Allier..	1764	19,50	6,50	0,97	0,97	3,57	»
61 » » Saumur, sobre el Loira...	1764	19,50	6,50	3,50	1,20	3,90	4,87
62 » » Fronard, sobre el Mosela.	1788	19,50	5,85	0,00	1,14	3,90	10,70
63 » sobre el Guadarrama (provincia de Madrid).....	»	17,05	6,12	0,00	1,27	4,70	10,75
64 » » Santa Engracia (Navarra)	»	16,75	5,80	0,80	1,10	3,80	»
65 » » Buniel, línea del Norte...	1859	16,00	5,33	»	1,10	2,40	4,00
66 » » Larraga, sobre el Arga...	Siglo XVI	12,85	5,70	»	0,70	3,80	»
67 » » Nanclares, línea del Norte	1859	12,50	5,00	4,00	0,75	2,34	»
Arcos elípticos.							
68 Puente de Londres sobre el Támesis.	1831	46,30	11,50	»	1,52	»	»
69 » » Glowcester, sobre el Severn.....	1827	45,57	16,50	»	1,37	»	8,24
70 » » Alma, París.....	1856	43,00	8,20	0,00	1,50	5,00	8,00
71 » » Scrivia, Turín á Génova..	1850	40,00	13,33	0,00	1,80	»	9,50

DESIGNACIÓN DE LA OBRA.	Época de la construcción.	Luces de los arcos principales.	Flechas.	Altura de las pilas entre el zócalo y los arranques.	Espesor en la clave.	Espesor de las pilas en los apoyos.	Espesor de los estribos.
72 Puente de Sault-du-Rhône.....	1827	34,00	9,74	0,00	1,40	»	»
73 » » Luis Felipe, París.....	1862	32,00	8,25	0,75	1,00	4,00	8,00
74 » » Change, París.....	1860	31,60	7,40	1,62	1,00	4,00	11,60
75 » » Port-de-Pile, sobre el Creuse.....	1848	31,00	11,00	0,00	1,30	5,50	22,85
76 Viaducto del Point-du-Jour, París.	1866	30,25	9,00	0,50	1,60	4,72	10,86
77 Puente de Chalonnes, sobre el Loira	1866	30,00	7,50	0,00	1,35	3,50	17,75
78 » » Nantes, sobre el Loira...	1866	30,00	7,50	0,00	1,35	3,50	12,00
79 » » Bercy, París.....	1864	29,00	8,00	»	1,00	4,00	7,50
80 » » Grenoble.....	1839	27,00	6,75	»	1,20	5,00	»
81 » » Burdeos.....	1822	26,49	8,02	»	1,20	4,20	7,00
82 » » Montlouis, sobre el Loira	1845	24,75	7,15	1,45	1,30	3,25	18,00
83 » » Villanueva de Cameros, provincia de Logroño..	1861	22,00	10,30	0,00	1,00	»	6,40
84 » » Cinq-Mars, sobre el Loira	1847	20,00	6,60	2,40	1,20	3,50	11,00
85 » » Cher, en Tours.....	1848	20,00	6,67	0,80	1,00	2,60	14,82
86 » » Chatelleraut, sobre la Vienne.....	1848	20,00	6,67	0,80	1,00	2,60	14,50
87 » » Notre-Dame, París.....	1853	18,76	7,53	1,50	0,90	3,50	»
88 » » Saint-Michel, París.....	1857	17,20	6,68	1,70	0,70	3,00	6,00
89 » » Canal de Digoin.....	»	16,00	7,00	3,00	1,30	3,00	»
90 » » Miranda, sobre el Ebro, línea del Norte.....	1858	15,00	5,25	3,40	0,83	2,60	5,00
Arcos escarzanos.							
91 Puente de Chester.....	1833	61,00	12,81	2,50	1,22	»	»
92 » » Vieille Brioude, sobre el Allier.....	1854	54,20	21,00	0,00	2,27	»	»
93 » » Tournon, sobre el Doux.	1545	47,80	19,82	0,00	0,85	»	»
94 » » Claix, sobre el Drac.....	1611	45,80	16,57	2,50	1,46	»	»
95 » » Rœder, Sajonia.....	1845	45,32	15,10	»	1,70	»	»
96 » » Turín, sobre el Dora.....	1834	44,80	5,50	»	1,49	»	12,20
97 » » Ponty-Pridd, sobre el Taaff.....	1751	42,70	10,70	0,00	0,91	»	»
98 » » Florencia.....	»	42,23	9,10	0,00	1,62	»	»
99 » » Ferrocarril de circunvalación, París.....	1853	34,50	4,60	5,00	1,20	4,00	13,25
100 » » Avignon, sobre el Ródano	1187	33,80	15,00	0,00	0,87	»	»
101 » » Saint-Esprit, sobre el Ródano.....	1305	33,10	8,20	0,00	1,80	»	»
102 » » Austerlitz, París.....	1854	32,29	4,67	4,00	1,25	3,09	10,00
103 » » Guillotière, Lyon.....	1245	32,00	11,70	»	0,65	10,40	»
104 » » Hérault.....	»	31,60	12,35	0,00	1,62	»	»
105 » » Inválidos, París.....	1856	31,86	3,10	5,00	1,20	4,59	11,00
106 » » Petit-Pont, París.....	1853	31,75	3,15	»	1,35	»	»
107 » » Concordia, París.....	1791	31,19	3,97	5,60	1,14	2,92	15,59
108 » » Doubles, París.....	1848	31,00	3,10	5,20	1,30	»	14,00
109 » » Boucherie, Nuremberg..	1599	29,60	3,90	1,50	1,22	»	»
110 » » Black-Friars, Londres...	1760	29,56	12,19	0,00	1,52	6,10	»

DESIGNACIÓN DE LA OBRA.	Época de la construcción.	Luces de los arcos principales.	Flechas.	Altura de las pilas entre el zócalo y los arranques.	Espesor de la clave.	Espesor de las pilas en los apoyos.	Espesor de los estribos.
111 Puente de Pontoise.....	1772	29,24	2,17	»	1,62	3,00	»
112 » » Trinidad, en Florencia..	1566	29,19	4,86	3,54	0,97	7,88	»
113 » » Verona, sobre el Adige..	1850	29,00	4,83	»	1,30	5,00	»
114 » » los Plateros, Florencia...	1345	28,80	4,60	4,00	1,01	6,20	»
115 » » Jena, París.....	1843	28,00	3,30	7,00	1,44	3,00	15,00
116 » » Dunkeld, sobre el Tay...	1808	27,45	9,15	»	0,92	4,88	»
117 Viaducto de Déan.....	1831	27,45	9,15	19,83	0,92	3,35	12,50
118 Puente de Fouchard, Saumur.....	»	26,00	2,63	5,50	1,30	3,09	9,74
119 » » Saint-Maxence, sobre el Oise.....	1786	23,40	1,95	6,50	1,46	2,92	5,85
120 » » Horadada, sobre el Ebro, provincia de Burgos...	1862	23,40	5,62	»	1,35	»	7,80
121 » » Tilsitt, Lyon.....	1864	22,84	2,75	5,30	1,10	2,50	12,00
122 » » Júcar, carretera de Madrid á Valencia.....	1851	22,29	3,62	»	1,25	»	6,82
123 » » Leciñana, sobre el Zadorra, línea del Norte....	1858	22,00	2,95	6,23	1,10	3,10	8,30
124 » » Navarclés, sobre el Llobregat.....	1863	20,62	3,42	5,20	1,11	3,00	7,80
125 » » Val-Bénoit, sobre el Mosa	»	20,00	2,67	5,50	1,00	2,80	14,80
126 » » Minden, sobre el Wesser.	1850	19,00	3,17	»	1,10	3,00	»
127 » » Isabel II, en Bilbao.....	1876	19,00	1,90	6,80	0,70	2,00	6,20
128 » » Caparroso, en Navarra...	»	17,60	5,10	0,00	0,90	7,07	»
129 » » Nemours, sobre el Loing..	1805	16,24	0,955	5,00	0,975	2,27	5,14
130 » sobre el Jarama, provincia de Madrid.....	1888	15,00	2,50	2,50	0,90	1,80	5,00
131 » del Sacal, provincia de Zaragoza.....	1891	14,00	1,80	2,80	0,85	»	4,70
132 » de Valencia, sobre el Guadalaviar.....	Siglo XVIII	13,00	1,30	3,50	0,85	3,50	»
133 » » Puebla, línea del Norte..	1859	13,00	1,73	5.44	1,00	2,20	6,25
134 » » Rueda del Jalón, provincia de Zaragoza.....	1887	13,00	1,91	2,20	0,80	1,60	4,40
135 » sobre el Esca, provincia de Zaragoza (carretera de Ruesta á Burgui).....	1889	13,00	1,91	4,30	0,80	1,60	4,95
136 » de Beloso, sobre el Arga, Pamplona.....	1844	12,80	2,78	5,43	1,39	2,78	5,15
137 » sobre el Esca, provincia de Zaragoza (carretera de Jaca á Sangüesa).....	1886	12,20	2,40	3,00	0,75	1,50	3,50
138 » » el Veral, provincia de Zaragoza.....	1892	10,00	1,50	3,60	0,72	1,50	3,40

CAPÍTULO II.

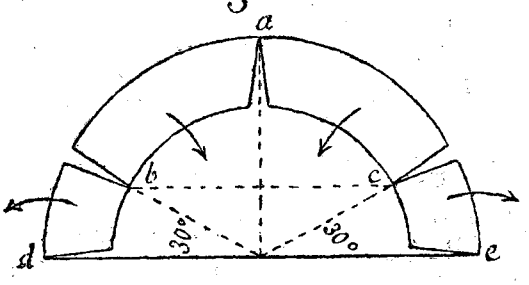
FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS BÓVEDAS. TEORÍA DEL COEFICIENTE DE ESTABILIDAD.

---

53. Rotura de las bóvedas.—La base de las teorías de las bóvedas actualmente aceptadas es el estudio de la manera de romperse cuando se cargan con pesos crecientes, estudio llevado á cabo experimentalmente por Boistard, operando con modelos construídos en pequeña escala. Estos experimentos sirvieron para establecer algunas leyes generales relativas al fenómeno de la rotura, leyes que conviene conocer antes de entrar en consideraciones teóricas que, de otro modo, podrían parecer arbitrarias é injustificadas.

Si se considera una bóveda de medio punto en el momento de romperse, se observa (fig. 50) que su sección recta se descompone en cuatro trozos, que se separan del modo siguiente. La junta de la clave se abre hacia el intradós; otras dos juntas simétricas con relación á la clave, las *b* y *c*, se abren hacia el trasdós, y los dos trozos de bóveda contiguos á la clave tienden á caer hacia el interior de la bóveda, girando alrededor de los puntos *b* y *c*. Mas este movimiento no puede verificarse sin empujar hacia fuera los dos trozos de bóveda inferiores, los cuales tienden á girar

Fig 50.

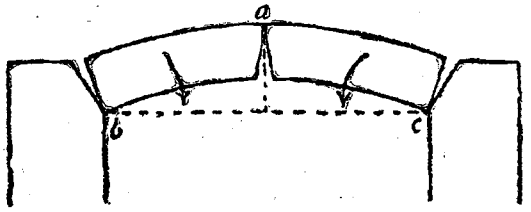


hacia el exterior alrededor de los puntos *d*, *e*, abriéndose las juntas de arranque hacia el intradós. Las juntas *b* y *c* se llaman de rotura, y forman con la horizontal un ángulo de 30° próximamente. Pueden determinarse por la regla indicada en el capítulo anterior, trazando una horizontal *b c* á la mitad de la altura de la flecha.

Iguales fenómenos se observan en los arcos elípticos y carpaneles, y la misma regla sirve para fijar aproximadamente la junta de rotura.

Si consideramos una bóveda escarzana, podremos derivarla de la de medio punto, elevando la línea de los arranques y suprimiendo la parte inferior. Cuando dicha línea llega á la altura de los puntos *b* y *c*, la junta de rotura coincidirá con la de arranque, y la rotura se verificará descomponiéndose la bóveda en dos trozos solamente.

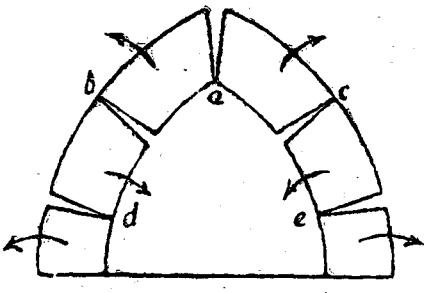
Fig 51



Este arco corresponde á un rebajamiento de $^1/_{3,46}$, y, para todos los rebajamientos menores, la junta de rotura coincide con la de arranque. La rotura se verifica como indica la figura 51.

Las bóvedas ojivales se abren hacia el trasdós en la clave, y tienden á romperse, como se representa en la figura 52.

Fig 52.

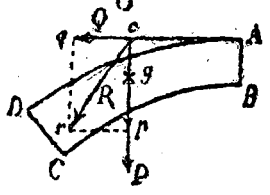


Los fenómenos de rotura relativos á las bóvedas de medio punto y escarzanas son de la mayor importancia, y deben tenerse presentes para comprender las consideraciones que siguen.

54. Empuje en la clave y reacción del apoyo.—Consideremos la porción de bóveda inmediata á la clave en un arco de medio punto, ó, lo que es igual para nuestro objeto, la semi-bóveda escarzana *A B C D* (fig. 53), y examinemos sus condiciones de equilibrio en el instante en que va á alterarse, rompiéndose la bóveda.

Sobre este trozo de bóveda obrará, en primer lugar, su peso aplicado al centro de gravedad g, fuerza que podremos determinar conociendo la forma y el peso específico de los materiales de la bóveda; sea P dicho peso. Obrarán, además, en los puntos de contacto A y C con los trozos contiguos, dos reacciones desconocidas que debemos determinar. Para ello, supongamos el punto C invariablemente fijo, y suprimamos el otro trozo de bóveda contiguo á la clave, que es el que impide que caiga el que consideramos. Podremos restablecer el equilibrio introduciendo una cierta fuerza horizontal Q (1), que reemplazará á la reacción del trozo contiguo. Del mismo modo, por el punto C tendrá que pasar la reacción R del apoyo, y, como sobre el trozo considerado no obran más que estas tres fuerzas, bastará, para que exista el equilibrio, que la resultante de P y Q sea igual y contraria á R. Por lo tanto, para hallar las reacciones Q y R bastará trasladar la fuerza P en su propia dirección hasta que encuentre á la horizontal $A\,q$ en el punto o; uniendo este punto con el C tendremos la línea de acción de R, y, para obtener su valor y el de Q, bastará trazar el paralelógramo $o\,q\,r\,p$, en que el lado vertical es P. La diagonal $o\,r = R$ será la reacción del apoyo, y el lado $o\,q = Q$, la reacción ó empuje en la clave.

Fig 53.



Tales son las condiciones del equilibrio estricto del trozo de bóveda $A\,B\,C\,D$, y los valores del empuje en la clave y de la reacción del apoyo para que ese equilibrio exista.

55. Teoría de Lamé y Clapeyron.—Fundándose en los experimentos de Boistard, establecieron Lamé y Clapeyron una teoría del equilibrio de las bóvedas que, por su sencillez y por la facilidad con que se aplica á los casos prácticos, se utiliza aún en la actualidad, con ligeras modificaciones, para la redacción de proyectos. Vamos

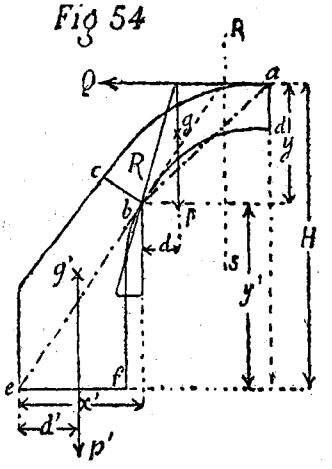
---

(1) Esta fuerza debe ser horizontal, porque, á causa de la simetría de la figura, los empujes correspondientes á las dos semi-bóvedas deben ser simétricos; por otra parte, han de ser iguales y contrarios, y estas dos condiciones son incompatibles á no ser aquéllos horizontales.

á indicar lo esencial de esta teoría para poder, más adelante, estudiar ejemplos de aplicación.

Consideremos (fig. 54) una bóveda con su estribo; sea bc la junta de rotura, y estudiemos las condiciones generales de estabilidad del conjunto de la bóveda con su apoyo. Llamemos Q al empuje horizontal aplicado en el trasdós á la junta de la clave, y á la distancia de dicha fuerza al punto b, alrededor del cual tiende á girar el trozo $acbd$ de la bóveda; p al peso de dicho trozo aplicado á su centro de gravedad g, cuya distancia al eje de giro b llamaremos d. La condición de equilibrio de este trozo de bóveda se establecerá expresando que los momentos de las fuerzas Q y p respecto á b son iguales, lo que da la ecuación

Fig 54



$$Qy = pd$$

de la cual podremos despejar Q, puesto que y, p, d son conocidas tendremos, pues,

$$Q = \frac{pd}{y}$$

que será el empuje en la clave.

Recordemos ahora que, según el párrafo anterior, la resultante R, de p y de Q, ha de pasar por el punto b; esta resultante será, por lo tanto, una fuerza aplicada en el punto b al macizo $bcef$, y podrá ser reemplazada por sus componentes p, Q aplicadas al mismo punto. Este macizo queda, pues, sometido á la fuerza Q aplicada en b, que tiende á volcarlo hacia el exterior girando alrededor del punto e, á la p aplicada en el mismo punto, y á su propio peso p' aplicado á su centro de gravedad g'. Estas fuerzas deben hallarse en equilibrio, lo cual se expresa escribiendo que el momento de Q con relación á e es igual á la suma de los momentos de p y de p' con relación al mismo punto, puesto que Q tiende á hacer girar al macizo en sentido contrario que p y p'. Llamando y' á la altura del punto b

sobre el e, x' á la proyección horizontal de la distancia entre b y e, d' á la distancia del peso p' al eje de giro e, tendremos la ecuación de equilibrio

$$Q y' = p x' + p' d' = p d \frac{y'}{y}$$

reemplazando Q por su valor hallado anteriormente.

Tal es la ecuación que expresa la condición del equilibrio estricto de la bóveda y del estribo. Pero, para que la obra ofrezca una estabilidad conveniente, es necesario que el momento resistente $p x' + p' d'$ sea superior al momento $Q y'$ que tiende á volcar el apoyo. La condición se convierte entonces en la ecuación siguiente

$$p x' + p' d' = m . Q y' \qquad [2]$$

en la cual m es un número mayor que la unidad, llamado *coeficiente de estabilidad;* puede decirse que es la medida de la estabilidad de la obra.

La consideración del coeficiente de estabilidad es de mucha utilidad en la práctica, porque permite determinar con seguridad y sencillez los espesores de los estribos, y aún de las pilas, según veremos más adelante.

Debe observarse que el procedimiento de Lamé y Clapeyron se reduce á asimilar el equilibrio de los macizos $a c b d$ y $c b f e$ al de dos palancas $a b$ y $b e$ articuladas en b, sometida la $a b$ á una fuerza horizontal Q aplicada en a, y pudiendo girar la $b e$ alrededor de e; los pesos de los macizos están concentrados en las palancas, aplicándose en las verticales de los centros de gravedad g y g' de ambos macizos.

56. Aplicaciones del método del coeficiente de estabilidad. —Morandière ha aplicado este procedimiento á un gran número de puentes importantes, pero introduciendo algunas modificaciones indispensables. Lamé y Clapeyron, estudiando el equilibrio en el momento de romperse la bóveda, admitieron que el empuje en la clave y la reacción del apoyo pasan por los puntos a y b, del trasdós en la clave, y del intradós en la junta de rotura. Pero, si se consi-

dera una bóveda estable, no puede admitirse que sean esos los puntos de aplicación. En efecto, con arreglo á la teoría de la distribución de las presiones (núm. 33, 4.° caso), pasando las fuerzas por uno de los lados del rectángulo, se repartirían en una superficie nula, la presión por unidad de superficie sería infinita, y, por lo tanto, el material se aplastaría necesariamente en esos puntos. Puesto que esto no se observa en las obras construídas, las fuerzas cortan á ambas juntas á cierta distancia del trasdós en la clave y del intradós en la junta de rotura. Se admite generalmente que el punto *b* de aplicación del empuje en la clave se halla al tercio de la junta á partir del trasdós, y el *c* de aplicación de la reacción del apoyo, al tercio de la junta á partir del intradós. Por las mismas razones no puede admitirse que el punto de giro del estribo sea la arista exterior *e*, y Morandière admite que se halla en el interior del estribo á 0,30 m. de dicha arista. Admitidas estas hipótesis, es fácil trazar la posición de las palancas *a b*, *b e*, y el cálculo se efectúa, en lo demás, del mismo modo que lo hemos explicado.

57. Corrección del espesor del estribo y de las pilas dados por las fórmulas empíricas.—La aplicación de esta teoría permite corregir, según hemos indicado, el espesor del estribo admitido provisionalmente en el perfil de ensayo. En efecto, el coeficiente de estabilidad debe estar comprendido entre ciertos límites, y el valor que resulta en el perfil provisional hará ver si es necesario aumentar ó disminuir el espesor. Morandière admite que el coeficiente de estabilidad debe estar comprendido entre 1,60 y 1,80. Según Croizette-Desnoyers, debe tratarse de que se acerque á 1,50; y, en general, puede decirse que debe exceder siempre de 1,20 y no pasar de 2,00. El límite 1,20 puede ser peligroso, y el superior, 2, no se alcanza sin un exceso de coste de dudosa utilidad.

La consideración del coeficiente de estabilidad permite también fijar una regla muy útil en la práctica para determinar el espesor de una pila. En realidad, una pila no se halla sometida á ningún esfuerzo horizontal, puesto que los empujes de las dos bóvedas contiguas, siendo estas generalmente de luces iguales, se destruyen. Pero si el espesor se reduce á lo estrictamente necesario para que el material no se aplaste bajo el peso de las dos semi-bóvedas que

insisten en la pila, sucederá, en general, que si llega á romperse un arco por cualquier circunstancia, el inmediato caerá también, por no tener la pila suficiente espesor para hacer el oficio de estribo. Sin embargo, se observó en Francia, durante la guerra de 1870, que en varios puentes que fueron destruídos y cuyas pilas no tenían espesores exagerados, la rotura de un arco no arrastró la caída de los demás. Los coeficientes de estabilidad de estas pilas estaban comprendidos entre 0,80 y 1,00, y sólo se explica que resistieran por la cohesión de los morteros. Este hecho prueba la conveniencia de adoptar para las pilas un coeficiente comprendido entre aquellos límites, que no conduce á espesores exagerados, y proporciona la ventaja de que en caso de necesidad puedan funcionar como estribos. Cuando se trata de arcos de medio punto, elípticos ó carpaneles, ó escarzanos de rebajamiento moderado, puede adoptarse en general el coeficiente 1, que no exige espesores considerables; pero, con arcos escarzanos muy rebajados, hay que admitir coeficientes más pequeños, y á veces inferiores á 0,80, para no exagerar el espesor de las pilas.

En los viaductos y puentes de muchos arcos, es frecuente construir algunos apoyos más gruesos que las pilas, llamados *pilas-estribos;* á estos se les asigna un coeficiente de estabilidad de 1,20 próximamente.

Hemos dicho que basta un coeficiente de 0,80 á 1 para que, en caso de rotura de un arco, la pila pueda funcionar como estribo; pero esto exige que el mortero haya adquirido bastante dureza, y no puede descimbrarse un arco antes de haber construído el contiguo, porque al verificarse el descimbramiento están los morteros demasiado frescos.

58. Presiones en la clave y en la junta de rotura.— Conocido el empuje en la clave y la reacción en la junta de rotura, y admitida la hipótesis relativa á los puntos de aplicación de estas fuerzas, es fácil deducir las presiones medias y máximas correspondientes á estas juntas, teniendo presente la ley de distribución estudiada en los números 31 á 35. Estando dichas fuerzas aplicadas al tercio de la junta, la presión máxima será doble de la media, y se ejercerá en el trasdós en la junta de la clave, y en el intradós en la

de rotura. En muchos casos de aplicación bastan estos datos, juntamente con el coeficiente de estabilidad, para juzgar acerca de las condiciones de resistencia de un puente de fábrica.

59. Junta de rotura.—En realidad, la determinación del empuje en la clave supone el conocimiento de la posición de la junta de rotura, y, para comprobar la estabilidad de una bóveda, sería preciso empezar por determinar dicha junta. Se han propuesto, para conseguirlo, diversos procedimientos, pero todos ellos requieren tanteos bastante laboriosos.

Se observa además que, en la mayor parte de los casos de aplicación, la posición de la junta de rotura difiere poco de la indicada por las reglas empíricas. Así sucede en las bóvedas de medio punto de menos de 30 m. de luz y en todas las elípticas y escarzanas; y, por otra parte, en la práctica, esa junta no está nunca determinada rigorosamente, observándose en los riñones varias juntas que se abren hacia el trasdós.

Creemos, pues, con Morandière, que al comprobar la estabilidad de una bóveda, se puede prescindir de la determinación de la junta de rotura, admitiendo desde luego que, en las bóvedas de medio punto y en las carpaneles ó elípticas, corresponde á la mitad de la altura de la flecha, y en las escarzanas coincide con la junta de arranque.

60. Influencia de la posición de una sobrecarga en la estabilidad de la obra.—Se comprende á primera vista que un aumento de carga sobre el apoyo aumentará la estabilidad, puesto que aumenta el momento resistente, y, por el contrario, la disminuirá si está aplicado cerca de la clave, por aumentar el valor del empuje, y, por lo tanto, el momento que tiende á volcar el apoyo. Por esta razón conviene aumentar el peso del apoyo elevando la fábrica hasta cierta altura sobre el arranque, y enlazando esta fábrica con el trasdós de la bóveda de modo que ésta quede muy reforzada cerca de los apoyos, como se practica constantemente. Lamé y Clapeyron han demostrado, estudiando la posición de la junta de rotura, que todo aumento de peso, si está aplicado á la izquierda de la vertical RS que pasa por la intersección de la palanca $b\,e$ con la horizontal del trasdós, aumenta la estabilidad, y

la disminuye si está aplicado á la derecha de la misma. Por lo demás, los diversos perfiles que se quieran comparar en un proyecto, pueden estudiarse rápidamente por medio de la teoría que acabamos de exponer. Al estudiar las aplicaciones prácticas, completaremos los detalles de la teoría del *coeficiente de estabilidad*.

CAPÍTULO III.

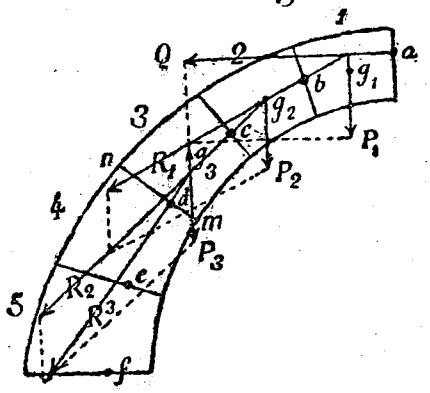
TEORÍA DE LA CURVA DE PRESIONES.

61. Curva de presiones.—Método de Méry.—La teoría del coeficiente de estabilidad da una idea de las condiciones de estabilidad de la bóveda y de sus apoyos considerados en conjunto, es decir, admitiendo que cada uno de los trozos en que hemos supuesto dividida la bóveda sea un sólido indeformable. Pero no conduce á la determinación de las presiones que deben desarrollarse en el interior de estos sólidos, pudiéndose solamente determinar las presiones máximas en las juntas de clave y de rotura. Puede suceder que la presión máxima que ha de sufrir la bóveda no se desarrolle en ninguna de estas dos juntas, sino en alguna intermedia, y es evidente que, para conocer con exactitud las condiciones de resistencia de la bóveda, es necesario el conocimiento de dicha presión máxima. La teoría de Méry ó de la curva de presiones permite determinar este valor, si bien es cierto que, para conocerlo, es preciso empezar por admitir como hipótesis que el empuje en la clave se aplica al tercio de la junta á partir del trasdós, y la reacción en la junta de rotura al tercio de dicha junta á partir del intradós, como lo hemos admitido ya para las aplicaciones de la teoría del coeficiente de estabilidad.

Consideremos una bóveda cualquiera en equilibrio (fig. 55), en la cual sustituímos la semi-bóveda de la derecha por el empuje en la clave equivalente á la acción que dicha semi-bóveda ejerce sobre la

que se conserva; las condiciones de equilibrio de ésta no se habrán alterado, con tal que determinemos el empuje Q como sabemos (núm. 55). Sea $m\,n$ la junta de rotura, descompongamos la semi-bóveda en un número cualquiera de dovelas, por ejemplo, cinco, cuidando de que la junta $m\,n$ separe dos de estas dovelas, y estudiemos separadamente el equilibrio de cada una de ellas. La dovela 1 está sometida, desde luego, á la fuerza Q y á su propio peso P_1 aplicado á su centro de gravedad g_1. Puesto que todas las fuerzas que obran sobre ella están en equilibrio, recibirá de la dovela 2 una cierta reacción igual y contraria á la resultante de P_1 y Q. Hallando la resultante R_1 de estas dos fuerzas, tendremos una fuerza igual y contraria á dicha reacción, que será la acción transmitida por la dovela 1 á la dovela 2. El punto de aplicación de esta fuerza R_1 á la dovela 2 será el punto de su intersección b con la junta correspondiente.

Fig 55.



Pasando á estudiar el equilibrio de la dovela 2, observaremos que las fuerzas que actúan sobre ella son la R_1, la P_2, peso de la dovela aplicado á su centro de gravedad g_2, y la reacción de la dovela 3. Determinaremos ésta, ó más bien la fuerza igual y contraria, hallando la resultante de R_1 y P_2 que será R_2; y el punto de intersección c de R_2 con la junta de separación de las dovelas 2 y 3 será el punto donde se aplica la acción que la parte superior de la bóveda ejerce sobre la dovela 3. Del mismo modo obtendremos el punto d, hallando la resultante de R_2 con P_3 que será R_3, y tomando su punto de intersección con $m\,n$. Observaremos que así habremos de encontrar necesariamente el punto situado al tercio de dicha junta á partir de m; en efecto, para determinar el empuje Q, hemos supuesto que la reacción de la parte inferior de la bóveda pasaba por dicho punto, y hemos hallado Q determinando la componente horizontal de dicha reacción, cuya componente vertical es el peso de toda la parte de bóveda situada encima de $m\,n$. Pero este peso es precisamente

$P_1 + P_2 + P_3$, y, por lo tanto, la reacción R_3, que es la resultante de estos tres pesos y de Q, es la misma reacción del apoyo que sirvió para determinar Q.

Del mismo modo podremos componer la reacción R_3 con el peso P_4 de la dovela 4 y hallaremos el punto e; y, finalmente, componiendo la nueva resultante R_4 con el peso de la dovela 5 tendremos el punto f.

El polígono $a\,b\,c\,d\,e\,f$ recibe el nombre de *polígono de los centros de presión* que se convertiría en *curva de las presiones* si aumentáramos indefinidamente el número de dovelas; pero prácticamente se determina siempre un polígono, considerando un número limitado de dovelas, que no puede ser muy considerable por la necesidad de evitar la confusión en la figura, y se unen los vértices del polígono por una curva continua á la que se llama también en la práctica *curva de presiones*, sin que de ello resulte ningún inconveniente.

62. CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE LA BÓVEDA. — Una vez trazada la curva de presiones, y admitiendo que en la bóveda construída se realice la transmisión de los esfuerzos de una dovela á la siguiente según dicha curva (lo cual es consecuencia necesaria de la hipótesis admitida respecto á los puntos de aplicación del empuje en la clave y de la reacción en la junta de rotura), deben verificarse, para que la bóveda sea estable, las condiciones siguientes:

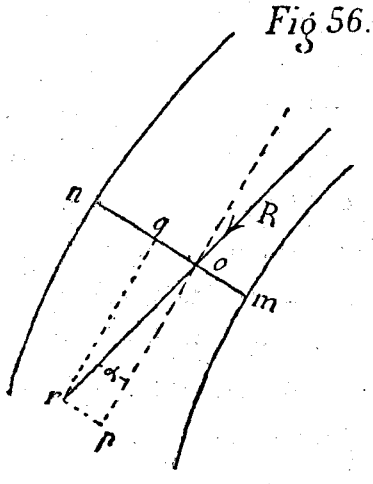
1.ª *La curva debe hallarse contenida en el espesor de la bóveda.*— Esta condición se deriva del concepto mismo de la curva de presiones. Los puntos de la curva no son otra cosa que los puntos de aplicación de las reacciones mutuas de las dovelas, y la transmisión de estas reacciones no puede verificarse por fuera de la zona de contacto.

2.ª *La presión máxima en cada junta no debe exceder del coeficiente de resistencia del material.*—En cada junta conocemos la reacción correspondiente y su punto de aplicación. La componente normal de esta reacción se distribuirá en la junta con arreglo á las leyes de la distribución de las presiones en un rectángulo, y, según la posición del punto de aplicación, se podrá calcular la presión máxima, que se realizará en el intradós ó en el trasdós. Es evidente que dicha presión máxima deberá ser inferior á la que puede imponerse al

material, ó sea al coeficiente de resistencia. En las juntas en que la curva de presiones se acerque más al intradós ó al trasdós, obtendremos los mayores valores de la presión máxima, y, por lo tanto, esas serán las regiones más comprometidas de la bóveda.

3.ª *El ángulo de la reacción en una junta con la normal á la misma debe ser menor que el ángulo de rozamiento entre las dovelas contiguas.* —Sea $m\,n$ la junta considerada (fig. 56) y $R = o\,r$ la reacción correspondiente. Sea α el ángulo de la misma con la normal $o\,p$ á la junta. Descompongamos $o\,r$ en sus dos componentes $o\,p$, $o\,q$, normal y paralela á la junta. La componente paralela $o\,q$ tiende á hacer deslizar la dovela inferior hacia el trasdós, y á este movimiento se opone el rozamiento entre las dos dovelas (prescindiendo de la cohesión del mortero). Se sabe que, siendo f el coeficiente de rozamiento, el valor del rozamiento ó sea de la fuerza opuesta á $o\,q$ es $o\,p \times f$; y, por lo tanto, será preciso, para que el deslizamiento no se efectúe, que

Fig. 56.



$$o\,q < o\,p \times f \qquad \text{ó sea} \qquad \frac{o\,q}{o\,p} < f,$$

ó bien

$$\operatorname{tg} \alpha < f,$$

siendo α el ángulo de R con $o\,p$.

Se sabe que f se considera como la tangente trigonométrica de un cierto ángulo φ llamado ángulo de rozamiento, de modo que, por definición, se tiene $\operatorname{tg} \varphi = f$, luego

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{ó sea} \qquad \alpha < \varphi$$

conforme al enunciado.

El valor de f que se adopta generalmente es 0,50 al cual corresponde un ángulo de rozamiento $\varphi = 27°$. Por consiguiente, la com-

probación de esta tercera condición se reducirá en la práctica á medir con un transportador los ángulos de las reacciones en las diversas juntas con las normales á las mismas, y ver si son todos inferiores á 27°, como debe suceder.

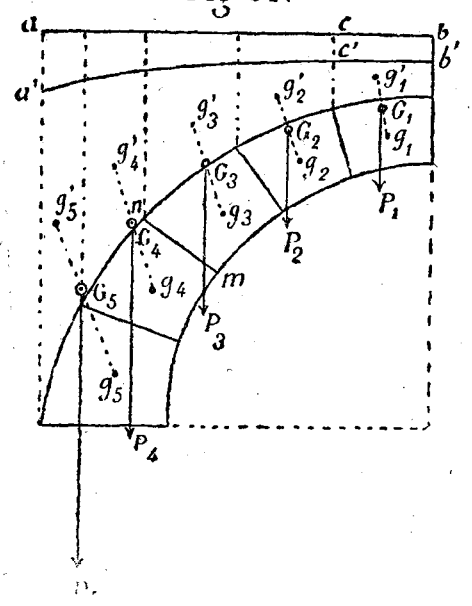
63. INDETERMINACIÓN DE LA CURVA DE PRESIONES. — Es evidente que, en toda bóveda terminada, la transmisión de las reacciones de una dovela á otra se verifica según una cierta curva de presiones, y que ésta se podría conocer exactamente si fueran conocidos sus puntos de paso en la junta de clave y en la de rotura ú otra cualquiera. Pero, en la imposibilidad de conocer experimentalmente dichos puntos, habría que estudiar un gran número de curvas compatibles con el equilibrio, y el procedimiento perdería todo su valor práctico. Por esta razón los constructores se limitan á comprobar la estabilidad admitiendo que se realiza la curva que nosotros hemos estudiado. Las razones en que se funda la hipótesis que sirve para determinarla son, á la verdad, muy vagas. Se apoyan en la manera de romperse las bóvedas, y en la observación de que hacia la clave las juntas tienden á abrirse por el intradós, y en las inmediaciones de la junta de rotura hacia el trasdós. Según la manera de romperse las bóvedas, en el instante en que se destruye el equilibrio, la curva tiene necesariamente que pasar por el trasdós en la clave y por el intradós en la junta de rotura, pues estos son los únicos puntos de apoyo mutuo de los diversos trozos en que se divide. Pero cuando una bóveda está construída, esos puntos han debido necesariamente penetrar hacia el interior. Si no se observan las grietas antes mencionadas, es lógico suponer que dichos puntos se han alejado del trasdós y del intradós lo suficiente para que las juntas de clave y de rotura queden en su totalidad comprimidas, puesto que no ha habido rotación apreciable, y esto supone que dichos puntos han llegado, por lo menos, al tercio de la junta correspondiente. Pero desde el momento en que existen bóvedas estables en que se observan dichas grietas, es indudable que entre esos límites caben infinidad de posiciones compatibles también con el equilibrio.

Sin embargo, no debe negarse todo valor práctico al estudio de la curva de presiones de Méry. Desde que su autor dió á conocer esta teoría en 1840, puede decirse que no ha dejado de estudiarse un solo

puente de mediana importancia por este método, y siempre con buen resultado. Así es que, aunque sea puramente convencional el valor de la presión máxima á que conduce, y no pueda afirmarse que la presión real en la bóveda no superará á la prevista, puede considerarse el método de la curva de presiones como un procedimiento de comparación de la bóveda que se proyecta con otras existentes, y una guía útil para averiguar cuáles son las regiones más peligrosas de la bóveda y que conviene reforzar.

64. Bóveda con sobrecarga.—En el caso de los puentes de fábrica, que especialmente nos interesa, la bóveda sostiene una carga de tierra ó de fábrica aligerada, limitada superiormente por una horizontal, que es la rasante. Este caso se reduce fácilmente al anterior suponiendo que cada dovela considerada sostiene el prisma vertical que insiste sobre su superficie de trasdós. Cuando la sobrecarga es de fábrica aligerada, consiste en una serie de arcos cuyos apoyos insisten sobre el trasdós de la bóveda, y no hay dificultad en trazar la curva de presiones considerando las sobrecargas concentradas en los apoyos; pero puede suponerse, sin inconveniente, que se halla repartida de un modo continuo sobre el trasdós como en el caso de una sobrecarga de tierra, lo cual modifica muy poco la curva de presiones.

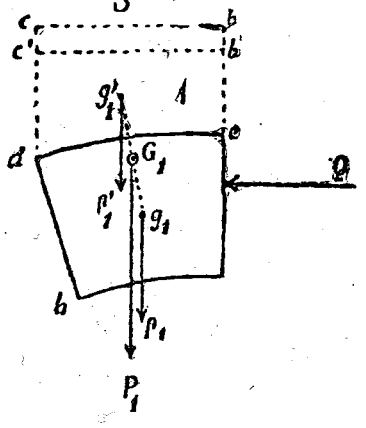
Fig. 57.



Considerando, por consiguiente, este caso, supongamos que *a b* sea la rasante (fig. 57); para facilitar las operaciones supondremos que la carga de tierra se reduce á otra equivalente del mismo peso específico que la fábrica de la bóveda, para lo cual bastará reducir las alturas de los prismas de tierra en la relación de la densidad de la tierra á la de la fábrica, y así obtendremos la línea de sobrecarga *a' b'*. Sobre la dovela 1, que, para mayor claridad, se representa amplificada en la figura 58, insistirá el prisma de tierra *c b e d* que se susti-

tuirá como acabamos de indicar por el de fábrica *c' b' e d*. El peso de la dovela será p_1 aplicado á su centro de gravedad g_1; el de la sobrecarga, p'_1, estará aplicado en g'_1, y el total se obtendrá, juntamente con su punto de aplicación G_1, componiendo las fuerzas p_1 y p'_1. Del mismo modo se obtendrán las P_2, P_3, P_4... que corresponden á las del mismo nombre en el caso de la bóveda sin sobrecarga. El punto de aplicación del empuje seguirá siendo el mismo que en el caso ya estudiado, y todas las construcciones para obtener la curva de presiones serán idénticas.

Fig 58.



65. Operaciones que requiere la comprobación de la estabilidad de una bóveda.—Resumiendo lo anterior, vemos que la comprobación de la estabilidad de una bóveda por el método de la curva de presiones de Méry requiere las siguientes operaciones. Dibujado el perfil de ensayo de la mitad de la bóveda, se empieza por trazar la junta de rotura y descomponer en seis ú ocho dovelas la parte comprendida entre esta junta y la de clave. Desde la junta de rotura á la de arranque se hará la descomposición de modo que las dovelas resulten próximamente de las mismas dimensiones que las anteriores. Hecho esto, se trazarán las verticales que limitan los prismas de tierra que constituyen la sobrecarga de cada dovela, y se reducirán estas verticales en la relación de las densidades de la tierra y de la fábrica para representar la sobrecarga por un macizo de la misma densidad que la bóveda, lo cual tiene la ventaja de poder evaluar simplemente áreas en vez de pesos. A continuación, se determinan los centros de gravedad de las dovelas y de sus sobrecargas separadamente; se evalúan, también separadamente, los pesos ó las áreas de las mismas, y, adoptando una escala conveniente según el tamaño del dibujo, se representan dichos pesos y se componen dos á dos para obtener el centro de gravedad de cada dovela con su sobrecarga, y el peso total.

Después se procede á la determinación del empuje en la clave y

de la reacción del apoyo, para lo cual habrá que empezar por determinar, en magnitud y posición, el peso de la parte de bóveda situada encima de la junta de rotura con su sobrecarga, componiendo todos los pesos parciales correspondientes á dicha porción.

Determinado el empuje en la clave, se procede á obtener los puntos de la curva de presiones, componiendo dicho empuje con el peso de la primera dovela (con su sobrecarga); la resultante obtenida con el peso de la segunda dovela, y así sucesivamente, según se ha explicado ya con detalle.

Obtenida así la curva de presiones, se procede á examinar las tres condiciones de estabilidad. Se observa, desde luego, si la curva está ó no contenida dentro del macizo de la bóveda. Para comprobar la segunda condición, se obtienen las componentes normales de las reacciones sucesivas, se miden las distancias de los puntos de aplicación de estas al trasdós ó al intradós de la bóveda, así como la longitud de la junta, y se calcula la presión máxima en cada junta, consignando todos los datos y resultados en un cuadro. La comprobación de la tercera condición se reduce á medir los ángulos de las reacciones en las juntas con las normales á las mismas, y ver si todos ellos son inferiores á 27°.

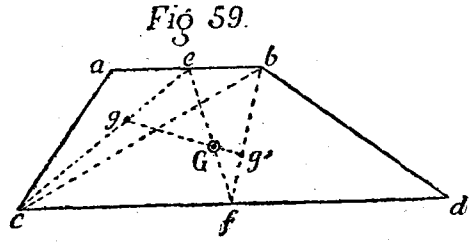
En vista de este examen se decide si deben conservarse los espesores adoptados ó si, por el contrario, conviene modificarlos, procediendo en este caso á la comprobación del nuevo perfil, hasta decidir cuáles han de ser los espesores definitivos. Pasemos á estudiar con detalle algunas de las operaciones descritas que pueden presentar alguna dificultad ú originar confusiones en la figura, si no se procede con cierto método.

66. Determinación de los centros de gravedad.—Hemos dicho que, después de haber hecho la descomposición de la bóveda en dovelas y haber fijado la sobrecarga de cada una, es preciso hallar el peso y el centro de gravedad de cada uno de estos grupos. Para ello, en cada dovela se reemplazan las curvas del intradós y del trasdós por sus cuerdas, lo que no introduce un error que tenga importancia en la práctica, puesto que el número de dovelas en que se ha descompuesto la bóveda es bastante grande. Así, la forma de la sobrecarga $c'\,b'\,e\,d$ (fig. 58) será un trapecio, y la de la dovela

d e b un cuadrilátero, y será preciso hallar separadamente los centros de gravedad de ambas figuras.

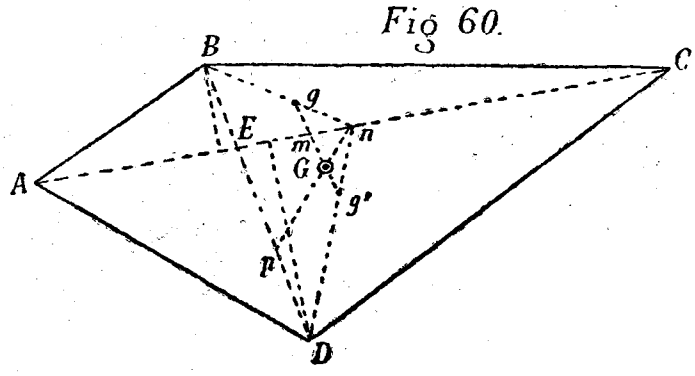
Sea el trapecio *a b c d* (fig. 59). Para hallar su centro de gravedad lo descompondremos por la diagonal *c b* en dos triángulos. El centro de gravedad del triángulo *a b c* está en el punto *g*, tercio de la mediana *c e* á partir de la base *a b*. Del mismo modo, el del triángulo *b c d* se halla en *g'*, tercio de la mediana *b f* á partir de la base *c d*; luego el centro de gravedad del trapecio estará en la recta *g g'* que une los de los dos triángulos. Como además debe hallarse en la recta *e f* que une los puntos medios de las dos bases, será el punto *G* de intersección de estas rectas. Del mismo modo se determinarán todos los centros de gravedad $g'_1\, g'_2 \ldots$ de las demás sobrecargas.

Fig 59.



La figura de la dovela es un cuadrilátero irregular. Hé aquí una construcción sencilla que sirve para determinar su centro de gravedad (fig. 60). Sea *A B C D* el cuadrilátero; se trazarán las diagonales, y sobre una de ellas, la *A C*, por ejemplo, tomaremos el punto medio *n*. Sobre el segmento mayor, *E D*, de la otra diagonal se lleva la magnitud *D p* igual al segmento menor *B E*, á partir del vértice correspondiente *D*. Uniendo *p* y *n*, y tomando el tercio de *p n* á par-

Fig 60.



tir de n, tendremos el centro de gravedad G del cnadrilátero (1).

Las áreas de los trapecios y cuadriláteros se hallan luego por los métodos conocidos de la Geometría elemental, y se deducen los pesos correspondientes multiplicándolos por el peso del metro cúbico de fábrica. Se trazan entonces las rectas $g_1 g'_1$, $g_2 g'_2$... (fig. 57) y se deduce la posición de los centros de gravedad G de los pesos totales, dividiendo estas rectas en dos segmentos inversamente proporcionales á los pesos parciales p_1, p'_1, p_2, p'_2..., lo cual se hace muy fácilmente, midiendo las longitudes con la escala y efectuando la operación aritmética; una vez determinados los centros de gravedad G_1, G_2, G_3..., se trazan las rectas que representan los pesos totales de las dovelas con sus sobrecargas en la escala adoptada. Se puede hacer un dibujo especial para la determinación de los centros de gravedad, ó bien, para evitar los errores que se pueden cometer al trasladarlos al dibujo en que se han de ejecutar las construcciones, se prefiere determinarlos en el dibujo definitivo haciendo las construcciones auxiliares de lápiz y con trazo muy fino, borrándolas después de comprobadas, y conservando solamente los centros de gravedad G_1, G_2... y los pesos P_1, P_2...

67. Determinación del empuje en la clave.—Para determinar

---

(1) Para demostrarlo, consideremos los triángulos ABC y ADC, tracemos las medianas Bn y Dn, y tomemos los centros de gravedad g y g' de dichos triángulos, que estarán al tercio de Bn y Dn á partir de n. Tendremos que componer las áreas de los triángulos aplicadas en g y g' para obtener el centro de gravedad G del cuadrilátero. Pero, como los triángulos tienen la base común AC, sus áreas son proporcionales á las alturas ó á los segmentos BE y DE, ó lo que es lo mismo, á mg y mg'. El centro de gravedad G se hallará á la distancia $Gg' = mg$ tomada á partir de g'. En efecto, tenemos

$$\frac{g'G}{gG} = \frac{BE}{DE} = \frac{mg}{mg'}$$

ó bien

$$\frac{g'G}{gG + g'G} = \frac{mg}{mg + mg'}$$

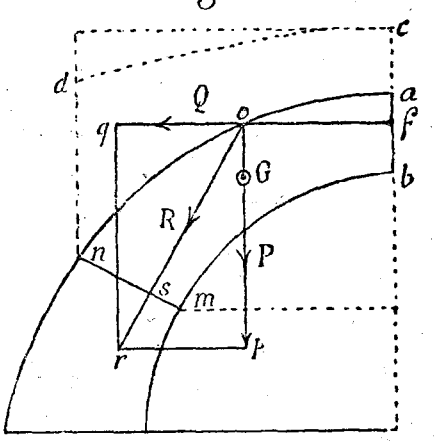
de donde se deduce que $g'G = mg$, puesto que los dos denominadores son iguales á gg'.

Ahora, los triángulos semejantes de la figura hacen ver que si tomamos $Dp = BE$, pn pasará por G, y, puesto que ng' es la tercera parte de nD, nG será la tercera parte de np, lo que demuestra la verdad de la construcción.

En las aplicaciones basta trazar las diagonales AC, BD, y la recta np; las demás líneas de la figura sólo son necesarias para la demostración.

el empuje en la clave, hemos partido del peso de la parte de bóveda situada encima de la junta de rotura. Debemos advertir que, cuando se trata de bóvedas de medio punto ó elípticas, algunos ingenieros determinan este empuje partiendo del peso de la semibóveda, suponiendo aplicada la reacción del apoyo al punto medio de la junta de arranque. Este modo de proceder no nos parece conforme con las observaciones de la experiencia y con las leyes de la rotura de las bóvedas. Hemos indicado, en efecto, que la junta de rotura forma un ángulo de 30° con la de arranque, y es un hecho de observación, muy conocido, que hasta esa altura se sostienen los materiales por el simple rozamiento y no producen presión sobre las cimbras durante la construcción. Esta porción de la bóveda no tiende á caer hacia el interior, y, por lo tanto, no puede producir empuje horizontal en la clave. Este es debido únicamente al trozo de bóveda situado encima de la junta de rotura que, tendiendo á caer hacia el interior, debe ser sostenido por una fuerza horizontal, que es la reacción que ejerce en la clave el trozo simétrico que tiende á caer girando en sentido contrario; y la parte de bóveda comprendida entre el arranque y la junta de rotura debe considerarse como una prolongación del apoyo.

Fig 61



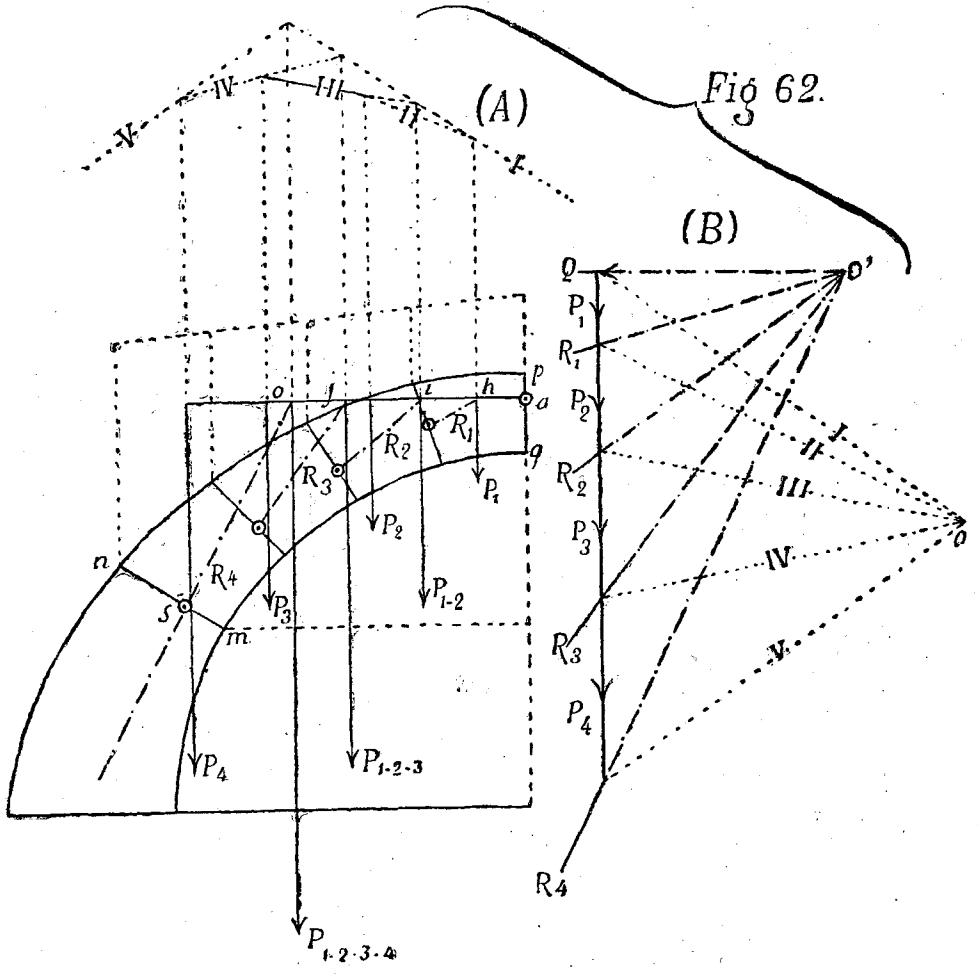
Nosotros adoptaremos el procedimiento ya indicado, considerando que el empuje es producido solamente por el trozo de bóveda situado encima de la junta de rotura, y, en resumen, se determinará el empuje en la clave del modo siguiente (fig. 61):

Por el punto f *situado al tercio de la junta de clave contado desde el trasdós se trazará la horizontal indefinida* f q; *se determinará, en posición y magnitud, el peso* P *del trozo de bóveda* m n a b *situado encima de la junta de rotura, con su sobrecarga, y se tomará, á partir de su intersección* o *con la horizontal, la magnitud* o p = P *en la escala adoptada; se unirá el punto* s, *tercio de la junta de rotura, á partir del*

intradós, con el punto o, *y se trazará el rectángulo* o p r q; *el lado* o q = Q *será el empuje en la clave, y la diagonal* o r = R, *la reacción en la junta de rotura.*

68. DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LAS JUNTAS POR MEDIO DEL POLÍGONO FUNICULAR.—Se observará que, según la marcha indicada para trazar la curva de presiones, una reacción cualquiera, R_3, por ejemplo (fig. 55), es la resultante del empuje Q con todos los pesos P_1, P_2, P_3... de las dovelas superiores á la junta que se considera. Según eso, puede aplicarse con facilidad á la determinación de estas reacciones el método de composición de fuerzas que se deduce de los principios de la Estática gráfica.

Sea *m n p q* (fig. 62) el trozo de bóveda considerado con su sobre-



carga; P_1, P_2, P_3, P_4 los pesos de las cuatro dovelas en que se ha descompuesto, con sus sobrecargas, las cuales se han trazado á

partir de la horizontal $a\,q$, según la cual obra el empuje en la clave. Sabemos que la reacción R_1 de la segunda junta es la resultante de Q y de P_1; la R_2, que obra en la tercera, es resultante de Q, P_1 y P_2, ó sea, de Q y de la resultante de P_1 y P_2; la R_3 es resultante de Q y de la resultante P_1, P_2, P_3; y así sucesivamente. Para verificar estas composiciones de fuerzas, trazaremos en *(B)* el polígono de las fuerzas P_1, P_2, P_3, P_4, que se reduce á una vertical. Con un polo cualquiera o trazaremos el polígono funicular I-II-III-IV-V, y con su auxilio nos será fácil obtener las resultantes $P_{1\text{-}2}$ de P_1 y P_2, la $P_{1\text{-}2\text{-}3}$ de P_1, P_2, P_3 y la $P_{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$ de P_1, P_2, P_3, P_4. En efecto, la $P_{1\text{-}2}$ pasa por la intersección de los lados I-III del polígono funicular, y su magnitud es $P_1 + P_2$; la $P_{1\text{-}2\text{-}3}$ pasa por la intersección de I-IV, y su valor es $P_1 + P_2 + P_3$; y la $P_{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$ pasa por la intersección de I-V, y es $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Ahora será preciso determinar el empuje en la clave. Para ello, observaremos que la dirección de la reacción en la junta de rotura es $o\,s$, y, por lo tanto, para obtener dicha reacción y el empuje Q en el polígono de las fuerzas (fig. 62 B) bastará trazar por los extremos de la vertical $P_{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$ una horizontal y una paralela á $o\,s$, que serán el empuje Q y la reacción R_4. En la misma figura obtendremos inmediatamente la resultante R_1 de Q y de P_1, la R_2 de Q, P_1 y P_2 y la R_3 de Q, P_1, P_2 y P_3. Y, para obtenerlas en su verdadera posición, bastará trazar las paralelas correspondientes en la figura 62 A por los puntos h, i, j, o en que P_1, $P_{1\text{-}2}$... etc. cortan á la horizontal $a\,q$. Los puntos en que estas reacciones cortan á las juntas respectivas son los puntos de la curva de presiones.

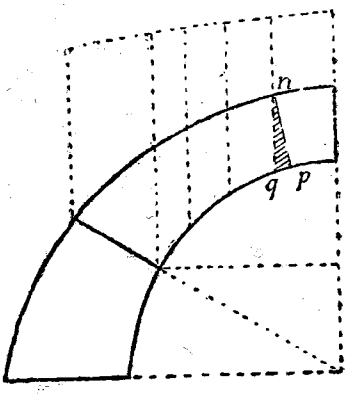
69. PRECAUCIONES PARA TRAZAR CON PRECISIÓN LA CURVA DE PRESIONES. —Si se procede al trazado de la curva de presiones siguiendo la marcha que hemos indicado en el número 61, es decir, componiendo cada reacción con el peso de la siguiente dovela, los errores cometidos en las diversas construcciones gráficas pueden acumularse, y no se obtiene la curva con la precisión que es de desear. El método anterior evita en gran parte esta causa de error, pero aún puede obtenerse mayor exactitud empleando un método propuesto por el ingeniero M. Laterrade, que nos ha dado muy buen resultado en la práctica.

Consiste en descomponer la bóveda, entre las juntas de clave y de rotura, en ocho dovelas, considerarlas luego agrupadas de dos en dos, es decir, descompuesta la bóveda en cuatro dovelas; y, finalmente, agrupadas de cuatro en cuatro, como si sólo se considerase la bóveda descompuesta en dos dovelas; resulta así que podremos hallar algunas de las reacciones de diversas maneras, obteniendo numerosas comprobaciones. Hecha la división, resultarán nueve juntas, y podremos ir hallando las reacciones en el orden siguiente. Empezaremos por obtener el valor de la reacción en la junta núm. 9 al hallar el empuje en la clave. Componiendo luego este empuje con los pesos de las cuatro primeras dovelas tendremos un primer valor de la reacción R_5 en la quinta junta. Puede comprobarse inmediatamente, observando que ha de ser igual y contraria á la resultante de la reacción del apoyo y de los pesos de las cuatro últimas dovelas tomados en sentido contrario. Obtendremos luego la reacción en la tercera junta componiendo el empuje con el peso de las dos primeras dovelas, y tendremos R_3, que deberá ser igual y contraria á la resultante de la reacción en la junta de rotura y de los pesos de las seis últimas dovelas tomados en sentido contrario; á continuación se hallará R_7 componiendo el empuje con el peso de las seis primeras dovelas, comprobándola del mismo modo que en los casos anteriores. Finalmente, se determinarán, como de ordinario, las reacciones R_2, R_4, R_6, R_8 en las juntas 2, 4, 6 y 8 que darán lugar á la comprobación correspondiente. Todas estas operaciones que, á primera vista parecen complicadas, resultan sencillísimas empleando el procedimiento del polígono funicular para la composición de las fuerzas. Aplicaremos este procedimiento al estudiar ejemplos prácticos para que puedan seguirse mejor los detalles de las diversas operaciones.

70. Descomposición por juntas verticales.—Muchos ingenieros, entre ellos M. Lévy, proponen descomponer la bóveda lo mismo que la sobrecarga por planos de junta verticales, lo que simplifica mucho la investigación de los centros de gravedad, que puede hacerse de una sola vez para la bóveda y su sobrecarga (fig. 63). Los errores que así se cometen son, en general, pequeños. En efecto, si en vez de hallar la reacción en la junta np hallamos la correspondiente

á nq, ambas reacciones deben diferir muy poco. El triángulo npq debe hallarse en equilibrio bajo la acción de esas dos reacciones y de su propio peso, y como éste es despreciable comparado con los valores de aquellas, dichas reacciones deben ser casi iguales y contrarias. No hay inconveniente en adoptar esta simplificación cuando se trata de bóvedas cuyas luces no excedan de unos 20 m. y que no sean muy rebajadas, pero creemos preferible la descomposición ordinaria cuando se trata de obras de importancia. Para poder juzgar acerca de la magnitud de las diferencias á que dan lugar estos dos sistemas de descomposición, estudiaremos en el capítulo siguiente una misma bóveda por ambos métodos.

Fig 63.



71. Prolongación de la curva de presiones en el estribo.— Hasta ahora nos hemos ocupado únicamente del trazado de la curva de presiones en la bóveda; pero se comprende sin dificultad que puede seguirse el mismo procedimiento para hallar las presiones máximas en el macizo del estribo. Al efecto, se descompone el estribo en varias porciones por planos horizontales y se prolonga la curva de presiones como si cada una de estas porciones fuera una dovela. En cada plano horizontal, se hacen las mismas comprobaciones que en las juntas de la bóveda, determinando las presiones máximas correspondientes, y los valores que estas alcancen harán ver si los espesores adoptados son suficientes ó exagerados, y si deben aumentarse ó disminuirse, ó pueden adoptarse definitivamente, teniendo en cuenta el coeficiente de resistencia que debe admitirse para la fábrica que se ha de emplear.

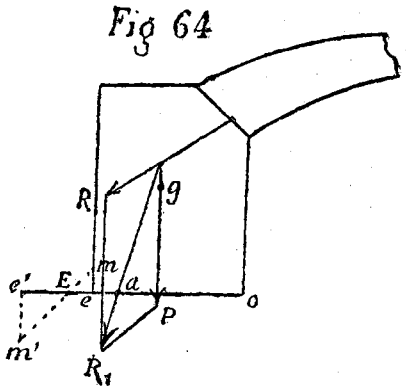
Conviene prolongar la curva de presiones hasta la base del cimiento para determinar la presión máxima que obrará sobre el terreno y poder juzgar si éste ofrecerá suficiente resistencia.

Cuando la altura del estribo es pequeña, puede abreviarse la comprobación considerando todo el estribo como uno sólo de los trozos en que ordinariamente se divide, y se determina la reacción en la

base, componiendo la reacción de la bóveda sobre la junta de arranque con el peso total del estribo aplicado á su centro de gravedad. Este procedimiento no conducirá, en general, á un espesor de estribo que difiera mucho del que se obtendría determinando en él varios puntos de la curva de presiones.

Si se quiere determinar el espesor del estribo en la base de modo que la presión máxima sea igual al coeficiente de resistencia adoptado para la fábrica, puede emplearse un tanteo muy sencillo que conduce rápidamente á una solución suficientemente aproximada. Sea (fig. 64) el estribo, R la reacción de la bóveda sobre el mismo, Oe el espesor provisional de aquel y P su peso. La resultante R_1, de R y P, corta á la base del estribo en el punto a, y podremos determinar la presión máxima en dicha base, que tendrá lugar en la arista proyectada en e. Supongamos que dicha presión máxima sea 6,75 kg. por centímetro cuadrado, y que no deba pasar de 6 kg. Aumentaremos el espesor adoptando el oe', por ejemplo, y en el punto e levantaremos una perpendicular en la que tomaremos, en una escala arbitraria, la magnitud em igual al exceso de 0,75 kg. de la presión correspondiente al espesor oe sobre el coeficiente adoptado. Con el espesor modificado oe' determinaremos la nueva resultante y la presión máxima correspondiente al punto e'; sea ésta 4,50 kg.; llevaremos en $e'm'$, en sentido opuesto á em, la diferencia $6 - 4{,}50 = 1{,}50$; uniendo mm' por una recta obtendremos el punto E, y el espesor buscado será oE. Si se quiere conocer la aproximación obtenida, habrá que determinar la presión máxima correspondiente á este espesor.

Fig 64



Estos tanteos, unidos á la consideración del coeficiente de estabilidad, permiten modificar convenientemente el espesor dado por las reglas empíricas para fijar uno definitivo que, sin ser exagerado, asegure la estabilidad de la obra.

72. Corrección del perfil de la bóveda.—Del mismo modo que

acabamos de indicar se corrigen los espesores de la bóveda en la clave y en la junta de rotura. Sin embargo, debemos observar aquí que la modificación del espesor en la clave hace variar muy poco la presión, de modo que si se quiere reducir ésta de un modo notable, hay que adoptar generalmente espesores exagerados. La presión crece rápidamente con la luz independientemente del espesor que se adopte, y esta observación indica la necesidad de adoptar materiales muy resistentes para las bóvedas de grandes luces, puesto que, aumentando el espesor en la clave dentro de los límites admisibles, no se consigue rebajar la presión en las proporciones necesarias. El rebajamiento de la bóveda ejerce también gran influencia, aumentando la presión máxima en la clave á medida que el arco es más rebajado.

Estas consideraciones demuestran que la teoría no da medios para fijar convenientemente el espesor en la clave de las bóvedas, y explica la importancia que hemos dado al estudio de las fórmulas empíricas, único medio de que dispone el constructor para fijarlo.

El espesor en la junta de rotura dado por las reglas empíricas puede modificarse en vista de las presiones máximas que se obtengan, consiguiéndose con ello modificar convenientemente la forma de la curva de presiones para alejarla del trasdós ó del intradós en determinadas regiones, y, en último resultado, disminuir la presión máxima.

73. Noticia de las teorías de Dupuit y Durand-Claye.—Entre las innumerables teorías que, como complemento de la de Méry, se han publicado, merecen especial mención la de Dupuit y la de Durand-Claye.

Dupuit, fundándose en ciertas consideraciones relativas al descimbramiento, admite que la curva de presiones pasa tangencialmente al trasdós en la clave y al intradós en la junta de rotura. Su teoría, en la que no puede menos de reconocerse un gran fondo de verdad y cuyo estudio es muy interesante para el ingeniero, tiene el inconveniente de no conducir al valor de la presión máxima que sufre la bóveda, dato que, aun siendo puramente convencional como el que resulta de la curva de Méry, es el que más clara idea suministra de las condiciones de estabilidad de una bóveda. Así es que, en la re-

dacción de proyectos, casi siempre se aplica el método de Méry, por lo cual omitimos la exposición del de Dupuit (1).

El método de Durand-Claye, complementario del de Méry, tiene por objeto evitar la indeterminación de la curva de presiones; consíguelo su autor por un procedimiento ingeniosísimo que sería difícil dar á conocer con una explicación breve. Pero, su aplicación exige una larga serie de construcciones gráficas muy laboriosas, razón por la cual se aplica raras veces. Acerca de esta teoría, que puede estudiarse en los *Annales des ponts et chaussées*, primer semestre de 1867 (2), dice Morandière lo siguiente:

«En nuestros proyectos, en vez de investigar esta *curva real*, por medio de construcciones bastante numerosas cuyo principio nos ha dado á conocer M. Durand-Claye, será mucho más sencillo trazar inmediatamente la curva de presión que resulta de la experiencia (alude á la de Méry), estudiar bien su situación respecto al intradós y al trasdós, y determinar las acciones que se deducen de ella sobre las diversas juntas y sobre el estribo.

»Como hemos dicho, estos estudios y el trazado de estas curvas manifestarán siempre del modo más útil, cómo se establecen las leyes de equilibrio, cómo se reparten y dirigen las presiones; cuáles son los puntos débiles, dónde y cómo deben establecerse las resistencias. Por medio de numerosos estudios de este género puede un ingeniero llegar á ser rápidamente un buen práctico y un buen constructor.»

Lo mismo opina Croizette-Desnoyers, quien concede gran importancia al estudio de la curva de presiones de Méry para fijar convenientemente los espesores de las diversas partes de un puente de fábrica.

De acuerdo con dichos eminentes ingenieros, creemos suficientes para todo constructor las nociones teóricas expuestas que bastan

---

(1) Puede estudiarse la teoría de Dupuit en su *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction de ponts en maçonnerie.*

Se encuentran extractos bastante extensos de la misma en el formulario de Claudel, 0.ª edición, y en el *Manuel de l'Ingénieur* de Débauve.

(2) También puede verse un extracto de esta teoría en el *Cours de Mécanique appliquée aux onstructions* de E. Collignon.

para trazar la curva de presiones y deducir las consecuencias útiles en la práctica, debiendo, sin embargo, completarse con la resolución de un gran número de ejemplos prácticos que dan ocasión frecuentemente á observaciones de mucha utilidad para quien trata de proyectar puentes de fábrica.

Con el objeto de iniciar al lector en este trabajo, estudiaremos en el siguiente capítulo algunos ejemplos de aplicación con todos los detalles que requiere en la práctica el estudio de la resistencia y estabilidad de una bóveda.

CAPÍTULO IV.

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LOS MÉTODOS DE COMPROBACIÓN DE LA ESTABILIDAD DE LAS BÓVEDAS.

---

74. ARCO ELÍPTICO DE 24 M. DE LUZ Y 9,70 DE FLECHA.—Trataremos, en primer lugar, de la comprobación de un arco elíptico; todas las construcciones serían idénticas para un arco de medio punto (figuras 65 y 66, *láminas 6 y 7).*

Tracemos el perfil de ensayo, empezando por dibujar la elipse de intradós; según el cuadro núm. 3, podemos adoptar para espesor en la clave 1 m., conforme á varias de las fórmulas que en él figuran. Tomemos luego la normal de la junta de rotura correspondiente á la mitad de la altura de la flecha, y en ella fijemos el espesor; adoptaremos 1,82 m., conforme á la regla indicada en el núm. 47, teniendo presente que el rebajamiento de este arco está comprendido entre el del medio punto y $^1/_4$. Los cuadros números 7 y 8 nos darán el espesor aproximado del estribo á la altura de los arranques, que es 6 m. Se trazará el arco de círculo del trasdós y los paramentos del estribo, que suponemos verticales; y, para enlazar el paramento interior del estribo con el trasdós, tomaremos en dicho paramento un punto situado á 2 m. sobre la junta de arranque y desde él trazaremos la tangente al arco de círculo. Limitaremos inferiormente la altura del estribo, que admitimos sea de 3,20 m., y con esto tendremos completado el perfil provisional; vamos á comprobarlo sucesivamente por el método del coeficiente de estabilidad y de la curva de presiones.

75. Comprobación por el método del coeficiente de estabilidad.—Dada la importancia de este arco, se supone que la sobrecarga es fábrica aligerada, y repartida de un modo continuo sobre el trasdós, queda limitada por la línea quebrada que se observa en la figura 65 (A). Como esta reducción no exige más que una sencilla cubicación, omitimos los detalles para no distraer al lector del objeto principal.

Lo primero que necesitamos conocer para determinar el coeficiente de estabilidad es el peso de la parte de bóveda situada encima de la junta de rotura con su sobrecarga, en magnitud y posición. Para determinarlo con facilidad, y al mismo tiempo con suficiente exactitud, descompondremos esta parte de la bóveda en cinco porciones, por medio de juntas verticales, como se ve en la figura.

Estas porciones se convierten en trapecios, si se sustituye el lado curvilíneo por su cuerda, y, por lo tanto, nos será fácil determinar sus áreas y sus centros de gravedad. En la figura pueden seguirse las construcciones necesarias para determinar estos centros, según la regla dada en el número 66.

Calculando luego las áreas de estos trapecios, obtendremos los pesos correspondientes, en una profundidad de un metro según la generatriz del cañón, con sólo multiplicar aquellas por el peso del metro cúbico de fábrica, que admitimos sea 2.400 kg. Así formaremos el siguiente cuadro:

Dovelas.	Areas. — *Metros cuadr.*	Pesos parciales. — *Kilogramos.*	Peso total. — *Kilogramos.*
1	4,78	11.472	
2	5,60	13.440	
3	7,40	17.760	78.912
4	8,13	19.512	
5	6,97	16.728	

Podemos ya dibujar en magnitud y posición estos pesos *1, 2,... 5*, cuya resultante debemos determinar. Para ello trazaremos un polígono funicular. Formemos (fig. 65 B) el polígono de las fuerzas,

llevando unas á continuación de otras las líneas *1*, *2*, *3*, *4*, *5* en la escala adoptada, que es de 1 mm. por tonelada.

Desde un polo arbitrario *o* trazamos los radios I, II,... VI, y luego, en la figura 65 A, las paralelas de igual nombre limitadas en las verticales de las fuerzas *1*, *2*,... *5*. Según sabemos, la resultante buscada, cuyo valor es, en números redondos, de 79.000 kg., pasa por la intersección de los lados I y VI del polígono funicular, quedando, por consiguiente, determinada. Este es el peso que hemos llamado p al exponer la teoría.

Determinaremos ahora el peso p' del macizo correspondiente al apoyo y arranque de la bóveda hasta la junta de rotura (núm. 55). Observaremos que, en este caso, se compone de un gran trapecio, cuya altura es el espesor del estribo, y de un pequeño triángulo mixtilíneo correspondiente al arranque de la bóveda. Nada más fácil que hallar los pesos y los centros de gravedad de estas dos figuras y componerlas luego. En la figura se indica el resultado, y el valor de este peso es $p' = 185.000$ kg.

La determinación de los pesos p y p' es la parte más laboriosa de la comprobación por el método del coeficiente de estabilidad. Ahora sólo hace falta aplicar las fórmulas [1] y [2] del número 55. Para seguir el cálculo con todo detalle, recordando al mismo tiempo los razonamientos, indiquemos en la figura la posición de las dos palancas $a\,b$ y $b\,c$, cuyo equilibrio hemos de expresar. El lector conoce ya la posición de los puntos a y b en sus juntas respectivas, y recordará que, de acuerdo con Morandière, podemos tomar el punto c á 0,30 m. de la arista exterior del estribo.

Mediremos en la figura los diversos brazos de palanca necesarios para la aplicación de las ecuaciones [1] y [2], y teniendo presentes las notaciones allí empleadas (véase la figura 54), tendremos:

$$y = 5{,}20 \text{ m.}$$
$$d = 3{,}50$$
$$y' = 8{,}35$$
$$x' = 7{,}12$$
$$d' = 2{,}80$$

La ecuación [1] nos da

$$Q = \frac{p\,d}{y} = \frac{79.000 \times 3{,}50}{5{,}20} = 53.173 \text{ kg.}$$

El momento del empuje $Q\,y'$, necesario para la aplicación de la ecuación [2], es

$$Q\,y' = 53.173 \times 8{,}35 = 443.995.$$

El momento resistente es

$$p\,x' + p'\,d' = 79.000 \times 7{,}12 + 185.000 \times 2{,}80 = 1.080.480.$$

La ecuación [2] se convierte en

$$1.080.480 = m \times 443.995$$

de donde

$$m = \frac{1.080.480}{443.995} = 2{,}43$$

que es el coeficiente de estabilidad buscado.

Este coeficiente es exagerado é indica la posibilidad de reducir el espesor del estribo. Según se ha dicho, no debe exceder del valor 2.

Determinemos las presiones media y máxima en la clave.

Para ello, bastará dividir el empuje Q por el área de la junta de la clave expresada en centímetros cuadrados. Como el espesor es 1,00 m., y hemos de considerar una profundidad de 1,00 m. según la generatriz, dicha área es 10.000 cm.², y la presión media

$$\frac{53.173}{10.000} = 5{,}32 \text{ kg. por cm.}^2$$

Estando la fuerza aplicada al tercio de la junta, la presión máxima será $2 \times 5{,}32 = 10{,}64$ kg. por centímetro cuadrado, y se ejercerá en el trasdós.

Para hallar las presiones en la junta de rotura, debemos hallar la resultante de las fuerzas p y Q. Como comprobación, dicha resultante debe pasar por el punto b. Esta composición se ha efectuado en la figura 66, y se obtiene la resultante $R_8 = 94.750$ kg. Como forma con la normal á la junta un ángulo pequeño de 1° 30′, esta resultante se confunde sensiblemente con su componente normal á

la junta; siendo la longitud de ésta 1,82 m., el área en centímetros cuadrados es 18.200, y la presión media

$$\frac{94.750}{18.200} = 5{,}20 \text{ kg.}$$

La presión máxima será $2 \times 5{,}20 = 10{,}40$ kg. por centímetro cuadrado y se ejerce aquí en el intradós.

Se observa que las presiones en la clave y en la junta de rotura difieren muy poco, y que son moderadas para los materiales de buena calidad que necesariamente habrán de emplearse en una bóveda de esta importancia.

Los resultados anteriores indican la conveniencia de admitir las dimensiones de la bóveda y de reducir el espesor del estribo. Podría repetirse el cálculo con un espesor de 5 m., y un tanteo análogo al indicado en el núm. 71 nos daría la solución definitiva.

76. COMPROBACIÓN DE LA MISMA BÓVEDA POR MEDIO DE LA CURVA DE PRESIONES (fig. 66, *lám. 7*).—Estudiemos la estabilidad de esta bóveda por el método de la curva de presiones. Para mayor claridad, nos ocuparemos, en primer lugar, exclusivamente de la parte de bóveda situada por encima de la junta de rotura *m n*. Observaremos, desde luego, que al trazar el trasdós, resulta generalmente que las juntas próximas á la de rotura quedan limitadas por la tangente, siendo su espesor mayor que si se limitasen por el arco de círculo. Pero este exceso constituye muchas veces un verdadero relleno, no aparejado en bóveda, y debe considerarse más bien como agregado á la sobrecarga. En el caso actual, este macizo comprendido entre el arco de círculo del trasdós y su tangente es muy pequeño, pero en otras ocasiones adquiere mayor importancia, y resulta que, si se consideran las juntas de la bóveda como limitadas en la tangente, las presiones medias y máximas disminuyen mucho, mientras que limitadas en el arco de círculo difieren poco de las correspondientes á la clave. Resulta de aquí que, si ese macizo no está aparejado como bóveda, es indispensable adoptar la segunda solución, y, si lo está, también es preferible adoptarla, porque es muy poco probable que las resultantes de las presiones, que en esta región obran cerca del intradós, se repartan en extensiones tan considerables; en todo

caso, nos ponemos así en la hipótesis más desfavorable á la estabilidad, como conviene siempre que hay duda.

Sigamos ahora con todo detalle las construcciones gráficas ejecutadas en la figura 66. Se ha trazado la bóveda en la forma ya explicada, en escala de 1 por 100, que es suficiente en este caso para no producir confusión en la figura, y para poder medir con bastante exactitud las longitudes necesarias. Después se ha dividido la parte de bóveda comprendida entre la junta de clave y la de rotura *m n* en ocho dovelas de igual espesor en el intradós. Las normales al intradós se han limitado en el arco de círculo del trasdós, y desde estos puntos se han trazado las verticales que limitan las sobrecargas correspondientes á cada dovela.

Se han determinado, á continuación, los centros de gravedad de las sobrecargas por la regla correspondiente á los trapecios, núm. 66, y los de las dovelas propiamente dichas que son cuadriláteros, por la construcción expuesta en el mismo lugar. Al hallar estos últimos se observa que difieren muy poco del punto de intersección de las diagonales, especialmente de las dovelas próximas á la clave, cuya forma difiere muy poco de un rectángulo. No hay inconveniente en admitir en la práctica esta simplificación, al menos para las cuatro primeras dovelas. Se han determinado las áreas de las sobrecargas y de las dovelas, midiendo para ello las longitudes necesarias; estas áreas se consignan en el cuadro que insertamos más adelante, y resume todos los datos y resultados que se van obteniendo.

Conocidas estas áreas parciales, se pueden determinar los centros de gravedad de cada dovela con su sobrecarga, dividiendo las rectas que unen los centros de gravedad de la dovela y de su sobrecarga en dos partes inversamente proporcionales á las áreas correspondientes. Finalmente, sumando las áreas de la dovela y de la sobrecarga, y multiplicando las áreas totales por el peso, 2.400 kg., del metro cúbico, se obtienen los pesos *1*, *2*, *3*... *8*. En el cuadro figuran los resultados de todas las operaciones numéricas. En la figura se han trazado las verticales *1*, *2*... *8*, á partir de la horizontal que pasa por el tercio superior de la junta de la clave, línea de acción del empuje, con longitudes iguales á los pesos obtenidos y en la escala de 2 mm. por tonelada.

No se han conservado las construcciones auxiliares para la determinación de los centros de gravedad, para evitar la confusión en la figura.

Hechas estas construcciones preliminares, pasemos á trazar la curva de presiones. Siguiendo el procedimiento indicado en los números 67, 68 y 69, tendremos que trazar un polígono funicular que facilite la determinación de las resultantes de los pesos de las dovelas *1* y *2*, que llamaremos *1-2*, de las *3* y *4*, ó sea *3-4*, etc. Para ello elegiremos un polo arbitrario *o*, y trazaremos los radios vectores I, II, III... IX fig. 66 (B). Trazando las paralelas correspondientes, tendremos el polígono funicular I, II, III... IX en la fig. 66 (A), el cual nos permitirá determinar fácilmente las resultantes que buscamos *1-2*, *3-4*, *5-6*, *7-8*; después las de las dovelas reunidas de cuatro en cuatro *1-2-3-4* y *5-6-7-8*; y, finalmente, la resultante *P* de los pesos de las ocho dovelas.

La resultante *1-2* vendrá aplicada en la vertical de la intersección de los lados I y III; la *3-4* en la intersección de III y V; la *5-6* en la de V y VII, y la *7-8* en la de VII y IX.

Del mismo modo encontraremos la resultante *1-2-3-4* aplicada en la interseción de los lados I y V del polígono funicular, y la *5-6-7-8* aplicada en la intersección de los lados V y IX.

Finalmente, obtendremos la resultante *P* de los pesos de las ocho dovelas en la intersección de los lados extremos I y IX del polígono funicular.

Todas estas resultantes se toman á partir de la horizontal del tercio superior de la junta de la clave.

Vamos ahora á obtener el empuje en la clave. Conocemos su línea de acción; la de la reacción de la junta de rotura *m n* es la recta que une el punto situado al tercio inferior de esta junta con la intersección del peso *P* y de la horizontal del empuje. Por lo tanto, trazaremos en la figura (B) una horizontal por el extremo superior del polígono de las fuerzas *1, 2, 3... 8*, y una paralela á la reacción por el extremo opuesto; se cortan en el punto *O'*, y así tendremos el empuje en la clave *Q* y la reacción de la junta de rotura R_8. Sus valores, medidos con la escala, resultan ser 53.250 kg. y 94.750 kg., sensiblemente iguales á los obtenidos al estudiar la aplicación del

método del coeficiente de estabilidad. Uniendo el punto O' con los extremos inferiores de las fuerzas *1, 2, 3...* en la figura (B) tendremos, en magnitud y dirección, las resultantes R_1, R_2, R_3... R_8 de Q y el peso *1,* de Q con *1* y *2,* de Q con *1, 2, 3...* y de Q con P.

Desde el punto de intersección del empuje con *1-2-3-4* (fig. A) trazaremos una paralela á R_4 (fig. B), y en el punto en que corta á la junta *5*, obtendremos el punto *5* de la curva de presiones. Prolongada esta línea, vemos que pasa por la intersección de *5-6-7-8* con R_8, como debe suceder, puesto que la resultante de estas dos fuerzas ha de ser igual y contraria á R_4.

Trazando por la intersección de *1-2* con la horizontal del empuje (fig. A) la paralela á R_2 (fig. B) obtendremos en la intersección con la junta *3* el punto *3* de la curva.

Obtendremos el punto *7* de la misma en la intersección de la junta correspondiente con la paralela á R_6 trazada desde la intersección de la vertical en que se cortan los lados I y VII del funicular con la horizontal del empuje.

Todos los puntos anteriormente determinados pueden comprobarse por el procedimiento explicado al tratar del punto *5*.

Quedan por determinar los puntos *2, 4, 6* y *8*.

Se determinarán por idéntico procedimiento que los anteriores, trazando paralelas á las reacciones R_1, R_3, R_5 y R_7 desde los puntos de intersección de las resultantes de los pesos de todas las dovelas superiores á la junta considerada con la horizontal del empuje. Así, para el punto *6*, por ejemplo, dicha resultante será la vertical que pase por la intersección de los lados I y VI del funicular.

De este modo hemos obtenido la curva de presiones en la bóveda. Ahora podemos examinar si las tres condiciones de estabilidad se hallan satisfechas. En primer lugar observaremos que la curva se halla comprendida en el espesor de la bóveda como exige la primera condición. Mediremos con un trasportador los ángulos de las reacciones con las normales á las juntas correspondientes, los cuales se hallan consignados en el cuadro, y puede observarse que el mayor, que corresponde á R_5, es de 2° 30′ muy inferior á 27°. Luego la segunda condición relativa al deslizamiento de las dovelas se halla holgadamente satisfecha.

Para calcular la presión máxima y comprobar la 3.ª condición, debemos proyectar las diversas reacciones sobre las normales á las juntas. Pero, como los ángulos son muy pequeños, las reacciones son casi iguales á las componentes normales y puede excusarse esta operación. Para convencerse de ello basta proyectar la R_5 sobre una recta que forme con ella el ángulo de 2° 30′, que es el mayor, y se verá que, midiendo con la escala la hipotenusa y el cateto mayor del triángulo rectángulo que resulta, la diferencia es inapreciable. Pueden, por lo tanto, tomarse para calcular las presiones medias las reacciones mismas en vez de sus componentes normales.

En la columna siguiente del cuadro se consignan las longitudes de las juntas. Dividiendo las reacciones por las longitudes correspondientes, multiplicadas por 10.000 para obtener en centímetros cuadrados las áreas correspondientes á 1 m. de cañón, tendremos las presiones medias consignadas en el mismo cuadro. En la siguiente columna se ha inscrito la menor de las distancias al trasdós ó al intradós de cada uno de los puntos de la curva de presiones, haciendo preceder la cifra de una *t* ó de una *i*, según que dicha distancia sea medida al trasdós ó al intradós. Con estos datos se pueden aplicar las fórmulas que dan la presión máxima, núm. 33, teniendo en cuenta para su elección si el punto de aplicación de la reacción se halla en el tercio central ó fuera de dicha zona, y que en las juntas de la clave y de rotura se halla precisamente en el tercio, por lo cual la presión máxima es doble de la media. La última columna del cuadro indica las presiones máximas, haciendo ver si se realizan en el trasdós ó en el intradós, la notación explicada para la columna anterior.

Hé aquí el cuadro mencionado, en el cual podrán seguirse todas las operaciones numéricas.

Número de orden de las dovelas.	ÁREAS			PESOS.	Número de orden de las juntas.	REACCIONES.	Angulos de las reacciones con las normales á las juntas.	Longitud de las juntas.	Presiones medias.	Distancias de la curva al trasdós ó al intradós.	Presiones máximas.
	de las sobrecargas — *Metr. cuad.*	de las dovelas — *Metr. cuad.*	totales. — *Metr. cuad.*	— *Kilogramos.*		— *Kilogramos.*		— *Metros.*	— *Kg. por cm.²*	— *Metros.*	— *Kg. por cm.²*
					1	$Q = 53.250$	0	1,00	5,32	t 0,33	t 10,64
1	0,67	1,55	2,22	5.328	2	$R_1 = 53.500$	1°	1,00	5,35	t 0,35	t 10,16
2	0,79	1,55	2,34	5.616	3	$R_2 = 54.500$	0° 10′	1,00	5,45	t 0,35	t 10,35
3	1,04	1,64	2,68	6.432	4	$R_3 = 56.000$	1° 30′	1,05	5,33	t 0,45	t 7,68
4	1,55	1,73	3,28	7.872	5	$R_4 = 59.000$	1°	1,12	5,27	t 0,55	t 5,53
5	2,17	1,85	4,02	9.648	6	$R_5 = 63.500$	2° 30′	1,22	5,20	t 0,60	t 5,46
6	2,80	1,90	4,70	11.280	7	$R_6 = 70.250$	1° 30′	1,35	5,20	i 0,58	i 7,28
7	3,90	2,30	6,20	14.880	8	$R_7 = 80.750$	50′	1,57	5,14	i 0,55	i 9,66
8	4,74	2,62	7,36	17.664	9	$R_8 = 94.750$	1° 30′	1,82	5,20	i 0,60	i 10,40

Pasemos ahora á la comprobación del arranque de la bóveda y del estribo.

El procedimiento que debemos seguir es el mismo que para la bóveda. Se ha descompuesto la parte comprendida entre el arranque y la junta de rotura en tres dovelas, y el estribo se ha considerado como una sola dovela. En la dovela inmediata á la junta de rotura se ha sustituído el verdadero trasdós por la línea ln y en la de arranque por ij; los triángulos segregados se han considerado como formando parte de la sobrecarga, con lo cual la dovela sigue teniendo la forma de un cuadrilátero, y la sobrecarga de un trapecio, de modo que, para hallar los centros de gravedad, se aplican las mismas reglas que al tratar de la bóveda. Es evidente que esta descomposición no afecta á la posición del centro de gravedad ni al peso de cada porción, y, por consiguiente, no altera el resultado. Es fácil, por lo tanto, hallar los centros de gravedad G_9, G_{10}, G_{11} y G_{12} de los cuatro trozos considerados. Al hallar los pesos de estos trozos, observaremos que son mucho mayores que los obtenidos en la bóveda, y esto nos obliga á adoptar una escala de fuerzas mucho menor; la nueva escala es de 4 t. por mm. Con ella se ha trazado el polígono de las fuerzas R_8, *9*, *10*, *11* y *12* (fig. 66 C), que son las que debemos considerar para continuar la curva de presiones.

Este polígono nos da inmediatamente las reacciones R_9, R_{10}, R_{11} y R_{12}, y trazando las paralelas por los puntos de encuentro de las componentes, en la figura A, del mismo modo que en la bóveda, hallaremos los puntos *10*, *11*, *12* y *13* de la curva de presiones. La comprobación se continúa como en la bóveda, y el cuadro siguiente, dispuesto como antes se explicó, permite seguir los detalles de las operaciones, y contiene todos los resultados:

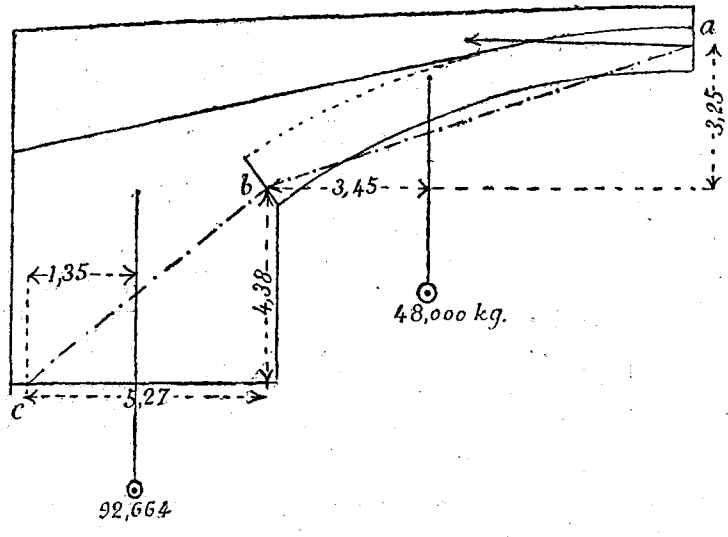
Número de orden de las dovelas.	ÁREAS			PESOS.	Número de orden de las juntas.	REACCIONES.	Angulos de las reacciones con las normales á las juntas.	Componentes normales de las reacciones.	Longitud de las juntas.	Presiones medias.	Distancias de la curva al trasdós ó al intradós.	Presión máxima.
	de las sobrecargas. — *Met. cuad.*	de las dovelas. — *Met. cuad.*	totales — *Met. cuad.*	— *Kilogramos.*		— *Kilogramos.*		— *Kilogramos.*	— *Metros.*	— *Kg. por cm.²*	— *Metros.*	— *Kg. por cm.²*
9	10,35	4,75	15,10	36.240								
					10	$R_9 = 124.000$	0	124.000	3,20	4,13	*i* 1,00	*i* 8,26
10	14,45	8,39	22,82	54.768								
					11	$R_{10} = 176.000$	3°	176.000	5,15	3,42	*i* 1,82	*i* 6,26
11	9,00	13,00	21,00	50.400								
					12	$R_{11} = 224.000$	12°	218.000	6,00	3,63	*i* 2,65	*i* 4,92
12	»	19,20	19,20	46.080								
					13	$R_{12} = 270.000$	10° 30′	264.000	6,00	4,40	*t* 2,70	*t* 5,72

El examen de los dos cuadros que preceden nos hace ver que, en la bóveda, las presiones medias en las diversas juntas difieren muy poco entre sí, y las mayores presiones máximas tienen lugar en las juntas de clave y de rotura. Estas son las que pudimos calcular por el procedimiento del coeficiente de estabilidad, y, por lo tanto, los resultados anteriores confirman la consecuencia que allí dedujimos, á saber: que las dimensiones adoptadas para la bóveda son aceptables.

Las presiones máximas en el estribo son de 4,92 kg. por centímetro cuadrado en la junta de arranque, y de 5,72 kg. en la base. Sería necesario conocer la resistencia de la fábrica que se ha de emplear para juzgar si las dimensiones adoptadas son convenientes, pero desde luego se observa que dichas presiones son muy moderadas, y que no hace falta una fábrica de gran resistencia para que aquellas puedan aumentarse sin peligro. Se podrá, empleando las fábricas usuales, disminuir algo el espesor de este estribo, especialmente en la junta de arranque, conforme á la indicación obtenida por el método del coeficiente de estabilidad. Si se quisiera determinar el espesor estrictamente necesario para que la presión máxima de la fábrica fuera una cifra determinada, procederíamos á verificar el tanteo explicado en el núm. 71.

77. Arco escarzano de 18 m. rebajado al $\frac{1}{6}$ (fig. 67).—Empeza-

Fig 67.



remos por determinar las dimensiones del perfil de ensayo. Se calcula el radio por la fórmula del núm. 46 en que deberá sustituirse $l = 18$; $f = 3$; de modo que

$$R = \frac{\frac{l^2}{4} + f^2}{2f} = 15 \text{ m.}$$

Calcularemos por la relación hallada en el mismo párrafo el semiángulo en el centro, y resulta

$$\text{sen } \alpha = \frac{l}{2R} = 0{,}60$$

que corresponde á $\alpha = 36^\circ\ 53'$.

Obtendremos el espesor en la clave por la fórmula de Croizette-Desnoyers

$$e = 0{,}15 + 0{,}14 \sqrt{2R} = 0{,}92$$

y adoptaremos, redondeando esta cifra, $e = 0{,}95$ m.

Para espesor en el arranque resulta de las reglas establecidas $1{,}40\ e = 1{,}31$ m., ó sea 1,35, redondeando la cifra.

Con el auxilio de los cuadros números 5 y 6, fijaremos el espesor del estribo. El primero da, para $f = 3$ y $L = 18$, $K = 8{,}90$.

Con este valor de K y $m = \frac{4{,}00}{8{,}50} = 0{,}47$, el cuadro núm. 6 da $E = 6{,}05$ m.

La fórmula de Lesguiller, según los cuadros 9 y 10 da, para este caso, $E = 5{,}68$ m.

Como la fórmula de Leveillé representada por los cuadros 5 y 6, da generalmente valores algo exagerados, tomaremos un término medio entre ambos resultados, y adoptaremos el valor $E = 5{,}80$ m.

Con estos datos podremos ya trazar el perfil de ensayo (fig. 67); vamos á proceder á la comprobación de este perfil, empezando por aplicar el procedimiento del coeficiente de estabilidad.

78. Comprobación por el método del coeficiente de estabilidad. —Para evitar repeticiones inútiles, prescindiremos de la determinación del peso de la semi-bóveda y del estribo, tomando los que han

resultado de la aplicación por el método de la curva de presiones, que hemos de estudiar á continuación. Claro está que, si se fuera á aplicar exclusivamente el método del coeficiente de estabilidad, habría que determinarlos empleando el mismo procedimiento explicado al tratar del arco elíptico.

En la figura aparecen acotados estos pesos y los brazos de palanca que han de emplearse; de modo que, para la aplicación de las fórmulas, tendremos:

$$\begin{aligned} p &= 48.000 \text{ kg.} \\ p' &= 92.664 \text{ »} \\ y &= 3{,}25 \text{ m.} \\ d &= 3{,}45 \text{ »} \\ y' &= 4{,}38 \text{ »} \\ x' &= 5{,}27 \text{ »} \\ d' &= 1{,}35 \text{ »} \end{aligned}$$

Tomando los momentos de Q y p respecto al punto b, tendremos

$$3{,}25 \times Q = 48.000 \times 3{,}45;$$

luego

$$Q = \frac{48.000 \times 3{,}45}{3{,}25} = 50.953 \text{ kg.}$$

Suponiendo trasladadas las fuerzas Q y p al punto b, obrarán sobre la palanca $b\,c$ dichas dos fuerzas y el peso p'; tiende á volcarla hacia el exterior la Q y se oponen á este movimiento las p y p'. El momento de la primera es

$$Q\,y' = 48.000 \times 4{,}38 = 210.240.$$

El momento resistente será

$$p\,x' + p'\,d' = 48.000 \times 5{,}27 + 92.664 \times 1{,}35 = 377.956.$$

Tendremos, pues,

$$377.956 = 210.240\ m$$

y

$$m = \frac{377.956}{210.240} = 1{,}79.$$

Este valor del coeficiente de estabilidad es perfectamente aceptable, según las reglas establecidas.

La presión en la clave se calculará fácilmente. El área expresada en centímetros cuadrados, será $95 \times 100 = 9.500$; luego la presión media será $\frac{50.953}{9.500} = 5{,}36$ kg. y la máxima el doble de la anterior, ó sea, 10,72 kg. por centímetro cuadrado.

Para hallar las presiones en la junta de rotura, podríamos proyectar p y Q sobre la normal á dicha junta, y su suma sería la componente normal con arreglo á la cual se deben calcular las presiones media y máxima. Debiendo hallarla al aplicar el método de la curva de presiones, omitiremos este cálculo, por otra parte sencillísimo.

79. Comprobación del mismo arco por medio de la curva de presiones (fig. 68, *lám. 6*).—Después de las explicaciones detalladísimas, dadas al tratar del ejemplo anterior, le será fácil al lector seguir todas las construcciones en la figura 68, con la ayuda del cuadro que resume las operaciones numéricas. Procuraremos, en vista de ello, ser breves en su descripción.

Hecha la descomposición en ocho dovelas (considerando limitada la bóveda en el trasdós por el arco de círculo en toda su extensión), y, obtenidas las sobrecargas correspondientes, que se suponen limitadas en la horizontal trazada de puntos por tratarse de un relleno de tierra, se han reducido las alturas de estas sobrecargas en la relación de $\frac{1.800}{2.200}$, que es la de las densidades que suponemos á las tierras y á la fábrica; así obtenemos la línea quebrada que representa la sobrecarga en el supuesto de que sea de fábrica. Fácilmente se podría tener en cuenta la carga accidental de los vehículos, y convendría hacerlo si se tratase de un ferrocarril; pero si se trata de un puente para carretera, esta sobrecarga influye muy poco en las presiones, porque es insignificante comparada con los pesos de las fábricas, del firme y del relleno.

No nos detendremos en repetir cómo se han obtenido los centros de gravedad G_1, G_2... de las dovelas con su correspondiente sobrecarga, y los pesos de las mismas *1, 2*... que se han trazado partiendo de la horizontal del tercio superior de la clave, en la escala de 2 mm. por tonelada.

A continuación, por medio del polígono de las fuerzas (fig. 68 B) y del funicular I-II-III... IX correspondiente al polo *o*, hemos obtenido las resultantes dos á dos, *1-2*, *3-4*,... las resultantes cuatro á cuatro, *1-2-3-4* y *5-6-7-8*, y, finalmente, la resultante de todas las dovelas, *P*.

Se ha obtenido el empuje en la clave y la reacción R_8 en la junta de arranque en el polígono *o'* de las fuerzas (fig. 68 B), trazando por el extremo superior la horizontal *Q*, y por el inferior la paralela R_8 á la recta que une el tercio inferior de la junta de arranque con la intersección de *P* y *Q* en la figura (A).

Inmediatamente se trazan en el polígono *o'* las reacciones R_1, R_2,... iguales y paralelas á las que obran en las diversas juntas.

Hallamos, luego, sus posiciones verdaderas, y obtenemos los puntos correspondientes de la curva de presiones en el orden siguiente: 1.°, en la 5.ª junta, trazando la paralela á R_4 por la intersección de *Q* con *1-2-3-4*; 2.°, las correspondientes á las juntas 3.ª y 7.ª, cuyas reacciones son R_2 y R_7, y 3.°, las de las juntas 2, 4, 6 y 8. Cada construcción se comprueba como ya sabemos.

Después se miden las longitudes de las juntas, las distancias de los puntos hallados al extremo más próximo de las juntas correspondientes, y, finalmente, las presiones medias y máximas, todo lo cual se consigna en el siguiente cuadro.

Se ha prescindido de indicar los ángulos de las reacciones con las normales á las juntas, que son, como de ordinario, muy pequeños, y no se han tenido en cuenta al calcular las presiones.

Número de orden de las dovelas.	ÁREAS			PESOS. — *Kilogramos.*	Número de orden de las juntas.	REACCIONES. — *Kilogramos.*	Longitud de las juntas. — *Metros.*	Presiones medias. — *Kg. por cm.²*	Distancias de la curva al trasdós ó al intradós. — *Metros.*	Presiones máximas. — *Kg. por cm.²*
	de las sobrecargas — *Metr. cuad.*	de las dovelas. — *Metr. cuad.*	totales. — *Metr. cuad.*							
					1	$Q = 50.500$	0,95	5,21	*t* 0,31	*t* 10,42
1	1,14	0,50	1,64	3.608	2	$R_1 = 50.750$	0,96	5,27	*t* 0,33	*t* 10,17
2	1,14	0,61	1,75	3.850	3	$R_2 = 51.000$	0,98	5,20	*t* 0,35	*t* 9,62
3	1,25	0,84	2,09	4.598	4	$R_3 = 51.800$	1,00	5,18	*t* 0,37	*t* 9,22
4	1,25	1,00	2,25	4.950	5	$R_4 = 53.500$	1,05	5,09	*t* 0,45	*t* 7,13
5	1,32	1,32	2,64	5.808	6	$R_5 = 55.500$	1,10	5,04	*t* 0,48	*t* 6,95
6	1,44	1,76	3,20	7.040	7	$R_6 = 58.500$	1,15	5,08	*t* 0,55	*t* 5,89
7	1,46	2,24	3,70	8.140	8	$R_7 = 63.250$	1,25	5,05	*i* 0,60	*i* 5,76
8	1,61	2,90	4,51	9.922	9	$R_8 = 69.750$	1,35	5,16	*i* 0,44	*i* 10,32

El estribo se ha comprobado abreviadamente hallando su peso total (incluso la sobrecarga), y componiéndolo con la reacción R_8 de la bóveda. Para determinar el peso y el centro de gravedad, se ha descompuesto la figura en dos trapecios en la parte superior, y un rectángulo en la inferior, por medio de dos horizontales trazadas por los extremos de la junta de arranque; á los trapecios se ha aplicado la construcción conocida para la determinación de los centros de gravedad g' y g'', como puede verse en la figura, y el del rectángulo es su centro geométrico g'''. La determinación de las áreas y pesos puede verse en el adjunto cuadro:

Trozos.	Áreas. — *Metros cuadr.*	Pesos parciales. — *Kilogramos.*	Peso total. — *Kilogramos.*
Superior.	13,50	29.700	
Medio...	8,10	17.820	98.560
Inferior..	23,20	51.040	

La composición de los tres pesos parciales da el peso total q que, compuesto con R_8, da la reacción R_9 en la base del estribo. Para esta composición se ha tomado una escala de 4 toneladas por milímetro. Se ve en la figura la componente normal á la base con arreglo á la cual se debe calcular la presión máxima; el valor de aquélla es 148.000 kg.

La distancia á la arista exterior es 2,20 m. y la longitud de la junta 5,80. La presión media será $\frac{148.000}{58.000} = 2{,}55$, y la máxima, observando que el punto de aplicación está en el tercio central, se calculará por la fórmula [5] del núm. 33

$$R_{máx} = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{6\,a}{h}\right) = 2{,}55\left(1 + \frac{6 \times 0{,}70}{5{,}80}\right) = 4{,}39 \text{ kg. por cm.}^2$$

Esta presión parece indicar la conveniencia de reducir el espesor del estribo, pero, si se recuerda que su coeficiente de estabilidad es 1,69, se verá que no conviene disminuirlo. Debe tenerse en

cuenta antes de decidirse á admitir una reducción en el espesor del estribo que, dada la disposición ordinaria de los muros de acompañamiento, aquella disminución sólo afecta á la parte comprendida entre los dos muros, que es pequeña en general, y da lugar á una reducción pequeña del volumen de mampostería. Por lo demás, este resultado hace ver la conveniencia de aplicar los dos métodos estudiados de comprobación, que se complementan perfectamente, y permiten así fijar con mayor acierto las dimensiones de la obra.

En cuanto á la bóveda, se observa, lo mismo que en el ejemplo anterior, que las presiones máximas se verifican en la clave y en los arranques. Se encuentra muy frecuentemente este resultado, porque generalmente pasa la curva del tercio superior en la clave al inferior en los arranques sin salirse del núcleo central en las juntas intermedias, cuando se adopta el trazado que hemos admitido. De aquí la importancia del conocimiento de las presiones máximas en esas dos juntas, presiones que, en muchos casos, dan idea suficientemente aproximada de las máximas que ha de sufrir la bóveda; y puede deducirse de esta observación que, aun en ciertas obras de relativa importancia, la aplicación del método del coeficiente de estabilidad, determinando las presiones máximas en las juntas de clave y de arranque ó de rotura, puede considerarse suficiente, sin trazar la curva de presiones.

Sin embargo, en caso de duda, debe hacerse la comprobación por ambos procedimientos.

80. Comprobación de la misma bóveda descomponiéndola en trozos por medio de juntas verticales.—Hemos indicado que puede hacerse la descomposición en dovelas por medio de planos verticales, lo cual facilita la determinación de los centros de gravedad. A fin de juzgar del grado de aproximación que así se obtiene, efectuemos la comprobación de la misma bóveda por este procedimiento (fig. 69, *lám. 8)*.

Al efecto, dividiremos el intradós en siete partes iguales, y trazaremos las verticales por estos puntos de división y por el extremo del trasdós de la junta de arranque. Así obtendremos ocho porciones cuyos centros de gravedad son muy fáciles de hallar, puesto que son de forma de trapecios. Se abrevia, por lo tanto, y se hace con

más exactitud esta determinación. Las demás construcciones son idénticas á las efectuadas anteriormente. Una vez conocidas las reacciones se deben suponer repartidas en las juntas normales que pasan por los puntos de la curva de presiones determinadas en cada junta vertical.

El cuadro de la página siguiente da á conocer los resultados obtenidos:

Al comparar este cuadro con el obtenido anteriormente por medio de la descomposición ordinaria, debe tenersse presente que las cifras de las presiones en las juntas de igual numeración no deben ser exactamente iguales, puesto que no se refieren á las mismas juntas. En el primer caso, son juntas equidistantes, y en el segundo, están repartidas irregularmente. Sin embargo, se observa que estas cifras difieren muy poco, y que uno y otro cuadro indican la misma ley de variación de las presiones, hallándose perfectamente de acuerdo en los valores de las presiones máximas, que es lo más importante.

De esta comparación y de algunas otras que hemos tenido ocasión de verificar (1) creemos poder deducir que en la práctica puede adoptarse sin inconveniente alguno este método simplificado, al menos para bóvedas cuyas luces no excedan de unos 20 m., es decir, la mayor parte de las que ordinariamente se construyen.

---

(1) Véase *Revista de Obras Públicas*, 15 de Octubre de 1887.

Número de orden de las dovelas.	ÁREAS. — *Metros cuadr.*	PESOS. — *Kilogramos.*	Número de orden de las juntas.	REACCIONES. — *Kilogramos.*	Longitud de las juntas. — *Metros.*	Presiones medias. — *Kg. por cm.²*	Distancias al trasdós ó al intradós. — *Metros.*	Presiones máximas. — *Kg. por cm.²*
			1	$Q = 50.500$	0,95	5,21	t 0,31	t 10,42
1	1,88	4.136						
			2	$R_1 = 50.950$	0,96	5,27	t 0,33	t 10,17
2	2,03	4.466						
			3	$R_2 = 51.000$	1,00	5,10	t 0,35	t 9,69
3	2,23	4.906						
			4	$R_3 = 52.250$	1,03	5,07	t 0,35	t 9,94
4	2,44	5.368						
			5	$R_4 = 53.700$	1,05	5,12	t 0,40	t 8,70
5	3,05	6.710						
			6	$R_5 = 56.500$	1,10	5,13	t 0,50	t 6,67
6	3,48	7.656						
			7	$R_6 = 60.250$	1,17	5,14	i 0,57	i 5,65
7	4,08	8.976						
			8	$R_7 = 65.750$	1,30	5,06	i 0,48	i 8,96
8	2,55	5.610						
			9	$R_8 = 69.750$	1,35	5,16	i 0,44	i 10,32

CAPÍTULO V.

BREVES NOCIONES ACERCA DE LOS MUROS DE SOSTENIMIENTO.

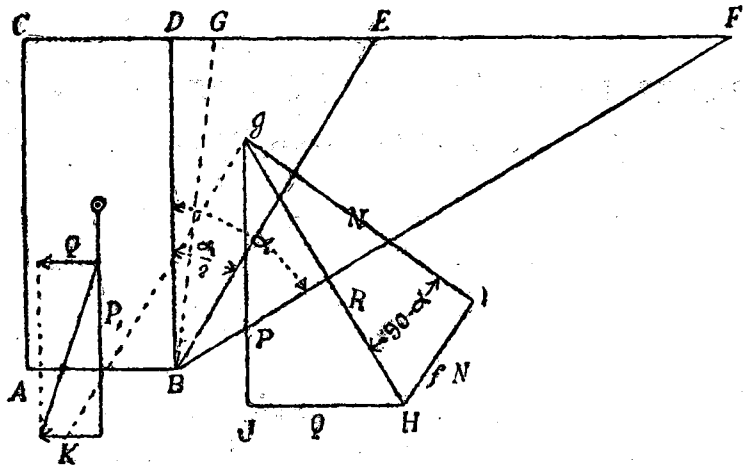
81. MUROS DE SOSTENIMIENTO. — DEFINICIÓN DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS. — Forman generalmente parte de los puentes los muros de sostenimiento de tierras, ya sea como muros de acompañamiento, aletas ó muros en vuelta destinados á enlazar los estribos con los terraplenes inmediatos, ya en los estribos mismos de los puentes metálicos, que no son otra cosa que muros de sostenimiento.

Las tierras, adosadas al muro y sostenidas á pico, tienden á caer para tomar el talud natural suficientemente tendido para quedar en equilibrio; y, por consiguiente, ejercen sobre el muro un empuje horizontal que tiende á volcarlo. Una vez conocido este empuje, la comprobación de la estabilidad de un muro de perfil conocido es fácil, pues se halla en idénticas condiciones que un estribo; y del mismo modo se comprueba, determinando su coeficiente de estabilidad y la presión máxima en la base producida por la resultante del peso del muro y del empuje.

Consideremos un muro $ABCD$ que sostiene un macizo de tierras limitado horizontalmente á la altura de la coronación (fig. 70). Sea BF el talud natural de las tierras, que forma un ángulo α con la vertical; consideraremos una zona de este muro y del macizo de tierras de 1 m. de profundidad en sentido perpendicular al plano del dibujo. Si suponemos que el prisma DBF es de una pieza, este

prisma se mantendrá en equilibrio sobre el plano BF, y no empujará al muro; pero, si consideramos un prisma DBE, es evidente que, no pudiendo mantenerse en equilibrio sobre el plano BE, ten-

Fig 70.



derá á deslizar hacia abajo y producirá un empuje horizontal sobre el muro por efecto de su peso, pero disminuído por el rozamiento del prisma de tierras sobre el plano de deslizamiento, y de la cohesión (de la cual se prescinde en la práctica por ser muy pequeña en las tierras removidas que forman los terraplenes). Si consideramos ahora un prisma muy delgado DBG, á lo largo del paramento BD, es claro que ejercerá un empuje muy pequeño. Luego si consideramos los prismas limitados por el plano BD, y por planos que forman con el anterior ángulos comprendidos entre 0 y α, siendo nulos los empujes correspondientes á estos ángulos límites, habrá un cierto ángulo intermedio al cual corresponderá un prisma de empuje máximo.

Se puede demostrar que dicho ángulo es precisamente la mitad del α, que corresponde al talud natural de las tierras. Admitiremos esta propiedad sin detenernos á demostrarla.

82. Valor del empuje y punto de aplicación.—Suponiendo que el ángulo DBE sea igual á $\frac{\alpha}{2}$, el prisma DBE, de máximo empuje, tiene por superficie de su sección recta

$$S = \frac{1}{2} BD \times DE = \frac{1}{2} h \times DE,$$

siendo h la altura del muro; llamando δ al peso del metro cúbico de tierra, el peso del prisma será

$$P = \frac{1}{2} \delta h \times DE,$$

pero el triángulo rectángulo DBE da

$$DE = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

luego

$$P = \frac{1}{2} \delta h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Estudiemos ahora el equilibrio del prisma DBE en el instante en que va á destruirse, poniéndose en movimiento el prisma á lo largo de BE. Sobre este prisma obra el peso P aplicado á su centro de gravedad g, la reacción R que nace del macizo de tierras inferior y se aplica en la cara BE, y la reacción del muro Q que suponemos horizontal, y es igual y contraria al empuje que buscamos. De todas estas fuerzas la única conocida es P; pero vamos á ver que es fácil averiguar la dirección de R, con lo cual el problema quedará resuelto, puesto que conocemos la dirección de Q.

La fuerza R tiene dos componentes; una normal al plano BE, y otra paralela, y opuesta al movimiento del prisma, que es la fuerza de rozamiento. Si llamamos N á la componente normal gI, y f al coeficiente de rozamiento, la componente paralela será fN, igual á la HI de la figura; luego f es la tangente del ángulo HgI, puesto que

$$\operatorname{tg} HgI = \frac{HI}{Ig} = \frac{fN}{N} = f.$$

Por consiguiente HgI es el ángulo de rozamiento de las tierras,

ó lo que es lo mismo el ángulo del talud natural con la horizontal (1), cuyo valor es $90° - \alpha$.

Conocemos, pues, la dirección de R, y bastará, para obtenerla, formar con la normal á BE el ángulo $90° - \alpha$.

Ahora vemos en la figura, trazando por g una paralela gK á BE, que el ángulo JgH tiene por valor

$$JgH = KgI - KgJ - HgI = 90° - \frac{\alpha}{2} - (90° - \alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

Y el triángulo JgH nos dará

$$JH = gJ \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

ó, lo que es lo mismo, puesto que $gJ = P$ y $JH = Q$,

$$Q = P \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \delta h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \qquad [1]$$

que es el valor del empuje que buscamos.

Si el rozamiento se anula, como sucede en el fango fluido y en los líquidos, la superficie no se mantiene en equilibrio si no es hori-

---

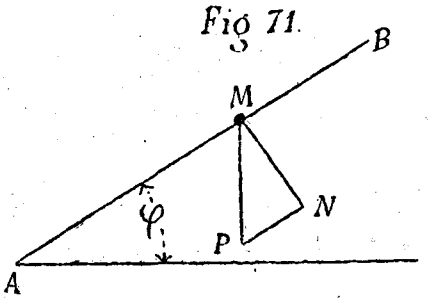
(1) Es fácil demostrar que el ángulo de rozamiento de las tierras entre sí es igual al que forma su talud natural con la horizontal. Sea AB este talud y φ su ángulo con la horizontal. Consideremos una molécula M en la superficie, y sea p su peso igual á MP (fig. 71). Este peso se descompone en la normal MN que queda destruída por la resistencia del macizo, y la paralela NP al plano AB, cuyo valor es p sen φ. Puesto que M está en equilibrio, la componente p sen φ está equilibrada por la fuerza de rozamiento, cuyo valor es $f \times MN$ ó sea $f \times p \cos \varphi$, llamando f al coeficiente de rozamiento. Luego

$$f \times p \cos \varphi = p \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde se deduce

$$f = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Fig. 71.



Luego el ángulo φ es el ángulo de rozamiento. Con la notación adoptada en el texto este ángulo es $90° - \alpha$.

zontal, es decir, siendo $\alpha = 90°$, y, por lo tanto, $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 1$. La fórmula se convierte en este caso en

$$Q = \frac{1}{2}\,\delta\,h^2.$$

Si el líquido es agua, su densidad $\delta = 1$, siendo la unidad la tonelada, y se tendrá

$$Q = \frac{1}{2}\,h^2,$$

que es la fórmula conocida de la presión hidrostática sobre una pared vertical sumergida en el líquido.

Admitiremos, sin demostrarlo, que el punto de aplicación del empuje está al tercio de la altura á contar desde la base, exactamente lo mismo que cuando se trata de un líquido.

83. Comprobación de la estabilidad.—Puede emplearse el método del coeficiente de estabilidad del mismo modo que para los estribos de los puentes. El momento del empuje alrededor de la arista exterior A del muro (fig. 70) tiene por expresión

$$M_q = Q \times \frac{h}{3} = \frac{1}{6}\,\delta\,h^3\,\text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}. \qquad [2]$$

Es fácil calcular el momento resistente determinando el peso P del muro, y el centro de gravedad del perfil, y calculando, ó midiendo en la figura, la distancia del punto A á la vertical del centro de gravedad. Si llamamos M_r á este momento, y m al coeficiente de estabilidad, tendremos

$$\frac{M_r}{M_q} = m. \qquad [3]$$

Como en los estribos, m debe estar comprendido entre 1,50 y 2, pero debe en general evitarse que se acerque al límite inferior, porque, en la práctica, rara vez se conocen con exactitud las constantes relativas á las tierras que se han de sostener, que son su talud natural y su peso, las cuales además varían bastante en las tierras,

especialmente en las arcillosas, según estén secas ó impregnadas de agua.

Si suponemos que el muro tiene ambos paramentos verticales, y llamamos x á su espesor y π al peso del metro cúbico de fábrica, el peso del muro será $\pi h x$, y estará aplicado al punto medio de la base, es decir, á la distancia $\frac{x}{2}$ de la arista A. Su momento será

$$M_r = \pi h \frac{x^2}{2}.$$

Y aplicando la ecuación del coeficiente de estabilidad, fórmula [3], tendremos

$$\frac{\pi h x^2}{2} = \frac{m}{6} \delta h^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Si hacemos $m = 2$ la ecuación se convierte en

$$\pi h x^2 = \frac{2}{3} \delta h^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Y despejando x resulta

$$x = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\pi}}. \qquad [4]$$

que da el espesor del muro.

Se debe calcular la presión máxima en la base del muro, lo cual se hace fácilmente una vez conocido el empuje y el peso; basta componer estas dos fuerzas, cuya resultante debe pasar dentro de la base del muro; se mide la distancia desde su punto de intersección con dicha base á la arista A, y se calcula la presión por medio de las fórmulas del núm. 33 del mismo modo que en los estribos y en las juntas de las bóvedas.

84. Densidades y taludes naturales ó ángulos de rozamiento que se adoptan en la práctica.—Las tierras que forman los terraplenes se pueden clasificar en uno de los seis grupos siguientes, según el peso del metro cúbico y el ángulo de su talud natural con la vertical.

NATURALEZA DE LAS TIERRAS.	PESO del metro cúbico. — *Kilogramos.*	ÁNGULO del talud natural con la vertical.	COEFICIENTE de rozamiento.
Arcilla.....	1.900	35°	1,428
Tierra vegetal ligera y seca....	1.400	46° á 47°	0,965 á 0,932
Arena terrosa.....	1.700	46° á 47°	0,965 á 0,932
Tierra arcillosa húmeda.....	1.600	54°	0,726
Arena pura y muy seca.....	1.900	60°	0,577
Fango fluido.....	1.650	90°	0

Para los cinco primeros tipos de terrenos, las inclinaciones son respectivamente de 0,69, 1,05, 1,34, y 1,73 de base por 1 de altura. El fango fluido no admite talud natural, debiendo ser su superficie horizontal, como en los líquidos.

Las tierras de los terraplenes ordinarios se mantienen con un talud de 1,50 de base por 1 de altura, y el ángulo que forma su talud con la vertical es de 56° 18′ que es el que se adopta para las comprobaciones, á falta de datos directos, que muy rara vez se pueden conocer al hacer los proyectos.

Si se aplica la fórmula [4] al caso de las tierras cuyo talud es de 45°, haciendo $\delta = 1.700$ kg. y $\pi = 2.200$ kg. se obtiene

$$x = 0{,}30\ h.$$

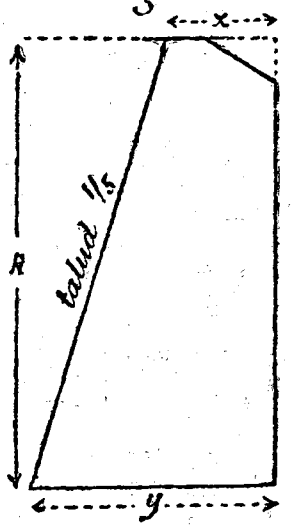
Aplicándola á las tierras cuyo talud es de 1,50 de base por 1 de altura, se tiene $\alpha = 56° 18'$; y conservando las mismas densidades que en el caso anterior, se obtiene

$$x = 0{,}39\ h.$$

El término medio es próximamente el espesor igual $\frac{1}{3}$ de la altura, proporción que muchos constructores adoptan y que consideran plenamente demostrada como aceptable en los casos ordinarios. En efecto, es el más conveniente cuando las constantes relativas á las tierras y la densidad de las fábricas no difieren mucho de las que se han supuesto, y cuando el muro es de paramentos verticales.

85. MUROS CON EL PARAMENTO INTERIOR VERTICAL Y EL EXTERIOR EN TALUD.—Los procedimientos que hemos indicado sirven para comprobar un muro cuyo perfil se da, y del mismo modo que hemos procedido al tratar de las bóvedas y estribos, es preciso admitir provisionalmente ciertos perfiles justificados por la experiencia.

Fig 72.



Damos á continuación las dimensiones propuestas por Clémencet (1) para los muros de paramento interior vertical, teniendo el exterior un talud de $^1/_5$ ó de $^1/_{10}$, que son los más usados. El perfil es el de la figura 72; x es el espesor de la coronación, y el de la base.

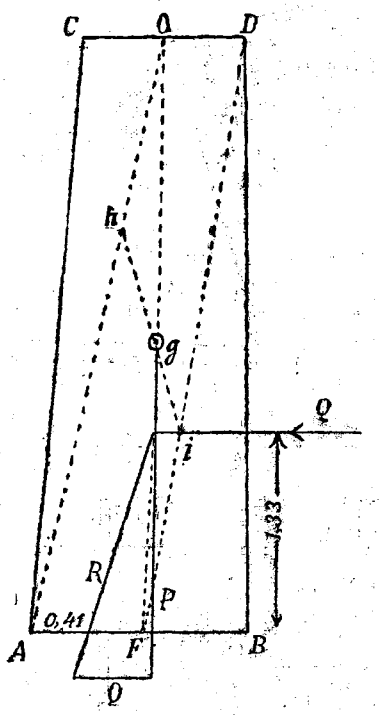
Dimensiones de los muros de sostenimiento.

ALTURAS. — h metros.	ESPESORES, SIENDOO EL TALUD $^1/_{10}$		ÁREAS. — Metros cuadrados.	ESPESORES, SIENDO EL TALUD $^1/_5$		ÁREAS. — Metros cuadrados.
	en la coronación. — x metros.	en la base. — y metros.		en la coronación. — x metros.	en la base. — y metros.	
1	0,50	0,60	0,55	0,50	0,70	0,60
2	0,66	0,86	1,52	0,56	0,86	1,42
3	0,89	1,19	3,12	0,59	1,19	2,67
4	1,12	1,52	5,28	0,72	1,52	4,48
5	1,35	1,85	8,00	0,85	1,85	6,75
6	1,58	2,18	11,28	0,98	2,18	9,48
7	1,81	2,51	15,12	1,11	2,51	12,67
8	2,04	2,84	19,52	1,24	2,84	16,32
9	2,27	3,17	24,48	1,37	3,17	20,43
10	2,50	3,50	30,00	1,50	3,50	25,00
11	2,73	3,83	36,08	1,63	3,83	30,03
12	2,96	4,16	42,12	1,76	4,16	35,52
13	3,19	4,49	49,92	1,89	4,49	41,47
14	3,42	4,89	58,17	2,02	4,82	47,88
15	3,65	5,15	66,00	2,15	5,15	54,75
16	3,88	5,48	74,88	2,28	5,48	62,08
17	4,11	5,81	84,32	2,41	5,81	69,87
18	4,34	6,14	94,32	2,54	6,14	78,12

(1) *Cours pratique de Travaux publics*, lámina 115.

En la práctica se chaflana la arista interior de la coronación dejando solamente la parte horizontal necesaria para la colocación del pretil, como se ve en la figura, y el plano inclinado se recubre de una capa de hormigón.

Fig. 73.



86. Ejemplos de comprobación de muros de sostenimiento.—Como aplicación de los principios que preceden, vamos á comprobar algunos de los perfiles definidos en el cuadro anterior.

Tomemos como primer ejemplo el muro de 4 m. de altura con talud exterior de $^1/_{10}$; la coronación tiene un espesor de 1,12 m. y la base es de 1,52 m. (fig. 73).

Aplicaremos la fórmula [1] para calcular el empuje, adoptando los datos siguientes:

$$\delta = 1.700 \text{ kg.}$$
$$\alpha = 56^\circ\ 18'$$

De donde se deduce $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}535$; y $\text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}286$.

El valor de Q será

$$Q = \frac{1}{2} \times 1.700 \times 4^2 \times 0{,}286 = 3.890 \text{ kg.}$$

Este empuje está aplicado á la altura $4 \times \frac{1}{3} = 1{,}33$ m.

Su momento es, por lo tanto

$$M_q = 3.890 \times 1{,}33 = 5.174.$$

Calculemos el momento resistente, empezando por evaluar el peso. El área de la sección, que es un trapecio, será

$$\frac{1{,}12 + 1{,}52}{2} \times 4 = 5{,}28 \text{ m.}^2$$

Y el peso, admitiendo que el del metro cúbico sea 2.200 kg., será

$$5{,}28 \times 2.200 = 11.616 \text{ kg.}$$

Hallemos ahora el centro de gravedad g del muro por medio de la construcción indicada en el núm. 66. Uniremos los puntos medios G y F de las bases; trazaremos la $A\,G$ y sobre ella tomaremos el punto h al tercio de $A\,G$ á partir de G; trazaremos la DF y tomaremos el punto i al tercio de su longitud contada desde F. La intersección de $h\,i$ con GF nos dará el centro de gravedad g.

Ahora podremos medir la distancia del punto A á la vertical que pasa por g, que es 0,87 m.; y el momento resistente será

$$M_r = 11.616 \times 0{,}87 = 10.109.$$

Y el coeficiente de estabilidad es

$$\frac{M_r}{M_q} = \frac{10.109}{5.174} = 1{,}95$$

que se acerca mucho á 2, y es perfectamente aceptable.

Para calcular la presión máxima en la base, empezaremos por trazar la resultante del peso y del empuje, tomando estas fuerzas en una escala conveniente; en la figura se ha tomado la de 2 mm. por tonelada. La distancia de su punto de encuentro con la base á la arista A es 0,41 m., y está fuera del tercio central; luego la superficie del rectángulo útil para la resistencia, cuyo lado en el sentido $A\,B$ es tres veces esta distancia, será

$$3 \times 41 \times 100 = 12.300 \text{ cm.}^2$$

Y la presión máxima es el doble de la media, es decir,

$$2 \times \frac{11.616}{12.300} = 1{,}88 \text{ kg. por cm.}^2$$

Esta presión es muy moderada para la mampostería, pero la consideración del coeficiente de estabilidad aconseja aceptar sin reducción las dimensiones propuestas.

87. Muros de 6, 8 y 12 m. de altura.—Vamos á indicar los cálcu-

los relativos al muro de 6 m. de altura, limitándonos á consignar los resultados para los de 8 y 12. Invitamos al lector á que trace la figura si lo considera necesario.

El valor del empuje es

$$Q = \frac{1}{2} \times 1.700 \times 6^2 \times 0{,}286 = 8.752 \text{ kg.}$$

El área de la sección es 11,28 m.², y el peso del metro lineal de muro $11{,}28 \times 2.200 = 24.816$ kg.

Hecha la construcción del centro de gravedad, el brazo de palanca del momento resistente resulta ser de 1,25 m.

El del empuje es 2 m.

Luego el coeficiente de estabilidad será

$$\frac{M_r}{M_q} = \frac{24.816 \times 1{,}25}{8.752 \times 2} = \frac{31.020}{17.504} = 1{,}77.$$

Una vez hallada la resultante del peso y del empuje, se verá que la distancia del punto de intersección de aquella con la base del muro á la arista de giro es 0,55 m. La superficie útil para la resistencia, expresada en centímetros cuadrados, es $3 \times 55 \times 100 = 16.500$ cm.²

Luego la presión máxima en la base, será

$$2 \times \frac{24.816}{16.500} = 3{,}00 \text{ kg. por cm.}^2$$

Para las alturas de 8 y de 12 m. hemos encontrado los coeficientes de estabilidad 1,71 y 1,61 respectivamente.

Se observa que el coeficiente va disminuyendo á medida que crece la altura del muro, y es fácil prever que en las inmediaciones de 14 m. llegará á ser inferior á 1,50.

Debe tenerse presente, sin embargo, que con tales alturas y con los anchos usuales de las vías de comunicación, los muros de ambos lados del camino llegan á tocarse, y entonces se obtiene un macizo de fábrica en cuya coronación está establecida la vía, y deja de ser un muro de sostenimiento.

Así, si el ancho de la vía es de 6 m., y los muros tienen 12 m. de altura, vemos que el espesor correspondiente en la coronación es de 2,96 m., que es casi exactamente la mitad del ancho, y no queda más que un macizo único de fábrica sin tierras que ejerzan empujes.

Pero mucho antes de llegar á este límite, las tierras se han reducido á una estrecha faja vertical, cuyo empuje es mucho menor que el calculado, puesto que su peso no es más que una pequeña parte del que corresponde al prisma de máximo empuje, el cual se ha tenido en cuenta íntegro al aplicar las fórmulas.

En todos los casos es muy conveniente efectuar la comprobación, pero es indispensable si los datos difieren notablemente de los términos medios adoptados, y entonces hay necesidad de variar el espesor. Así sucedería, por ejemplo, si el muro se hubiera de construir de ladrillo, cuyo peso específico es muy inferior al que hemos admitido para la mampostería.

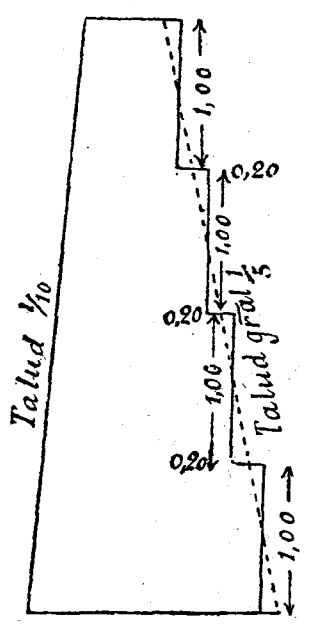
En estos casos es muy fácil llegar, por medio de algunos tanteos, á fijar un espesor en la coronación que dé lugar á un coeficiente de estabilidad aceptable.

Los muros con el talud exterior de $^1/_5$ son más económicos que los de talud de $^1/_{10}$, como puede comprobarse en el cuadro comparando las áreas de los perfiles correspondientes á las mismas alturas. Esto se explica fácilmente, si se observa que con el talud de $^1/_5$ basta una área menor para obtener el mismo momento resistente, puesto que el brazo de palanca es mayor.

No obstante, en los muros de acompañamiento de los puentes se adopta con frecuencia el talud de $^1/_{10}$ para evitar el contraste que presentaría un talud demasiado pronunciado con los paramentos verticales de los tímpanos.

88. MUROS CON EL PARAMENTO EXTERIOR CON TALUD DE $^1/_{10}$ Y EL INTERIOR CON TALUD DE $^1/_5$.—Muchas veces se emplean muros con un talud de $^1/_{10}$ en el paramento exterior, y con talud de $^1/_5$ hacia el interior; este último se sustituye generalmente por un perfil escalonado, disponiendo un retallo de 0,20 m. á cada metro de altura, de modo que el talud teórico de $^1/_5$ corte en los puntos medios á las huellas y contrahuellas de los escalones, como se ve en la figura 74.

Fig 74.



El cuadro siguiente da los espesores en la coronación y en la base para los muros así trazados, de 1 á 12 m. de altura, y las áreas de las secciones correspondientes. Dichos espesores se han determinado de modo que el coeficiente de estabilidad sea próximamente 2, adoptando para las constantes los mismos valores que en los ejemplos que hemos estudiado anteriormente, y comprobando los muros de 5, 6, 8, 10 y 12 m. de altura.

Los de altura inferior á 4 m. tienen un exceso de resistencia por la necesidad de no reducir exageradamente el espesor en la coronación.

Dimensiones de los muros de sostenimiento con talud exterior de $^1/_{10}$ é interior de $^1/_5$.

Altura. — h metros.	Espesor en la coronación. — x metros.	Espesor en la base. — y metros.	Áreas. — *Metros cuadr.*
1	0,35	0,65	0,50
2	0,40	1,00	1,40
3	0,45	1,35	3,70
4	0,55	1,75	4,60
5	0,65	2,15	7,00
6	0,70	2,50	9,60
7	0,80	2,90	12,95
8	0,90	3,30	16,80
9	0,95	3,65	20,70
10	1,00	4,00	25,00
11	1,10	4,40	30,25
12	1,20	4,80	36,00

89. EJEMPLO DE COMPROBACIÓN DE UN MURO CON TALUD EXTERIOR DE $^1/_{10}$ É INTERIOR DE $^1/_5$.—Como ejemplo, vamos á comprobar la

estabilidad del muro de 5 m. de altura, cuyo perfil se ha trazado con arreglo á los datos del cuadro precedente (fig. 75).

El valor del empuje será

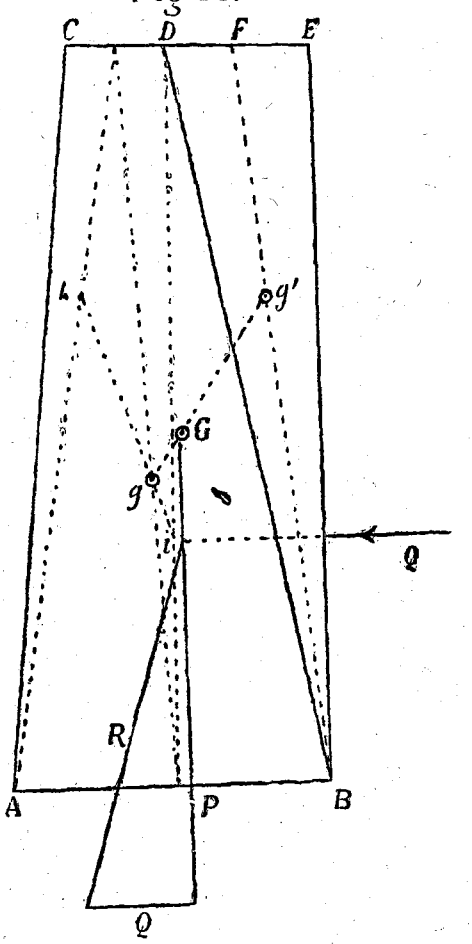
$$Q = \frac{1}{2} \times 1.700 \times 25 \times 0{,}286 = 6.077 \text{ kg.}$$

Este empuje está aplicado á la altura de 1,66, y su momento será

$$M_q = 6.077 \times 1{,}66 = 10.088.$$

Para calcular el momento resistente, debemos tener en cuenta, no sólo el peso del muro, sino también el del prisma de tierras *BDE*, que pesa sobre la base y contribuye á la estabilidad.

Fig 75.



El área de la sección recta del muro es

$$\frac{0{,}65 + 2{,}15}{2} \times 5 = 7 \text{ m.}^2$$

y su peso será

$$7 \times 2.200 = 15.400 \text{ kg.}$$

El área del triángulo *BDE* es

$$\frac{1 \times 5}{2} = 2{,}50 \text{ m.}^2$$

y su peso

$$2{,}50 \times 1.700 = 4.250 \text{ kg.}$$

Luego el peso total que contribuye á la estabilidad es

$$15.400 + 4.250 = 19.650 \text{ kg.}$$

Busquemos su punto de aplicación.

Empezaremos por hallar el centro de gravedad *g* del trapecio *ABCD* por medio de la construcción que ya conocemos, como puede verse en la figura.

Hallaremos luego el centro de gravedad g' del triángulo BDE, que está al tercio de la mediana correspondiente al lado DE, á contar del punto F de dicho lado.

En g está aplicado el peso 15.400 kg., y en g' el de las tierras, 4.250 kg.

El punto G de aplicación de la resultante divide á gg' en dos segmentos inversamente proporcionales á los pesos. Llamando x á la distancia Gg, y á la Gg', tendremos las proporciones

$$\frac{x}{4.250} = \frac{y}{15.400} = \frac{1,50}{19.650},$$

puesto que $x + y = gg' = 1,50$.

De aquí se saca

$$x = \frac{1,5 \times 4.250}{19.650} = 0,32.$$

De modo que $Gg = 0,32$, y conocemos el punto de aplicación de la resultante. La distancia de ésta al punto A es 1,12; y el momento resistente será

$$M_r = 19.650 \times 1,12 = 22.008.$$

El coeficiente de estabilidad es

$$\frac{M_r}{M_q} = \frac{22.008}{10.088} = 2,18.$$

Para calcular la presión máxima en la base, compondremos el peso 19.650, aplicado en G, con el empuje $Q = 6.077$ aplicado á la altura 1,66 sobre la base.

La resultante corta á la base á la distancia 0,66 m. del eje de giro proyectado en A.

El área útil para la resistencia será

$$3 \times 66 \times 100 = 19.800 \text{ cm.}^2$$

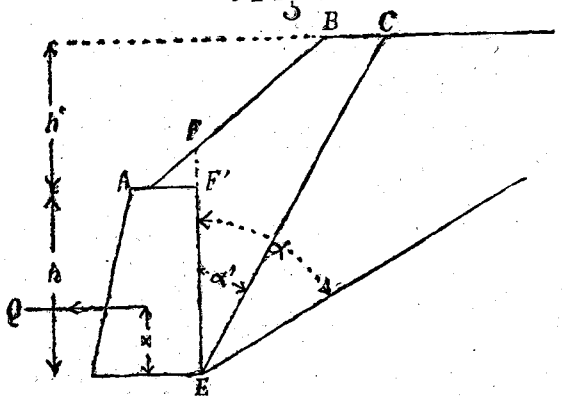
Y la presión máxima

$$2 \times \frac{19.650}{19.800} = 1{,}98 \text{ kg. por cm.}^2$$

Para comprobar las dimensiones consignadas en el cuadro, hemos determinado por el procedimiento anterior los coeficientes de estabilidad de los muros de 6, 8, 10 y 12 m. de altura, que resultan ser 2,20, 1,95, 1,95 y 1,80 respectivamente.

90. MUROS DE MENOR ALTURA QUE EL TERRAPLÉN QUE SOSTIENEN.— Se emplean con frecuencia muros cuya altura es menor que la de terraplén (fig. 76), y á este caso se puede reducir la comprobación de una sección cualquiera de un muro en ala.

Fig. 76.



Daremos las fórmulas correspondientes á este caso sin detenernos en su demostración.

El ángulo $\alpha' = FEC$, que determina el prisma de máximo empuje, no es ya la mitad del ángulo α que forma el talud natural de las tierras con la vertical. Se determina por la fórmula

$$\text{tang } \alpha' = \frac{\sqrt{(h + h')^2 \cot^2 \alpha + h'^2}}{(h + h').\cos \alpha} - \cot \alpha$$

en la cual h es la altura del muro, y h' la altura de las tierras sobre su coronación.

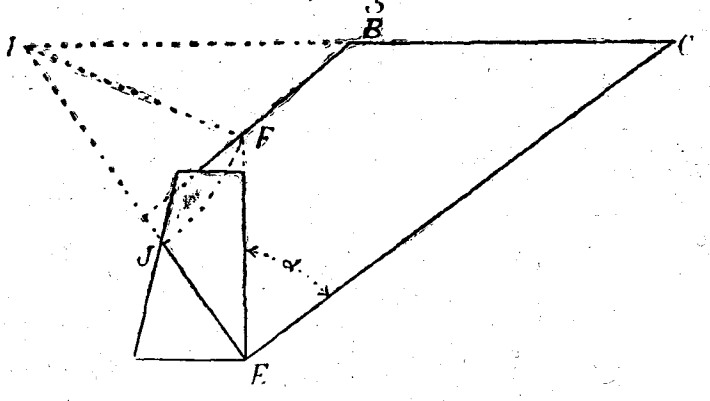
El empuje es igual al peso P del prisma de máximo empuje $FBCE$ multiplicado por la tangente del ángulo $(\alpha - \alpha')$.

Se puede determinar el empuje por medio de la siguiente construcción gráfica aproximada (fig. 77).

Se traza por el punto E una perpendicular al talud natural de las tierras EC, y se prolonga hasta el punto I en que encuentra al

plano horizontal BC, coronación del terraplén. Se une el punto F (intersección del paramento interior con el talud de las tierras), con el punto I, y se rebate IF sobre IE, en IJ.

Fig. 77.



El empuje será, llamando δ al peso del metro cúbico de tierra,

$$Q = \frac{1}{2}\delta \times \overline{EJ^2}.$$

El punto de aplicación del empuje está á una altura sobre la base del muro, dada por la expresión

$$h\,\frac{\frac{h}{3} + h'}{h + 2h'}.$$

El empuje se considera horizontal en las aplicaciones prácticas, por más que algunos ingenieros opinan que debe ser paralelo al talud del terraplén.

PARTE TERCERA.

PUENTES METÁLICOS DE TRAMOS INDEPENDIENTES.

CAPÍTULO I.

CUESTIONES GENERALES RELATIVAS AL CÁLCULO DE LOS PUENTES METÁLICOS.

91. Composición general de un puente metálico.—Un puente metálico consta esencialmente de dos ó más cuchillos ó vigas principales, sobre los cuales insisten viguetas transversales destinadas á sostener el piso. Cuando se trata de un ferrocarril, estas viguetas sostienen los largueros en que se apoyan directamente los carriles.

En los puentes de carreteras, generalmente insisten sobre las viguetas largueros longitudinales, sobre los cuales se apoyan piezas llenas destinadas á sostener el afirmado, como hierros Zorès, placas encorvadas de palastro, bovedillas de ladrillo, etc.

De aquí se deduce que el cálculo de los puentes metálicos se reduce al de una serie de vigas. Si el piso se compone de hierros Zorès, estos obrarán como piezas apoyadas en los largueros y sometidas á cargas que se pueden evaluar. Los largueros son piezas apoyadas en las viguetas, que reciben las cargas por el intermedio de los hierros Zorès. Las viguetas, á su vez, son piezas apoyadas en las vigas principales, pudiéndose evaluar las cargas á que deben resistir; y, finalmente, las vigas principales que se apoyan en las pilas y estribos, reciben las cargas que les transmiten las viguetas, hallándose en el mismo caso que las piezas anteriores. Muchas

veces la serie de piezas enumeradas disminuye, como en el caso citado de los puentes para ferrocarriles, en que sólo habrá que calcular los largueros, las viguetas y las vigas principales.

Los hierros Zorès, los largueros y las viguetas se calculan por los procedimientos estudiados en el capítulo II de la primera parte, y las cargas á que han de resistir son generalmente muy fáciles de determinar. En cuanto á los cuchillos principales, el método de cálculo varía mucho según el sistema de que se trate; nos proponemos estudiar los más usuales en la práctica, pero antes de emprender este estudio, conviene examinar algunas cuestiones que hay que resolver en todos los proyectos, cualquiera que sea el sistema adoptado para las vigas principales. Son estas la determinación de las cargas, la disposición y el cálculo de los arriostramientos ó enlaces de las vigas principales entre sí, las reglas relativas al roblonado, y la determinación de las dimensiones de los aparatos de apoyo de las vigas principales.

92. DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS EN LAS VIGUETAS Y DEMÁS PIEZAS DEL PISO.—Toda pieza que forma parte de un puente tiene que resistir dos clases de cargas. Una *permanente*, que se compone de su propio peso y del de las partes de la obra que sostiene, y otra *accidental* ó *móvil*, que proviene de los vehículos, peatones y caballerías que circulan por el puente. Así, para una vigueta de un puente de carretera, el peso permanente se compondrá: 1.°, del peso del firme que insiste sobre ella; 2.°, del peso de las piezas que sostienen el piso, como placas de palastro, hierros Zorès, etc.; 3.°, del de los largueros; 4.°, del peso propio de la vigueta. Una vez ideada la composición del piso, es fácil evaluar aproximadamente estos pesos, valiéndose, si es necesario, de la comparación con otro puente de análogas condiciones ya construído. Este peso desarrolla en la vigueta un trabajo permanente, al cual se añadirá en ocasiones el debido á la carga móvil que ha de circular por el puente.

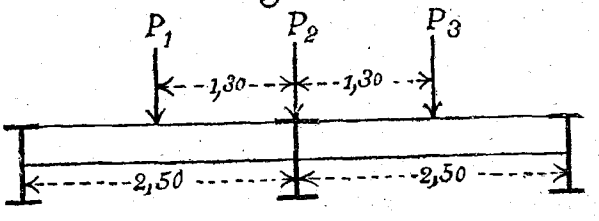
En la evaluación de la carga móvil se han de distinguir dos casos: el de un puente para ferrocarril y el de un puente para carretera.

En el primer caso, la carga máxima será la debida á un eje motor de la locomotora más pesada que ha de circular por la vía, carga

que se transmitirá á dos puntos perfectamente determinados de la vigueta, repartiéndose por igual entre ellos.

Si la distancia entre las ruedas de la locomotora es menor que la separación entre dos viguetas, una parte del peso de los ejes que insisten sobre los largueros contiguos, se transmitirá también á la vigueta. Consideremos (fig. 78) tres viguetas consecutivas; cuando el peso P_2 de la rueda intermedia insiste en la vigueta, los pesos P_1 y P_3 se hallan á igual distancia de aquélla sobre los largueros inmediatos; supongamos que la distancia entre los ejes es de 1,30 m. y la de las viguetas 2,50; sea 7.500 kg. el peso transmitido por cada rueda.

Fig. 78.



La parte del peso P_3 que viene á transmitirse á la vigueta central, se obtendrá tomando momentos con relación á la de la derecha, y tendremos

$$X = \frac{(2{,}50 - 1{,}30)\, P_3}{2{,}50} = \frac{1{,}20 \times 7.500}{2{,}50} = 3.600 \text{ kg.}$$

El peso P_1 transmite otra parte igual al punto de apoyo del larguero, y la carga total en estos puntos de la vigueta intermedia es $2 \times 3.600 + 7.500 = 14.700$ kg. Si el puente es de doble vía, esta carga obrará en cada uno de los cuatro puntos de la vigueta que sirven de apoyo á los largueros.

Para obtener la carga más desfavorable correspondiente á un larguero, bastará aplicar en su punto medio una de las ruedas de la locomotora más pesada que haya de circular por el puente, y á derecha é izquierda del mismo, todas las que quepan en el larguero.

En un puente de carretera en qué pueden cruzarse dos vehículos, la carga móvil más desfavorable para la vigueta se obtendrá en el caso en que se crucen sobre ella dos vehículos de los más pesados, colocándolos simétricamente respecto al eje, y de modo que las dos ruedas interiores se acerquen todo lo posible á él. Es necesaria una

información en la localidad para averiguar el peso de estos vehículos; pero, en general, no debe admitirse para las carreteras del Estado un peso inferior á 6.000 kg.

Los formularios vigentes prescriben una carga de 9.000 kg., que es evidentemente muy exagerada. La Administración francesa, en la circular de 1877, prescribía una carga aún más exagerada, de 11.000 kg., pero esta disposición no se halla ya vigente.

Si se trata de un puente para carretera, cuyo ancho no permita el cruce, la situación más desfavorable para la vigueta se obtiene colocando el vehículo más pesado de modo que una de sus ruedas se acerque todo lo posible al eje del puente, rozando la otra con la acera.

Si el puente tiene aceras debe contarse además un peso de 300 kg. por metro cuadrado de la parte que insista sobre la vigueta, procedente de una aglomeración de personas.

En las inmediaciones de las ciudades, donde son posibles grandes aglomeraciones, algunos ingenieros elevan la cifra anterior á 350 y aun á 400 kg.

Las cargas correspondientes á los largueros, hierros Zorès, etc., se determinan aún más fácilmente, porque generalmente estas piezas son bastante cortas para que no pueda insistir sobre ellas más que una rueda de vehículo, que deberá suponerse en el punto medio de la pieza para obtener el máximo momento de flexión. Sin embargo, cuando se trata de los hierros Zorès de un piso afirmado, puede suponerse que aquella carga se reparte en dos ó tres de estos, por distribuirla en una cierta extensión el espesor del firme interpuesto entre la rueda y la pieza.

Se admite generalmente que se distribuye el peso aislado transmitido por una rueda en la base de un cono, cuyo vértice es el punto de apoyo de la rueda, la altura la distancia de este punto al plano horizontal de la cabeza superior de la pieza considerada, y cuya generatriz está inclinada á 45° respecto á la vertical.

En la imposibilidad de enumerar todos los casos posibles, nos limitaremos á estas indicaciones, y procuraremos presentar ejemplos de los casos más frecuentes al estudiar prácticamente los cálculos de los sistemas usuales de puentes metálicos.

93. Determinación de las cargas correspondientes á las vigas principales.—Distinguiremos, como en el caso anterior, la carga permanente y la carga móvil. La primera se compone de todos los elementos de la obra sostenidos por las vigas principales y del peso propio de estas. El peso de los elementos que insisten sobre las vigas principales será ya conocido con la aproximación suficiente para este objeto al tratar de calcular estas, puesto que, al calcular la vigueta, se habrán determinado todos los pesos que insisten en ella, y, conocidas sus dimensiones, podrá determinarse también el peso de ésta.

El peso de la viga principal que se trata de calcular es completamente desconocido; pero puede tomarse como dato suficientemente aproximado un término medio de los pesos que resultan en la práctica para las mismas luces, ó el de un puente del mismo tipo y de condiciones semejantes al que se proyecta.

El cuadro siguiente da el peso medio por metro lineal de puente de toda la parte metálica para puentes de ferrocarriles, y por metro superficial de planta para puentes de carreteras. En estos últimos se determina el peso del metro superficial de planta, porque el peso por metro lineal debe variar para una misma luz con el ancho del puente. Obsérvese que en estos pesos va incluído el de las viguetas y demás piezas del piso, y para obtener la carga permanente basta agregar el peso del firme en los puentes de carreteras y el de la vía en los de ferrocarriles.

Para puentes de luces inferiores á 20 m. para carreteras, ó á 30 para ferrocarriles, es preferible determinar este peso por comparación con otro puente del mismo tipo que el que se proyecta, porque el peso por metro lineal varía mucho con las cargas que se admitan.

Cuadro de los pesos medios de la parte metálica en los puentes de hierro.

LUCES de los tramos. — *Metros.*	PUENTES PARA FERROCARRILES. — Peso por metro lineal. Simple vía. — *Kilogramos*	Doble vía. — *Kilogramos*	PUENTES PARA CARRETERAS. — Peso por metro superficial de planta. — *Kilogramos.*	LUCES de los tramos. — *Metros.*	PUENTES PARA FERROCARRILES. — Peso por metro lineal. Simple vía. — *Kilogramos*	Doble vía. — *Kilogramos*
5	635	1.156	100	120	5.547	10.095
10	783	1.425	121	125	5.789	10 536
15	943	1.716	144	130	6.031	10.976
20	1.115	2.029	169	135	6.276	11.422
25	1.296	2.359	197	140	6.519	11.864
30	1.485	2.703	226	145	6.764	12.310
35	1.682	3.061	257	150	7.009	12.756
40	1.884	3.429	289	155	7.255	13.204
45	2.092	3.807	322	160	7.501	13.652
50	2.305	4.195	356			
55	2.522	4.590	391			
60	2.742	4.990	427			
65	2.965	5.396	463			
70	3.191	5.808	500			
75	3.420	6.224	537			
80	3.650	6.643	575			
85	3.881	7.063	613			
90	4.116	7.491	652			
95	4.351	7.919	691			
100	4.588	8.350	730			
105	4.826	8.783	769			
110	5.065	9.218	809			
115	5.306	9.657	»			

Este cuadro permitirá determinar fácilmente el peso aproximado del metro lineal del puente, y añadiéndole, en el caso de un puente de carretera, el peso del afirmado, y el de la vía si es para ferrocarril, se tendrá la carga permanente por metro lineal que podrá servir para el cálculo de las vigas principales.

Tiene también otra aplicación muy importante. Una vez terminado el proyecto de puente metálico, se calcula su peso por metro lineal, si es para ferrocarril, ó su peso por metro superficial de planta si es

para carretera. Esta cifra debe aproximarse á la consignada en el cuadro para la misma luz, si el proyecto es acertado. Si es mucho mayor, se deduce que las disposiciones adoptadas son defectuosas, y es posible mejorar el proyecto haciéndolo más económico. Si es mucho menor, es prueba de que se han cometido errores que deben rectificarse.

94. Determinación de las cargas móviles correspondientes á las vigas principales.—Desde que se empezaron á construir puentes de hierro, se observó la simplificación que introducía en los cálculos el sustituir á las cargas efectivas que circulan por los puentes otras uniformemente repartidas que produzcan en las piezas del puente el mismo trabajo. Tal ha sido la práctica constante, especialmente en los puentes para ferrocarriles, en que se aplicaba á toda clase de luces. Hasta una época reciente ha estado en vigor, en Francia, la circular ministerial de 9 de Julio de 1877 que prescribía las cargas uniformes que debían adoptarse para las diversas luces, cargas que también se han aplicado en España. Pero, á consecuencia del aumento de peso del material, dichas cargas han llegado á ser insuficientes, y, en 21 de Agosto de 1891, se publicó otra circular en la que se abandonó el principio de las cargas uniformes y se sustituyó por la consideración de trenes tipos de composición definida, que deben poder circular por el puente sin que el trabajo del material exceda de ciertos límites que ya hemos dado á conocer en el capítulo I de la primera parte. Esto dificulta notablemente los cálculos de resistencia, especialmente en los puentes de tramos continuos, en los cuales hay que acudir á métodos nuevos de cálculo ó á los procedimientos gráficos. Nosotros no aceptaremos esta modificación, y nos atendremos á las cargas uniformemente repartidas; poco antes de redactarse dicha circular acababa de publicarse la obra de Leber en apoyo de la circular austriaca de 1887, que admite el principio de las cargas uniformes equivalentes, probando cumplidamente que pueden servir para todos los casos de la práctica, teniendo en cuenta los pesos del material móvil moderno, y con toda la aproximación que se puede desear.

Daremos á conocer estas cargas y el modo de aplicar las principales reglas de la circular austriaca, y extenderemos la aplicación

de las cargas uniformemente repartidas al cálculo de los puentes de carreteras y de ferrocarriles económicos, evitando así el estudio de la envolvente de los momentos flectores y esfuerzos cortantes correspondientes á un tren que puede ocupar cualquier posición sobre los tramos, problema demasiado complejo para ser tratado en un libro elemental, y del que se puede prescindir casi siempre en la práctica al verificar los cálculos de resistencia de un puente metálico.

96. CARGAS UNIFORMEMENTE REPARTIDAS QUE SIRVEN DE BASE AL CÁLCULO DE LOS PUENTES PARA FERROCARRILES.—Antes de dar á conocer estas cargas, advertiremos que en la circular austriaca se han considerado dos cargas diferentes, una para el cálculo de los momentos flectores, que debe suponerse extendida á todo el tramo, y otra para los esfuerzos cortantes, que se supone aplicada á la parte de tramo comprendida entre la sección en la cual se trata de calcular el esfuerzo cortante y el apoyo más distante de la misma. Esta manera de proceder se funda en que el esfuerzo cortante máximo correspondiente á un punto cualquiera de la viga, que es el que interesa conocer para calcular la sección del alma ó de las barras de la celosía, no corresponde al caso en que todo el tramo está cargado, sino que se realiza cuando se carga únicamente la parte comprendida entre dicho punto y el apoyo más distante (1). Por mucho tiempo se han calculado las dimensiones del alma, ó de las barras en las vigas de celosía, con arreglo al esfuerzo cortante correspondiente á una carga extendida á todo el tramo, pero esto es un verdadero error que conduce á dimensiones insuficientes, y debe evitarse, adoptando el método prescrito por la circular austriaca.

---

(1) Es fácil demostrar esta proposición. Consideremos una viga apoyada por sus extremos, y en ella un punto M cuya abscisa x, contada desde el apoyo izquierdo, sea menor que la mitad de la luz l. Supongamos que se carga á razón de p kg. por metro lineal una parte λ situada á la derecha del punto M, y cuyo extremo de la derecha coincide con el apoyo derecho. El esfuerzo cortante E en el punto M será

$$E = X = \frac{p\,\lambda^2}{2\,l},$$

siendo X la reacción del apoyo izquierdo. El máximo de E se realizará cuando λ sea

No nos es posible entrar en el desarrollo del estudio minucioso que conduce á la determinación de las cargas uniformes equivalentes á los trenes tipos admitidos para las pruebas. Remitiremos al lector que desee conocerlo á la obra de Leber y Bricka, limitándonos á traducir las prescripciones que interesan para las aplicaciones prácticas (1).

Son las siguientes:

«Las cargas que se deben considerar en los cálculos de resistencia, se componen del peso propio de la construcción (carga permanente) y de las cargas accidentales que provienen del material móvil (carga móvil).

Se deberán tener en cuenta además los efectos del viento, y si el sistema de construcción adoptado lo exige, los cambios de temperatura. Los cálculos de resistencia se efectuarán con arreglo á las prescripciones siguientes:

a) Para el cálculo de las cabezas en los puentes de los tipos usuales de tramos independientes, la carga accidental por metro lineal que deberá admitirse como uniformemente repartida en todo

---

máximo, es decir para $\lambda = l - x$, puesto que la carga ha de estar á la derecha de M; su valor será

$$E = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l}.$$

Este es el máximo positivo del esfuerzo cortante. Si consideramos cargada una parte λ de la viga á la izquierda de M y á partir del apoyo izquierdo, tendremos

$$E = X - p\,\lambda = -\frac{p\,\lambda^2}{2\,l},$$

puesto que $X = p\,\lambda\,\frac{2\,l-\lambda}{2\,l}$; y su máximo será $E = -\frac{p\,x^2}{2\,l}$.

Este es el máximo negativo, y en el supuesto de ser $x < \frac{l}{2}$ su valor absoluto es menor que el del máximo positivo.

Por lo tanto, queda demostrado que el mayor valor absoluto del esfuerzo cortante correspondiente á una carga p por metro lineal en una sección dada, se obtiene cuando se aplica la carga á la región comprendida entre dicha sección y el apoyo más lejano.

(1) La Real orden de 23 de Abril de 1893, en que se fijan las reglas que deben tenerse presentes para la redacción de proyectos de puentes metálicos, autoriza á los ingenieros para adoptar las cargas prescritas por las circulares extranjeras; de modo que pueden admitirse en los puentes que se proyecten para los ferrocarriles las de la circular austriaca que nosotros hemos adoptado.

el tramo, contado entre los ejes de los apoyos, se fijará por el cuadro ó escala siguiente:

Escala *a.*

Luz en metros.	Carga móvil en toneladas.	Luz en metros.	Carga móvil en toneladas.	Luz en metros.	Carga móvil en toneladas.
1,0	30	5	11,5	40	5,6
1,5	20	10	8,5	80	4,4
2,0	15	15	7,0	120	3,8
2,5	13,5	20	6,5	160	3,4

Para las luces intermedias se efectuará una interpolación rectilínea (1).

b) Para el cálculo de las barras de celosía en las vigas principales de los mismos puentes, los esfuerzos cortantes debidos á la carga accidental y contados en uno ú otro sentido para cada sección, se determinarán por la hipótesis de una sobrecarga que se extienda desde la sección en cuestión al apoyo que se debe considerar según el sentido del esfuerzo buscado.

Esta sobrecarga se fijará por metro lineal de vía independientemente de la luz del puente, y teniendo en cuenta solamente la longitud de la parte del puente en que obra la sobrecarga, con arreglo al cuadro ó escala inserto á continuación:

Escala *b.*

Longitud cargada, en metros.	Carga por metro de la parte de puente cargada, en toneladas.	Longitud cargada, en metros.	Carga por metro de la parte de puente cargada, en toneladas.	Longitud cargada, en metros.	Carga por metro de la parte de puente cargada, en toneladas.
1,0	30	5	14,0	40	6,2
1,5	25	10	10,0	80	4,8
2,0	20	15	8,5	120	4,0
2,5	18	20	7,6	160	3,5

(1) Es decir, se supondrá que entre las dos luces del cuadro que comprenden á la que se estudia, las cargas varían en razón inversa de las luces.

Para las longitudes intermedias se procederá por interpolación rectilínea.

c) Para los puentes de vigas continuas que descansan sobre más de dos apoyos, se calcularán las cabezas admitiendo para los tramos cargados, las cargas que, según el cuadro *a*, corresponden á sus luces, teniendo en cuenta las combinaciones de sobrecarga que producen los mayores momentos de flexión.

La circular austriaca prescribe, á continuación, el modo de utilizar la escala *b* para el cálculo de las barras de celosía en las vigas de tramos continuos. Nosotros no podemos emplear el método que en dicho documento se indica, porque requiere un procedimiento de cálculo demasiado complicado. En su lugar oportuno veremos que se puede, sin inconveniente, adoptar el procedimiento ordinario con las cargas de la escala *a*.

Tampoco necesitaremos tener en cuenta los cambios de temperatura, que no intervienen en ninguno de los sistemas de aplicación frecuente que hemos de estudiar. Su consideración es necesaria solamente en los puentes de arco, cuyo estudio sería impropio de un tratado elemental, y cuya aplicación es muy limitada en la práctica ordinaria.

Los trenes de prueba que desarrollan en la viga los mismos momentos flectores máximos que las cargas uniformemente repartidas del cuadro *a*, se componen del modo siguiente:

Tres locomotoras de cuatro ejes con una separación de 3,60 m. entre los ejes extremos y una longitud total de 9,50 m., con sus tenders de tres ejes, teniendo cada uno 3 m. de separación entre los ejes extremos y 6,10 m. de longitud total, con el número necesario de wagones de dos ejes con separación de 3 m. y longitud total de 7 m. Las cargas de los ejes en este tren son de 13 t. para las locomotoras, de 10 t. para los tenders y de 8 t. para los wagones.

Las cargas que se deben adoptar para los ferrocarriles de vía normal, pero en las cuales el material móvil es más ligero, se hallan definidas en el párrafo *h)* del capítulo de la circular relativo á las cargas.

Dicho párrafo es como sigue:

«*h)*. Para las líneas de vía de ancho normal de interés local ó de

carácter industrial, y en las cuales no circulan las pesadas locomotoras de cuatro ejes, convendrá reducir en consecuencia las cargas móviles prescritas en los párrafos *a* y *b*, á saber:

1.° En un 20 por 100 para las líneas cuyos puentes no están expuestos á sobrecargas más desfavorables que las que producen las locomotoras de 7,70 m. de longitud total de tres ejes, cuyas cargas son de 12 t. en cada uno y con separación de 1,20, con tenders de 6,30 m. de longitud total, con tres ejes, cuya carga total es de 25 t.

2.° En 40 por 100 para las líneas cuyos puentes no están expuestos á cargas más desfavorables que las que producen las locomotoras-tenders de 7,20 m. de longitud total de tres ejes cargados á razón de 8,50 t. cada uno y con una separación de 1,10 m.»

Las prescripciones de los párrafos *a* y *b* y las del párrafo *h)* resuelven prácticamente, en la mayoría de los casos de aplicación, el problema de la elección de las cargas uniformemente repartidas que conviene admitir para el cálculo de los puentes de ferrocarriles.

Hemos definido la composición del tren de prueba que desarrolla los mayores momentos flectores, llamado *tren flector*, y hemos dicho que las cargas inscritas en el cuadro *a*, uniformemente repartidas en el tramo, desarrollan en las diversas secciones de la viga momentos flectores sensiblemente iguales á los máximos que en las mismas secciones puede desarrollar aquel tren, con una aproximación suficiente en la práctica.

Este tren flector está compuesto de dos máquinas orientadas en el mismo sentido y una en sentido contrario, caso que puede ocurrir en la explotación cuando un tren con dos locomotoras experimenta una avería dentro del puente, y acude en sentido opuesto una máquina de socorro (1).

---

(1) Supongamos que se quiere hallar, en una sección determinada de la viga, el momento flector máximo correspondiente á un tren; bastará considerar que el tren penetre por un extremo del puente, y suponiendo que avance de modo que las diversas fuerzas se vayan aplicando á la sección, hallar los momentos flectores correspondientes á cada posición, y elegir el mayor de ellos. Si repetimos los mismos cálculos para un número suficiente de secciones, y llevamos en cada una como ordenada el valor del momento máximo, obtendremos la curva envolvente de los momentos flectores que puede desarrollar el tren, cuya forma general se acerca á una parábola. Basta envolver esta curva por una parábola cuyo eje vertical coincida con el eje de simetría de la viga y calcular el peso *p* por metro lineal

El *tren cortante* que produce los mayores esfuerzos cortantes en una sección tiene una composición algo diferente, y sólo debe cubrir una parte del tramo para obtener los mayores esfuerzos cortantes; de aquí proviene la diferencia de las cifras prescritas en los cuadros *a* y *b*.

Pasemos ahora al estudio de las cargas correspondientes á los puentes para carreteras y para ferrocarriles económicos.

96. CARGAS UNIFORMEMENTE REPARTIDAS QUE SIRVEN DE BASE AL CÁLCULO DE LOS PUENTES PARA CARRETERAS Y PARA FERROCARRILES ECONÓMICOS.—Los puentes de carreteras deben estar en condiciones de resistir el mayor número de carros que quepan en él, de los más cargados que puedan circular por el puente, y, además, una acumulación de personas cuyo peso se evalúa á razón de 300 kg. por m.^{2} Para las luces pequeñas, los momentos flectores y esfuerzos cortantes correspondientes á la primera de estas cargas son superiores á los producidos por la segunda; pero, á partir de cierto límite, la segunda es más desfavorable que la primera. Este límite varía con la clase de carros que se consideren, y, por lo tanto, hay necesidad, en cada caso, de determinar los máximos momentos flectores y esfuerzos cortantes en diversas secciones del puente, para cualquier posición de la sobrecarga, que es el mismo problema cuya resolución hemos evitado en los puentes para ferrocarriles, determinando las cargas uniformes equivalentes. Puede hacerse lo mismo para los puentes de carreteras, y de este modo se simplifican notablemente los cálculos de resistencia, como ya hemos indicado.

A raíz de la publicación de la circular francesa de 1877, Kleitz

---

correspondiente á dicha parábola, para obtener el peso uniformemente repartido equivalente al tren. Al tratar de cubrir la curva de los momentos flectores por medio de una parábola, se observa la imposibilidad de conseguirlo en los puntos próximos á los apoyos, á no adoptar una parábola cuya ordenada máxima sea muy superior á la de la curva de los momentos verdaderos. Por esta razón se acepta una parábola cuyas ordenadas cerca de los apoyos sean inferiores á las de la curva verdadera, lo cual no tiene inconveniente en la práctica, puesto que, en esta región de la viga, las necesidades de la construcción obligan á dar á las cabezas una resistencia muy superior á la exigida por la curva de los momentos. Leber ha adoptado para esta diferencia un límite de 6 por 100 del verdadero momento, en la sección situada á la sexta parte de la luz á contar desde el apoyo, tolerancia que en ningún caso puede conducir á un trabajo exagerado de material.

Las cargas uniformes equivalentes á los esfuerzos cortantes se definen y calculan de un modo análogo.

publicó en los *Annales des ponts et chaussées* una importante Memoria, en la que dió á conocer las cargas uniformemente repartidas correspondientes á una fila de carros cuyos pesos son los prescritos en aquel documento. Según éste, los puentes metálicos deben tener la resistencia suficiente para permitir el paso de una ó, si el ancho lo permite, varias filas no interrumpidas de carros de cuatro ruedas, cuyo peso total sea de 16 t., y en las localidades en que no existan esta clase de vehículos, de carros de dos ruedas de 11 t. de peso. En la circular moderna de 29 de Agosto de 1891 se conserva la condición relativa á los carros de cuatro ruedas con el peso indicado, pero se reduce á 6 t. el de los de dos ruedas, habiéndose reconocido que es exageradísimo el de 11 t. En ella se eleva á 400 kg. por m.^{2} el peso de una acumulación de personas. Las tablas de Kleitz están calculadas con arreglo á la circular de 1877.

Los formularios oficiales para la redacción de puentes metálicos, vigentes en España, fijan como cargas las correspondientes á carros de dos ruedas de 9 t., y una carga de 300 kg. por m.^{2}, debiéndose calcular las piezas del puente con arreglo á la más desfavorable. Sin embargo, habiéndose reconocido exagerado generalmente el peso de 9 t., los Ingenieros están autorizados para adoptar como base de los cálculos los carros más pesados de la localidad. Puede servir de tipo el peso de 6 t., que no creemos sea rebasado sino excepcionalmente. En cuanto á los carros pesadísimos de cuatro ruedas que se mencionan en las circulares francesas, son casi desconocidos en nuestro país, y no se deben tener en cuenta, aunque por excepción pudiera presentarse alguno.

Por lo tanto, para resolver con facilidad el problema, hemos formado tablas con las cargas correspondientes á carros de 6 y 8 t., suficientes para todos los casos que pueden ocurrir en la práctica, deduciendo por interpolación las correspondientes á carros de 5, 7 y 9 t., si se quisieran tener en cuenta.

En el siguiente cuadro hemos incluído las cargas dadas por Kleitz para carros de 11 t.; la tercera columna comprende las correspondientes á carros de 6 t., deducidas de las anteriores, reduciéndolas en la relación de los pesos de los carros (incluso el tiro), regla que da el mismo autor en la Memoria mencionada.

Se han deducido directamente las cargas correspondientes á los carros de 4, 6 y 8 t. que figuran en las tres columnas siguientes (1) y se puede observar la conformidad entre las cargas así deducidas para carros de 6 t. con las obtenidas por medio de la regla de Kleitz.

Finalmente, la última columna contiene las cargas que corresponden al caso en que el tiro se enganche por parejas, con carros de 6 t., para que se pueda juzgar del aumento necesario en este caso, por estar más concentrado el peso del tiro, y, sobre todo, por caber dentro del tramo mayor número de vehículos.

---

(1) Este trabajo se ha llevado á cabo por los alumnos de segundo año de la Escuela de Ingenieros de Caminos en los cursos de 1892-93 y 1894-95. Cada alumno estudió un caso correspondiente á una luz y un tren de carros de tipo determinado. Se han hecho variar las luces de 2 en 2 m. desde 6 hasta 30 m. Se han calculado los momentos flectores y esfuerzos cortantes máximos en secciones distantes entre sí 3 m. para las luces mayores y 1 m. para las pequeñas. Todos los casos se han comprobado gráficamente por el procedimiento conocido que puede verse en cualquier tratado de Estática gráfica.

Al tratar de envolver las curvas de los momentos flectores verdaderos por una parábola, encontramos la misma dificultad señalada por Leber, y á la que nos hemos referido en la nota anterior; se ha resuelto adoptando la misma condición que aquel Ingeniero, es decir, que, en el punto situado al sexto de la luz, el error por defecto de la ordenada de la parábola sea inferior al 6 por 100 de la ordenada de la verdadera curva de los momentos. En puntos muy próximos á los apoyos resultan necesariamente errores mucho mayores. Pero hemos comprobado directamente, que áun con la composición más desfavorable que puede admitirse para la viga, el trabajo del material es siempre muy inferior á 6 kg. por mm.^{2}

Del mismo modo se han determinado las cargas uniformemente repartidas que producen los mismos esfuerzos cortantes máximos que el tren de carros. Si se supone que una carga uniforme de p kg. penetra en el tramo por el apoyo izquierdo y avanza hasta cubrirlo por completo, el lugar geométrico de los esfuerzos cortantes en las secciones que van limitando la carga es una parábola de eje vertical tangente al eje de la viga en el apoyo izquierdo. Si, en vez de considerar la carga uniformemente repartida extendida á una parte del tramo, se sustituye por el tren de carros (saliendo ó entrando en el puente y eligiendo la disposición más desfavorable), se obtiene una curva cuya forma general se asemeja á la de las parábolas antes citadas; esta curva se puede sustituir por una parábola y determinar el peso p que le corresponde.

Al hacer esta sustitución resulta, en este caso, imposible, adoptar una parábola cuyas ordenadas hacia el centro de la viga sean superiores á las de la curva verdadera; y las que corresponden á las cargas del cuadro no satisfacen á esta condición. Por esta razón aconsejamos en el texto que se rebaje el coeficiente de resistencia en las barras de la celosía de la zona inmediata al centro; pero esta rebaja resulta de las necesidades de la construcción, y la insuficiencia de las cargas en esa región no tiene ninguna importancia.

En este estudio hemos exagerado de intento el peso de las caballerías y la carga que pueden arrastrar, adoptando los datos de los autores franceses, por ser esto favorable á la estabilidad.

También debemos advertir que se ha supuesto que las cargas se aplican directamente á las vigas, en vez de transmitirse á ellas por el intermedio de las viguetas, como sucede, en realidad, en casi todos los puentes. Pero las diferencias que de esto resultan en los valores de los momentos flectores y esfuerzos cortantes máximos son completamente despreciables en la práctica.

Cargas uniformemente repartidas por metro lineal equivalentes, en cuanto á los momentos flectores, á trenes de carros de diversos tipos para puentes de carretera.

LUCES. — *Metros.*	Carros de 11 t., según Kleitz. — *Kilogramos.*	Carros de 6 t., según Kleitz. — *Kilogramos.*	Carros de 4 t. — *Kilogramos.*	Carros de 6 t. — *Kilogramos.*	Carros de 8 t. — *Kilogramos.*	Carros de 6 t. con enganche por parejas. — *Kilogramos*
6	3.667	2.200	1.400	2.111	2.690	2.310
8	2.750	1.650	1.100	1.625	2.225	1.733
10	2.218	1.330	960	1.300	2.020	1.397
12	1.857	1.114	840	1.112	1.450	1.170
14	1.610	966	800	980	1.300	1.020
16	1.429	857	En adelante, 300 kg. por m.²	900	1.125	950
18	1.287	800		840	1.030	900
20	1.177	En adelante, 300 kg. por m.²	.....	800	950	880
22	1.097	.....	.....	En adelante, 300 kg. por m.²	900	865
24	1.019	.....	.....		880	850
26	955	.....	.....	.....	840	840
28	903	.....	.....	.....	800	830
30	851	.....	.....	.....	En adelante, 300 kg. por m.²	815
32	834	.....	.....	.....		800
34	818	.....	.....	.....	.....	En adelante, 300 kg. por m.²
36	801	.....	.....	.....	.....	
40	770	.....	.....	.....	.....	
	En adelante, 300 kg. por m.²					

Los pesos consignados en el cuadro son los correspondientes á una fila de carros, y es fácil deducir, en cada caso, la carga que corresponde á una viga según la composición del puente. Así, si el puente es de dos vigas principales, con aceras y un firme bastante ancho para que puedan cruzarse dos vehículos, corresponderá á cada viga, por metro lineal, la cifra consignada en el cuadro, y, además, 300 kg. por metro superficial de acera en un metro de longitud del puente.

La longitud de los carros que han servido de tipo para el cálculo de estas cargas es de 3 m., la distancia entre los centros de gravedad de las caballerías 2,50 m. y el peso de cada una de 500 kg. Se suponen tiros de 3, 4 y 5 caballerías respectivamente para los carros de 4, 6 y 8 toneladas. Las longitudes ocupadas por un carro con su tiro son, según los casos, de 10,50, 13 y 15,50 m.

Las cargas uniformemente repartidas que dan esfuerzos cortantes equivalentes á las filas de carros de los tipos considerados son diferentes de las anteriores. Se han determinado directamente, y se consignan en el siguiente cuadro:

Cargas uniformemente repartidas por metro lineal equivalentes en cuanto á los esfuerzos cortantes á trenes de carros de diversos tipos para puentes de carretera.

LUCES. — *Metros.*	CARROS de 4 toneladas. — *Kilogramos.*	CARROS de 6 toneladas. — *Kilogramos.*	CARROS de 8 toneladas. — *Kilogramos.*
6	2.100	3.000	3.800
8	1.725	2.300	3.000
10	1.500	2.000	2.400
12	1.300	1.700	2.000
14	1.130	1.400	1.700
16	1.050	1.200	1.500
18	950	1.100	1.400
20	900	1.000	1.300
22	En adelante	950	1.220
24	300 kg. por m.²	900	1.150
26	.....	En adelante	1.100
28	.....	300 kg. por m.²	1.010
30	.....	.....	980
32	.....	.....	En adelante 300 kg. por m.²

Estas cargas no corresponden á las de la escala *b* de la circular austriaca, que hemos adoptado para los puentes de ferrocarriles. Allí hemos visto que la carga que produce en una sección un esfuerzo cortante equivalente al del tren de prueba no depende de la luz del puente, sino de la longitud cargada, es decir, de la distancia de la sección que se considera al apoyo más lejano; de modo que, para un mismo puente, hay que adoptar diversas cargas. En el cuadro que precede corresponde la misma carga por metro lineal cualquiera que sea la sección en que se quiera determinar el esfuerzo cortante, para un puente de luz dada; pero la longitud que se ha de suponer cargada es también la distancia entre la sección considerada y el apoyo más lejano. Así, si se trata de un puente de 18 m. de luz, y se quieren conocer los esfuerzos cortantes correspondientes al apoyo y á las secciones situadas á 5 y 9 m. del mismo, la carga por metro lineal, suponiendo que el tipo de carros adoptado sea el de 6 toneladas, será, para las tres secciones, 1.100 kg. Para la primera se supondrá esta carga extendida á todo el tramo, para la segunda, á los 13 m. comprendidos entre la sección y el apoyo de la derecha, y, para la tercera, á la mitad de la derecha del tramo.

Debemos advertir que estas cargas producen esfuerzos cortantes algo mayores que los verdaderos en la región inmediata á los apoyos, y algo menores hacia el centro del tramo. Se puede compensar rebajando algo el coeficiente de resistencia para el cálculo de las barras de esta región, lo cual no tiene ningún inconveniente y resulta casi siempre necesario al adoptar secciones prácticas, por ser generalmente muy pequeñas las que da el cálculo, y no poderse formar con hierros de fabricación corriente; comprobaremos esta verdad al estudiar ejemplos numéricos.

Siguiendo el mismo procedimiento hemos determinado las cargas uniformemente repartidas correspondientes á los puentes para ferrocarriles de 1 m. de ancho.

El tren tipo se compone de dos locomotoras con sus tenders y un número indefinido de wagones. Las locomotoras son de cuatro ejes motores de 10 toneladas distantes entre sí 1,20 m., y cada uno de los ejes restantes del tren transmite un peso de 8 toneladas. Estos distan entre sí 3 m.

La disposición de las tablas es la misma que hemos explicado para las carreteras, y se aplican del mismo modo (1).

Cargas uniformemente repartidas por metro lineal equivalentes, en cuanto á los momentos flectores, al tren tipo de prueba para ferrocarriles de vía de 1 m.

LUCES. — *Metros.*	CARGAS por metro lineal. — *Kilogramos.*	LUCES. — *Metros.*	CARGAS por metro lineal. — *Kilogramos.*
5	8.700	40	3.750
10	6.300	45	3.700
15	5.100	50	3.650
20	4.500	60	3.450
25	4.200	70	3.300
30	4.000	80	3.200
35	3.900		

Para luces intermedias se procede por interpolación rectilínea.

Cargas uniformemente repartidas por metro lineal equivalentes, en cuanto á los esfuerzos cortantes, al tren tipo de prueba para los ferrocarriles de vía de 1 m.

LUCES. — *Metros.*	CARGA por metro lineal. — *Kilogramos.*	LUCES. — *Metros.*	CARGA por metro lineal. — *Kilogramos.*	LUCES. — *Metros.*	CARGA por metro lineal. — *Kilogramos.*
5	11.000	30	5.000	60	4.250
10	8.000	35	4.850	70	4.000
15	6.700	40	4.700	80	3.800
20	5.800	45	4.625		
25	5.300	50	4.550		

Para luces intermedias se procede por interpolación rectilínea.

(1) Las cargas uniformemente repartidas correspondientes á los momentos flectores, dan lugar á curvas de momentos que se aproximan mucho á la verdadera curva de los momentos máximos que produce el paso del tren tipo. Puede comprobarse fácilmente trazando dichas curvas por medio de las tablas de M. Henry, *Formules, barêmes et tableaux*, enciclopedia Lechalas.

Por las mismas razones indicadas al tratar de los puentes para carreteras, conviene rebajar el trabajo de las barras de la celosía correspondientes al tercio central de la viga.

97. Sección y diámetro de los rodillos de dilatación. — Es sabido que los tramos metálicos descansan sobre los apoyos por el intermedio de cierto número de rodillos de fundición ó de acero que se apoyan en una placa de los mismos materiales, empotrada por medio de barrotes en la fábrica. Se ha intentado por diversos autores obtener una fórmula racional para fijar el número y el diámetro de los rodillos, conociendo el peso que insiste en ellos, que es la reacción del apoyo, ó sea la mitad del peso total del tramo con su sobrecarga, en el caso de los puentes de tramos independientes.

Ninguna de estas fórmulas resuelve satisfactoriamente el problema, á nuestro juicio, y es indispensable acudir á la experiencia para obtener una regla práctica aceptable.

Prácticamente se resuelve el problema con facilidad, fundándose en datos experimentales que conducen á una regla muy sencilla. M. Deslandres en una Memoria publicada en los *Annales des ponts et chaussées*, número de Junio de 1893, da cuenta de una serie de experimentos llevados á cabo con el objeto de averiguar qué cargas se pueden imponer á estos rodillos. De dichos experimentos resulta que no puede adoptarse una carga que no exceda del límite de elasticidad del rodillo, porque basta una muy pequeña, inferior á las usadas en los puentes, para producir una deformación permanente. Si se siguen aumentando las cargas, se observa que las deformaciones permanentes crecen proporcionalmente á ellas hasta llegar á una presión que el autor llama *crítica*, á partir de la cual cesa la proporcionalidad, aumentando aquellas con mayor rapidez que las cargas. En los diversos experimentos realizados, la menor presión crítica observada fué de 44 kg. por centímetro cuadrado de la sección diametral del rodillo; y bajo esta presión, la deformación del cilindro no excedió de $^1/_{30\cdot000}$ del radio del mismo. En consecuencia, para tener en cuenta las imperfecciones inevitables de ejecución, el autor propone adoptar como carga de seguridad la mitad de aquella presión crítica. Debemos advertir que, aún antes de ser conocidos los

experimentos de Deslandres, se adoptaban en los proyectos cargas que satisfacen á esta condición.

Por consiguiente, se puede admitir con toda confianza, como regla práctica, que se deben proporcionar la longitud, el diámetro y el número de rodillos de un aparato de dilatación, de modo que la carga total que insiste en él dividida por la suma de las secciones diametrales de los rodillos, expresada en centímetros cuadrados, no exceda de 22 kg.

Cuando los rodillos son de acero é insisten en placas de fundición, debe rebajarse el límite inferior en $^1/_5$, adoptando 18 kg.

La placa de apoyo debe tener una extensión suficiente para que, repartida la reacción del apoyo en su cara inferior, se obtenga una presión por centímetro cuadrado igual ó inferior á la carga de seguridad del sillar en que se apoya.

98. Roblonado.—Otro de los problemas que hay que resolver en todos los proyectos de puentes metálicos, es el relativo al roblonado. Dada la longitud, necesariamente limitada, de las chapas de palastro, es menester empalmarlas con frecuencia. Los empalmes se hacen recubriendo la junta con otra chapa de la longitud necesaria, que se cose con roblones á los trozos que se han de empalmar (figura 79). Otras veces se colocan dos cubrejuntas una por cada lado (fig. 80).

Fig 79

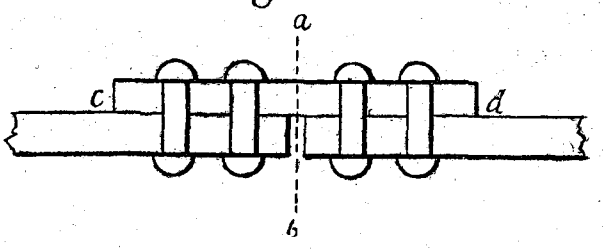
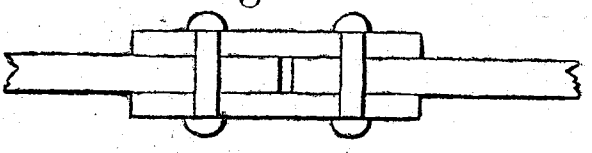


Fig 80



Consideremos el primer caso, y supongamos, para fijar las ideas, que la chapa esté sometida á una tensión. En *a b* queda interrumpida la placa y hay que restablecer por medio de la cubrejunta y de los roblones su resistencia, que es proporcional al área de la placa, ó sea, su espesor multiplicado por el ancho. Los roblones tienden á ser cor-

tados según su sección recta en el plano $c\,d$, y, por lo tanto, la suma de las áreas multiplicada por la resistencia al esfuerzo cortante deberá ser igual al área de la sección de la chapa multiplicada por la resistencia á la tensión. Si llamamos S á la suma de las áreas de las secciones rectas de los roblones, R_e á la resistencia al esfuerzo cortante, s á la sección de la chapa y R_t á la resistencia á la tensión, tendremos

$$S\,R_e = s\,R_t$$

de donde

$$S = s \times \frac{R_t}{R_e}.$$

Se admite en la práctica, como dato de experiencia, $\frac{R_t}{R_e} = \frac{3}{2}$; luego

$$S = \frac{3}{2}\ s.$$

En el segundo caso (fig. 80), se ve que cada roblón resiste por dos secciones; por consiguiente, el área S deberá ser la mitad que en el primer caso; bastará un número de roblones igual á la mitad, suponiendo que tengan igual diámetro.

En los puentes, el diámetro de los roblones que se emplean en las piezas principales suele ser de 18, 20, 22 ó 25 mm. de diámetro, y las áreas de las secciones rectas correspondientes son 254, 314, 380 y 490 mm.^{2} Las chapas de palastro tienen espesores que varían de 8 á 20 mm.

Supongamos que se trata de empalmar dos chapas de 10 mm. de espesor y 500 de ancho con roblones de 20 mm.

Tendremos

$$s = 10 \times 500 = 5.000$$

y

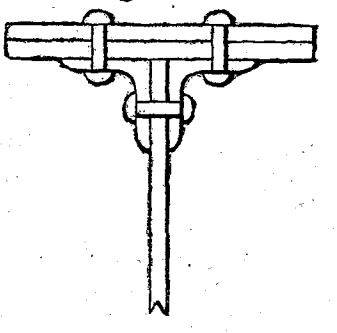
$$S = \frac{3}{2} \times 5.000 = 7.500 \text{ mm.}^2$$

El número de roblones necesario, suponiendo que se emplee una sola cubrejunta, será $\frac{7.500}{314} = 25$ roblones, forzando una unidad,

puesto que el resultado ha de ser entero. Claro está que la cubrejunta ha de tener la misma sección que las chapas empalmadas.

Otro problema relativo al roblonado se presenta muy frecuentemente en la práctica. Supongamos que se trata de enlazar un alma vertical de 8 mm. de espesor con una chapa horizontal de 10 que forma la cabeza de una viga, por medio de dos hierros de ángulo roblonados á ambas chapas (fig. 81). Vamos á determinar el número de roblones por metro lineal necesario en las uniones con el alma y con las cabezas.

Fig 81



En la unión del alma con los hierros de ángulo, los roblones habrán de tener una resistencia equivalente á la del alma en 1 m. de longitud, y, por lo tanto, tendremos $s = 8 \times 1.000 = 8.000$ mm.^{2}; luego

$$S = \frac{3}{2} \times 8.000 = 12.000 \text{ mm.}^2$$

Si adoptamos roblones de 22 mm., cuya área es de 380 mm.^{2}, su número será, observando que trabajan á doble sección, $\frac{12.000}{2 \times 380} = 17$ por metro lineal.

Para la unión de los hierros de ángulo con las chapas de la cabeza, se emplean generalmente roblones de igual diámetro y en número igual, para cada cantonera, al que sirve para la unión del alma y de los hierros de ángulo.

Terminaremos lo relativo al roblonado indicando algunas reglas prácticas que deben tenerse presentes al estudiar los proyectos.

1.° El diámetro de los roblones debe ser, por lo menos, doble del espesor de las chapas que se trata de coser.

2.° La separación de eje á eje de los roblones no debe exceder de cinco veces su diámetro. En ningún caso debe ser mayor de 0,10 m.

3.° La distancia entre el eje del roblón y el borde de la hoja de palastro debe ser, por lo menos, dos veces y media su diámetro.

4.° El límite del espesor total de las hojas de palastro que se pueden unir en buenas condiciones es 120 mm.

CAPÍTULO II.

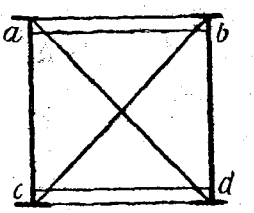
ESTUDIO GENERAL DE LOS ARRIOSTRAMIENTOS.

99. Objeto de los arriostramientos.—Los cuchillos principales de un puente metálico, que presentan una base de apoyo estrecha relativamente á su altura, no tienen, por sí mismos, condiciones de estabilidad, y, aún estando enlazados por el piso, podría ser volcado el puente, ó por lo menos, sometidas algunas de sus piezas á un trabajo excesivo por efecto de ciertos esfuerzos horizontales de los cuales el principal es el producido por el viento. Los arriostramientos, ó enlaces de los cuchillos principales entre sí, tienen por objeto oponerse á estas acciones. Se distinguen dos clases de arriostramientos; los horizontales y los transversales.

Si el piso está en la parte inferior y la altura de las vigas excede de ciertos límites, se forma, á la altura de las cabezas superiores un entramado ó viga horizontal que enlaza los cuchillos principales. Este entramado y el piso constituyen una especie de puente con las vigas horizontales, que se halla con relación á los esfuerzos producidos por el viento en condiciones semejantes á las de los cuchillos principales relativamente á las cargas. Para poder emplear esta disposición, es preciso que quede debajo del arriostramiento espacio suficiente para el tránsito. Si el piso está en la parte superior ó intermedia, se establece el arriostramiento horizontal á la altura de las cabezas inferiores, consiguiéndose el mismo resultado que en el caso anterior.

Supongamos que el piso está en la parte superior (fig. 82) y que, en el plano vertical de una vigueta *a b*, existe, á la altura de las cabezas inferiores, una riostra transversal *c d*. La sección transversal del puente tiene la forma de un rectángulo formado por estas dos piezas y por las almas verticales de los cuchillos, y se comprende que la acción del viento, soplando horizontalmente y normalmente al eje del puente, tiende á deformar este rectángulo convirtiéndole en un paralelógramo. Para hacer imposible esta deformación, es menester triangular la sección transversal añadiendo ciertas piezas, según las diagonales, por ejemplo, que forman una cruz de San Andrés. Cuando la deformación que hemos mencionado tienda á producirse, estas piezas desarrollarán esfuerzos de tensión ó de compresión que se pueden calcular, y se opondrán al movimiento, puesto que ahora la sección transversal se compone de triángulos indeformables.

Fig 82.



Tal es el objeto de los arriostramientos transversales. Como ambas clases de arriostramientos tienen por objeto oponerse á los esfuerzos transversales, y de éstos el más importante es el producido por el viento, antes de estudiar las disposiciones y cálculos de las piezas de arriostramiento, vamos á indicar las reglas que se usan para evaluar los esfuerzos producidos por el viento.

100. Evaluación de los esfuerzos producidos por el viento.— A fin de poder tener en cuenta el esfuerzo producido por el viento en el cálculo de los arriostramientos, se ha reducido su acción efectiva á una presión uniformemente repartida á razón de un cierto número de kilogramos por metro cuadrado, lo mismo que se hace cuando se trata de las cargas móviles. A consecuencia de la catástrofe ocurrida en el viaducto de Tay (Escocia), que fué derribado por el viento por insuficiencia de los arriostramientos, se hicieron en Inglaterra minuciosos estudios, que demostraron la necesidad de tener en cuenta, al proyectar puentes metálicos, la influencia del viento, cuya importancia verdadera se había desconocido hasta entonces. Actualmente todos los Ingenieros admiten como base de estos cálculos una presión de 270 kg. por metro cuadrado,

como máximo correspondiente á un viento huracanado. Sin embargo, no puede admitirse que esta presión máxima se realice estando cargado el puente con trenes, pues la circulación es imposible desde el momento en que la presión del viento excede de 170 kg. por metro cuadrado. Deben estudiarse, por consiguiente, dos hipótesis, y calcular los arriostramientos con arreglo á la más desfavorable, evaluando: 1.° El esfuerzo total que ejerce contra el puente descargado un viento equivalente á una presión de 270 kg. por metro cuadrado; y 2.° El correspondiente al puente cargado con un tren, en el supuesto de que la intensidad del viento equivalga á 170 kg. por metro cuadrado.

101. Evaluación de la superficie á que se aplica la presión del viento.—Respecto á la evaluación de la superficie sobre la cual obra el viento, no hay completa conformidad entre los Ingenieros. Una de las reglas que merecen más confianza, á nuestro juicio, es la prescripción de la circular austriaca, y á ella nos atendremos. Se supone que el viento obra sobre la superficie llena efectiva que presenta la primera viga principal, pero que dicha superficie se reduce, en las que vienen detrás, en una proporción que depende de la relación del área de los claros á la comprendida en el contorno de la cercha. Se comprende, en efecto, que después del choque del viento con la primera cercha debe quedar amortiguado el correspondiente á la que viene detrás.

Hé aquí el párrafo *f* de la circular austriaca, que se refiere á los esfuerzos del viento:

«La acción del viento se determinará por la hipótesis de un esfuerzo transversal de 270 kg. por m.^{2}, obrando sobre el puente descargado, y de 170 kg. por m.^{2} obrando sobre el puente cargado con un tren; se introducirá en los cálculos el más desfavorable de estos dos esfuerzos, á saber:

1.° Para el puente descargado, se tendrá en cuenta en los cálculos la superficie expuesta efectivamente á la acción del viento en una de las vigas principales, y la superficie de la otra medida del mismo modo, pero reducida según las indicaciones del cuadro siguiente:

Cuadro para la reducción de la superficie expuesta á la acción del viento, en la segunda viga principal.

RELACIÓN de la superficie de los claros de las mallas á la superficie total del contorno de la primera viga.	RELACIÓN para la reducción de la superficie expuesta á la acción del viento, en la segunda viga principal.
Para 0,40	0,2
» 0,60	0,4
» 0,80	1,0

Para los valores intermedios se procederá por interpolación rectilínea.

2.° Para el puente cargado, el tren será considerado como un rectángulo lleno de 2,50 m. de altura caminando á 0,50 m. encima de los carriles.

Como superficie expuesta, se admitirá la del tren y la de las partes de la construcción que exceden de su perfil en cada una de las vigas principales, así como estas mismas partes correspondientes á la otra, reducidas conforme al cuadro adjunto.»

102. Repartición del esfuerzo del viento y determinación del esfuerzo correspondiente á cada nudo.—Determinado el esfuerzo que obra sobre cada cuchillo, es menester estudiar cómo se reparte entre los dos entramados horizontales que han de resistirlo. Si las vigas son simétricas respecto á un eje horizontal, y se considera el caso del puente descargado, es natural repartir por igual el esfuerzo del viento entre ambos entramados, suponiendo que se hallen á la altura de las cabezas de las vigas principales. Pero, cuando se considera el puente cargado con un tren, éste recibe el primer impulso del viento y se transmite inmediatamente al piso; y, como el viento obra por impulsiones instantáneas, muchas veces no llega á repartirse entre los dos arriostramientos horizontales como si fuera una carga estática; por esta razón se admite generalmente que el piso resiste una porción mayor que el arriostramiento, y la regla práctica que se suele aplicar consiste en repartir por igual entre los

dos entramados horizontales el esfuerzo aplicado á la viga, y suponer que se aplica al piso todo el que obra sobre el tren.

Conociendo de este modo el esfuerzo por metro lineal correspondiente al entramado de arriostramiento, como éste es siempre una viga de grandes mallas en que las piezas concurren en determinados puntos de las cabezas, llamados *nudos* ó *articulaciones*, se calcula la carga correspondiente á cada nudo, suponiendo que ha de resistir el esfuerzo de las dos medias mallas contiguas. Se entiende por malla la distancia entre dos nudos.

103. Disposición general del arriostramiento horizontal.— El arriostramiento horizontal, juntamente con el piso, constituyen los dos entramados horizontales destinados á resistir al viento. El piso tiene siempre resistencia sobrada para este objeto, y únicamente puede haber necesidad, en algunos casos, de enlazar las viguetas entre sí por tirantes oblicuos, llamados contravientos, formando cruces de San Andrés.

El otro arriostramiento horizontal se constituye generalmente con piezas transversales rígidas que trabajan por compresión, á distancias que no difieren mucho del ancho de puente, y cruces de San Andrés según las diagonales de los recuadros que forman las cabezas de las vigas principales con las riostras transversales. Las diagonales están sometidas á tensión.

En resumen, el arriostramiento horizontal constituye, con las cabezas de las vigas principales, una viga horizontal de grandes mallas sometida á esfuerzos que sabemos evaluar, y el cálculo de sus diferentes piezas es problema que hemos de estudiar con detalle en su lugar oportuno. Después de hecho este estudio, resultarán más claras algunas consideraciones relativas al arriostramiento horizontal, cuyo desarrollo aplazamos por esta razón.

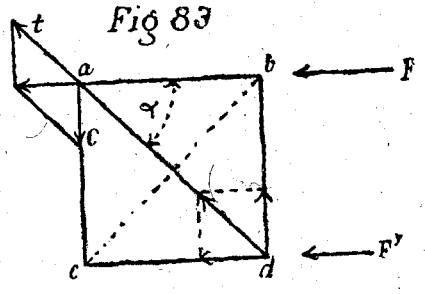
En los puentes de luces inferiores á 20 m. no hace falta desarrollar estos cálculos, porque la consideración del esfuerzo del viento conduce á dar á las piezas del arriostramiento dimensiones inferiores á las que deben adoptarse en la práctica. En este caso los arriostramientos se fijan por comparación con otros puentes, y para ello existen innumerables ejemplos.

104. Arriostramientos transversales.—Consideremos en pri-

mer lugar el caso más sencillo, en que el piso es superior (fig. 82). El arriostramiento se establece en el plano vertical de una vigueta $a\,b$, reuniendo las cabezas inferiores con una riostra $c\,d$, reforzando las almas de las vigas con montantes $a\,c$, $b\,d$, y triangulando la sección con las diagonales $a\,d$ y $b\,c$.

Supongamos calculado el esfuerzo F del viento sobre el nudo de la cabeza superior correspondiente á la sección. Consideremos (fig. 83) suprimida la diagonal $b\,c$.

Fig 83



El esfuerzo F determinará una compresión de la vigueta y se transmitirá al punto a. La vigueta tiene generalmente sobrada resistencia para no necesitar ser reforzada por este concepto. En el punto a el esfuerzo se descompone según las piezas $a\,c$, $a\,d$, determinando una tensión t en la diagonal $a\,d$ y una compresión C en el montante. Llamando α al ángulo $b\,a\,d$, tendremos

$$t = \frac{F}{\cos \alpha}. \qquad [1]$$

$$C = t \operatorname{sen} \alpha = F \operatorname{tg} \alpha. \qquad [2]$$

La diagonal $a\,d$ transmite su tensión al vértice d, donde se descompone según las dos piezas $c\,d$ y $b\,d$, comprimiendo á ambas. La compresión de $c\,d$ es igual á F, como puede verse en la figura, ó bien calculándola; su valor es, en efecto, $t \cos \alpha = F$; y la compresión del montante $b\,d$ es igual á la del $a\,c$, pues su valor es $t \operatorname{sen} \alpha = C$. Vemos que, para resistir el esfuerzo F, sólo entra en juego la diagonal $a\,d$; pero, como el viento puede obrar en sentido contrario, será necesaria la diagonal $b\,c$ que deberá resistir el mismo esfuerzo que la $a\,d$.

Al mismo tiempo obrará en el nudo inferior d otro esfuerzo que se transmitirá según $c\,d$ al nudo c, y dará lugar á una compresión del montante $c\,a$ y una tensión de la diagonal $c\,b$. Siendo F' el esfuerzo del viento, dicha tensión será

$$t_1 = \frac{F'}{\cos \alpha}$$

y la compresión del montante

$$C_1 = F' \operatorname{tg} \alpha.$$

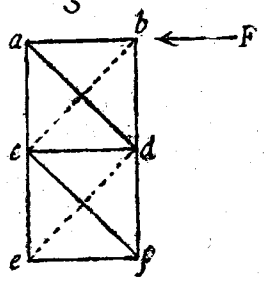
Se observerá que los efectos de las fuerzas F y F' se superponen en las piezas horizontales y en los montantes, de modo que la compresión de la riostra horizontal será $F + F'$, y la del montante $C + C_1 = (F + F') \operatorname{tg} \alpha$.

Si la inclinación de las diagonales es 45° esta compresión se reduce á $F + F'$.

Y en el caso en que F y F' son iguales, como resulta de las reglas establecidas cuando se considera el puente descargado, las compresiones de los montantes y de las riostras horizontales tienen por valor $2F$, siendo de 45° la inclinación de las diagonales.

Si la altura de las vigas es muy grande con relación al ancho, puede convenir emplear otra riostra transversal $c\,d$ (fig. 84) y dos cruces de San Andrés superpuestas. En efecto, en este caso el ángulo α sería demasiado próximo á 90° empleando el arriostramiento de la figura 82, y el valor de t, y, por tanto, las secciones de las diagonales serían muy grandes. El cálculo es idéntico al anterior; suprimidas las diagonales $b\,c$, $d\,e$, veremos que la $a\,d$ sufre una tensión dada por la fórmula [1], los montantes $a\,c$, $b\,d$, compresiones dadas por la [2] y la riostra $c\,d$ una compresión igual á F; luego el cuadro $c\,d\,e\,f$ se halla en las mismas condiciones que el $a\,b\,c\,d$, y los esfuerzos de las fuerzas son iguales á los de las correspondientes en el cuadro superior. Del mismo modo se razonaría si hubiera mayor número de cuadros superpuestos, y se vería que todas las piezas correspondientes en cada cuadro sufren iguales esfuerzos.

Fig 84.

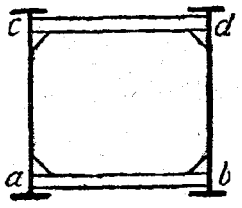


Si el piso está en la parte inferior, muchas veces no hay altura suficiente para poder colocar otro arriostramiento horizontal. En este caso se deben enlazar sólidamente las viguetas con montantes

unidos al alma y aumentar la altura de la vigueta en la unión, para obtener un empotramiento que haga invariable el ángulo recto del montante y la vigueta.

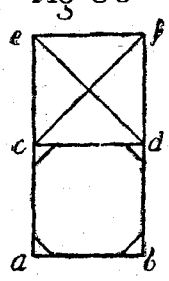
Cuando la viga tiene altura suficiente (fig. 85) para poder colocar el arriostramiento superior sin impedir el tránsito, se emplea el arriostramiento horizontal *c d*. Pero en este caso no se pueden colocar las diagonales, y para evitar que el rectángulo pueda deformarse, se disponen en los ángulos *a, b, c, d* unas consolas triangulares que producen el mismo efecto que el empotramiento indicado en el caso anterior, haciendo invariables estos ángulos.

Fig 85.



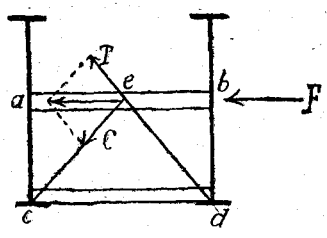
En el caso en que la viga tiene mucha altura (fig. 86), sobre la riostra *c d* colocada á bastante altura para no impedir la circulación, se puede emplear el arriostramiento transversal *c d e f* en la forma ordinaria; el cálculo se efectuará como en el primer caso que hemos examinado, y el rectángulo *a b c d* se reforzará por medio de empotramientos en los ángulos como en el caso anterior.

Fig 86



Consideremos, finalmente, el caso en que el piso está establecido á una altura intermedia. Si la altura del rectángulo *a b c d* es pequeña relativamente á la base *c d* para que pueda establecerse el arriostramiento por medio de una cruz de San Andrés, en buenas condiciones, se forma dicho arrostramiento por medio de los tornapuntas *c e*, *e d*, que, además de triangular la sección, proporcionan un punto de apoyo en su centro á la vigueta, pudiendo aligerarse esta pieza (fig. 87).

Fig 87.



Si *F* es el esfuerzo del viento que obra en *b*, este esfuerzo se transmitirá á *e* comprimiendo la vigueta. En *e*, dicho esfuerzo se descompondrá según las dos tornapuntas produciendo una compresión en la *e c* y una tensión en la *e d*. Estas dos fuerzas serán evidentemente iguales; llamándolas *T* y *C*, y siendo α el ángulo que

forman con la horizontal, tendremos

$$T = C = \frac{F}{\cos \alpha}.$$

La riostra horizontal podrá sufrir una compresión igual á F, puesto que en d se ejercerá también la acción del viento. Claro está que las dos tornapuntas deben componerse con hierros perfilados capaces de resistir á la compresión, puesto que el esfuerzo del viento puede ejercerse en sentido contrario al que hemos considerado.

Tales son las disposiciones de los arriostramientos que más frecuentemente se encuentran en la práctica, y con cualquiera de ellas pueden determinarse fácilmente las secciones de las diversas piezas que entran en su composición.

CAPÍTULO III.

CÁLCULO DE LAS VIGAS DE ALMA LLENA.

105. Puentes de luces pequeñas.—Los puentes de luces pequeñas se componen de un cierto número de vigas en doble T, compuestas de chapas y cantoneras, que sostienen directamente los carriles cuando se aplican á los ferrocarriles, y en las cuales insisten las piezas llenas que sostienen el firme, ya directamente, ya por el intermedio de viguetas, según el número de vigas que se emplee y su luz, cuando se aplican á las carreteras. Esta clase de vigas no se emplea en la actualidad más que para luces inferiores á 12 m., llegando excepcionalmente á 15; para luces mayores se adopta generalmente el sistema de celosía, que estudiaremos en el siguiente capítulo.

La altura de la viga varía entre $^1/_{10}$ y $^1/_{12}$ de la luz. El método de cálculo explicado en los números 25 y 26 puede evidentemente aplicarse á estas vigas; puede utilizarse el cuadro núm. 2 en todos los casos en que la altura de la viga no exceda de 1 m. Cuando la altura pasa de este límite, y muchas veces para alturas algo menores, se sigue otro procedimiento, el mismo que después aplicaremos á las vigas de celosía ordinaria, y que, por su frecuente aplicación al cálculo de los puentes metálicos, conviene conocer bien.

Está fundado en una hipótesis ya indicada al tratar de los momentos de inercia. Hemos visto que la resistencia al momento flector es proporcional al momento de inercia de la sección, con relación al eje horizontal de simetría; en el valor del momento de inercia influye principalmente la masa de las cabezas, y, en las vigas

de alguna importancia, el alma tiene un momento de inercia muy pequeño relativamente al total; se admite, en consecuencia, para facilitar el cálculo, que las cabezas solas resisten al momento flector, y el alma al esfuerzo cortante.

106. Cálculo de las cabezas.—Habremos de valernos de la fórmula [2] del núm. 21 que da el momento flector correspondiente á una sección á la distancia x del apoyo izquierdo,

$$M = \frac{1}{2} p x (l - x). \qquad [1]$$

La importancia de la viga permite, en efecto, realizar una economía apreciable proporcionando el espesor de las cabezas á los esfuerzos que han de resistir en las diversas regiones de la viga.

Supongamos que, en una sección cualquiera, hayamos calculado el momento flector M. Podemos fácilmente deducir la compresión de la cabeza superior ó la tensión de la inferior; sean C y T estas dos fuerzas. Sabemos que el momento flector es un par cuyas fuerzas contenidas en el plano vertical de simetría pueden aplicarse á dos puntos arbitrarios equidistantes del eje, con la sola condición de que el producto de la fuerza por el brazo de palanca sea igual á M. Supongámoslas aplicadas á los centros de gravedad de las cabezas y normales á las secciones de estas, y las fuerzas del par serán evidentemente las C, T. El brazo de palanca será la altura h de la viga (distancia entre los centros de gravedad de las cabezas); luego tendremos

$$M = C h = T h$$

de donde

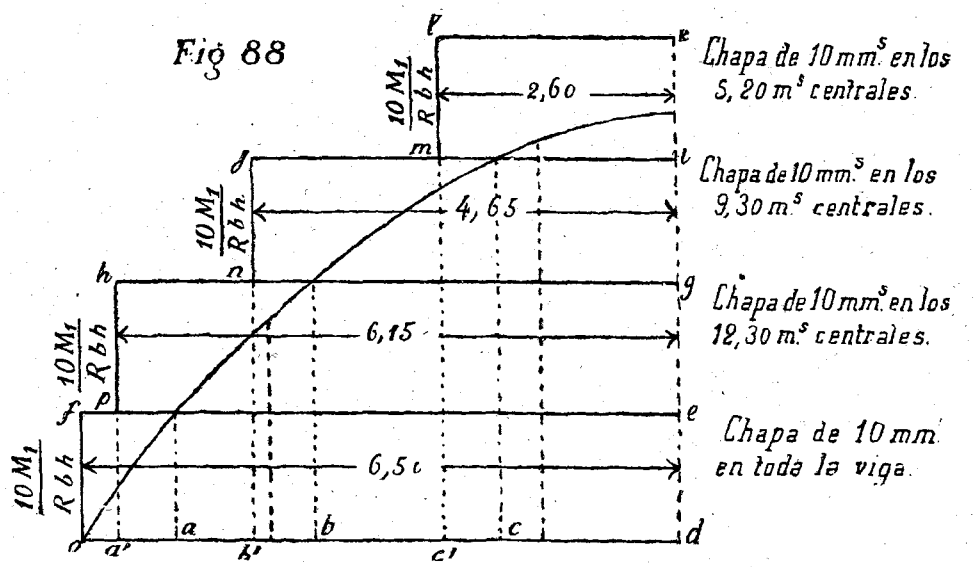
$$C = T = \frac{M}{h}.$$

El área de la cabeza que ha de resistir á este esfuerzo tiene una de sus dimensiones, el ancho b, constante en todas las secciones, y la otra es el espesor e que buscamos. Llamando R al coeficiente de resistencia, tendremos

$$\frac{C}{R} = \frac{T}{R} = \frac{M}{Rh} = b e \qquad \text{ó sea} \qquad e = \frac{M}{R b h}. \qquad [2]$$

Para estudiar con facilidad la distribución de las chapas de palastro, dibujemos la curva de los momentos M en una escala cualquiera (fig. 88).

La fórmula [2] hace ver que e es proporcional á M, puesto que



$R\,b\,h$ es constante. Por lo tanto, si consideramos que las ordenadas de la curva están divididas por $R\,b\,h$, estas mismas ordenadas serán los espesores buscados.

Cada milímetro de espesor de la cabeza está, pues, representado por

$$0{,}001 = \frac{M_1}{R\,h\,b}\ ,$$

suponiendo que b y h estén expresados en metros y R en kg. por m.^{2}; de esta ecuación podemos deducir M_1, que es el momento que puede resistir la cabeza por cada milímetro de espesor.

Según eso, podremos representar en la figura las chapas de palastro que nos propongamos emplear; si suponemos que adoptamos chapas de 10 mm. de espesor, cada chapa equilibrará una parte del momento flector igual á $\frac{10\,M_1}{R\,b\,h}$, y, para obtener la forma de la cabeza, bastará trazar una serie de horizontales que disten

esta cantidad y limitarlas por un contorno escalonado que envuelva á la curva de los momentos.

Vemos que, con los datos de la figura, en la región *c d* y su simétrica respecto á la sección media de la viga se necesitan cuatro chapas: en la *b c*, tres; en la *a b*, dos, y en la *o a*, una sola; en la práctica se prolongan las chapas unos 0,60 ó 0,70 m. más de lo estrictamente necesario, para que en los puntos *a*, *b*, *c* exista ya toda la trabazón que establecen los roblones entre las diversas chapas; por eso se han extendido desde el centro hasta los puntos *a'*, *b'*, *c'* y hasta sus simétricos respecto á la vertical del punto *d*.

Fácilmente se deducen también las anteriores consecuencias del valor aproximado del momento de inercia $I = \frac{1}{2}\,\omega\, h^2$ del núm. 25, fórmula [14]. No nos detendremos en ello, porque nos parece más claro y más elemental el razonamiento que acabamos de desarrollar.

107. CÁLCULO DEL ESPESOR DEL ALMA.—El espesor del alma se determina con la condición de que su sección vertical resista al esfuerzo cortante. Debe tenerse presente que el coeficiente de resistencia del esfuerzo cortante es algo menor que el de tensión ó compresión, variando entre $^5/_6$ y $^2/_3$ de este último. La determinación del espesor del alma sólo exige un cálculo ó comprobación sencillísima, porque áun en la sección en que es máximo el esfuerzo cortante, que, como se sabe, es el apoyo, basta una sola chapa de espesor moderado, y no pudiéndose reducir prácticamente en el resto de la viga, se conserva constante en toda su longitud. Basta, pues, dividir el esfuerzo cortante en el apoyo por la sección producida en el alma por un plano vertical, y ver si el trabajo por milímetro cuadrado es inferior al coeficiente de resistencia al esfuerzo cortante.

Pero constituída así el alma, no tendría la rigidez suficiente, y fácilmente se alabearía; por esta razón, en vez de emplear cubrejuntas planas para empalmar las diversas chapas que la componen, se emplean hierros en **T**, ó verdaderos montantes formados por dos cantoneras y una chapa normal al alma, en los puntos en que se han de ensamblar las viguetas ó las piezas de arriostramiento. Estos nervios normales al alma impiden su flexión alrededor de un

eje horizontal y paralelo al eje longitudinal de la viga; se aplican generalmente por ambos lados.

En el apoyo, la viga recibe un esfuerzo aislado de mucha consideración, que es la reacción del apoyo (igual al esfuerzo cortante). En la región limitada en que se apoya, debe reforzarse el alma con uno ó más nervios como los que acabamos de indicar, los cuales, juntamente con la parte del alma correspondiente á esa región, constituyen un montante cuya sección horizontal debe ser suficiente para resistir á la reacción del apoyo con un trabajo muy moderado. En estos puentes, con las disposiciones indicadas, es muy fácil satisfacer holgadamente á esta condición.

108. APLICACIÓN Á UN PUENTE DE 13 M. DE LUZ PARA FERROCARRIL. —Como aplicación de las indicaciones generales que preceden, vamos á verificar detalladamente los cálculos numéricos relativos á un puente de 13 m. de luz entre los ejes de los apoyos de las vigas, para ferrocarril de ancho normal.

La composición del puente se reduce á lo siguiente. Los carriles insisten sobre largueros de madera sostenidos directamente por las vigas principales del puente, arriostradas por piezas transversales horizontales á la altura de las cabezas y cruces de San Andrés. De los arriostramientos no nos ocuparemos, porque, como hemos indicado al tratar de ellos en general, para luces inferiores á 20 m., se establecen por comparación con obras construídas. Los cuchillos sostienen exteriormente, por medio de consolas, dos aceras con entablonado para el paso de los guardas.

Vamos á calcular las vigas principales. Fijamos su altura en 1,30 m. ($^1/_{10}$ de la luz), y asignamos á las cabezas un ancho de 0,35 m., $b = 0{,}35$ m. Suponemos también que se emplearán, para unir el alma con las cabezas, cantoneras de $\frac{80 \times 80}{10}$, cuya sección da un área de 1.500 mm.^{2}

Empecemos por evaluar el peso permanente por metro lineal. El cuadro del núm. 93 nos dará el peso de la parte metálica, al cual tendremos que agregar el de los carriles con sus largueros, y el del entablonado de las aceras correspondientes á 1 m. de longitud.

El cuadro da, por metro lineal de puente:

Para 10 m. de luz.....	783 kg.
» 15 » »	943 »

Luego para 13 m. de luz tendremos, haciendo la interpolación,

$$783 + \frac{943 - 783}{5} \times 3 = 879 \text{ kg.}$$

y el peso por metro lineal para cada viga será la mitad del anterior, ó sea 440 kg. en números redondos.

El peso permanente que buscamos será, por lo tanto,

Peso de la parte metálica.....	440 kg.
Larguero y carril.....	45 »
Peso del entablonado de la acera.....	35 »
TOTAL.....	520 kg.

Evaluemos ahora el peso por metro lineal de la carga móvil para el cálculo de las cabezas. Según el cuadro *a* de la circular austriaca, núm. 94, tenemos,

Para 10 m.....	8.500 kg.
» 15 ».....	7.000 »

Luego para 13 m. obtendremos, por interpolación rectilínea,

$$7.000 + \frac{8.500 - 7.000}{5} \times 2 = 7.600 \text{ kg.;}$$

y para una viga 3.800 kg.

El peso p por metro lineal que debemos sustituir en la fórmula [1] es

$$p = 520 + 3.800 = 4.320 \text{ kg.;}$$

y $l = 13$; de modo que la curva de momentos tendrá por ecuación

$$M = \frac{1}{2} \times 4.320 \, (13\,x - x^2) = 2.160 \, (13\,x - x^2).$$

Dada la simetría de la curva respecto á la vertical del punto medio de la viga, bastará dibujar la mitad, y como pasa por el apoyo, obtendremos suficiente exactitud calculando otros tres puntos, siendo uno de ellos el correspondiente al eje. Así obtendremos,

$$\begin{aligned} &\text{Para } x = 2 && M = 47.520 \\ &\text{»} \quad x = 5 && M = 86.400 \\ &\text{»} \quad x = 6{,}5 && M_{máx} = \frac{1}{8} p\, l^2 = 91.260. \end{aligned}$$

Con estos datos se dibuja la curva de la figura 88; se ha adoptado para las longitudes, medidas sobre la horizontal, una escala de 1 por 100, y para los momentos M, 1 mm. por 2.000.

Supongamos que adoptamos chapas de 10 mm. de espesor para componer las cabezas, y calculemos el momento flector que equilibra una chapa, trabajando el metal á 6 kg. por mm.^{2}

Tendremos

$$0{,}001 = \frac{M_1}{R \times b \times h}.$$

Siendo $R = 6.000.000$; $b = 0{,}35$; $h = 1{,}30$, resulta $M_1 = 2.730$ que es el momento flector que resiste 1 mm. de espesor, y cada chapa resistirá 27.300 que corresponden á 13,6 mm. en la escala de momentos.

Trazaremos á distancias iguales á ésta las horizontales ef, gh, ij, kl que limitaremos en los puntos m, n, p á 0,60 ó 0,70 m. del punto de intersección con la curva, y obtendremos el contorno escalonado $ofphnjmlk$, que con su simétrico representa la disposición de las cabezas, de tal modo, que el trabajo del metal no llega en ningún punto á 6 kg. por mm.^{2}

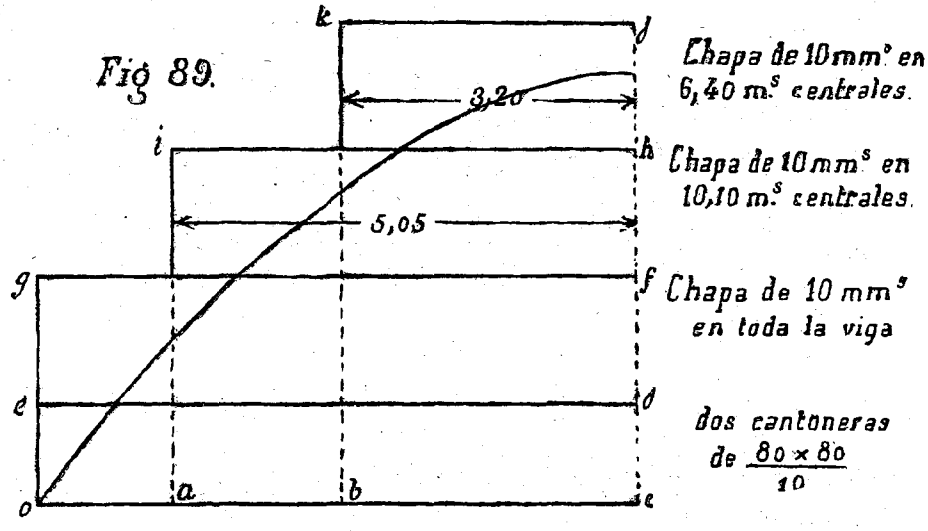
Midiendo en la escala de las longitudes (1 por 100) las distancias ef, gh, ij, kl, vemos que la primera chapa se debe extender á toda la longitud de la viga, la segunda á 6,15 m. por cada lado á partir del centro, la tercera á 4,65 m. por cada lado y la cuarta á 2,60 m. también á ambos lados.

Procediendo así, hemos despreciado el momento de inercia de las cantoneras como si estas no concurrieran á la resistencia. Es muy

fácil tenerla en cuenta si se quiere obtener una solución más económica. Basta considerar su área como si estuviera repartida en una chapa horizontal, prescindiendo del pequeño error que así se introduce por alterarse ligeramente la posición del centro de gravedad.

El área de las dos cantoneras es 3.000 mm.², y dividiéndola por el ancho de la cabeza, 350 mm., vemos que las dos cantoneras equivalen á una chapa de $\frac{3.000}{350} = 8$ mm. de espesor. Esta chapa estará representada en la figura 89, que se ha trazado con las mismas

Fig 89.



escalas que la anterior, por un espesor $oe = 8 \times 1{,}36 = 11$ mm. próximamente, es decir, por la recta de. Completaremos el espesor con las chapas de 10 mm. df, fh, hj que limitaremos por un contorno escalonado, como en el caso anterior. Vemos que, teniendo en cuenta la resistencia de las cantoneras, bastan tres chapas en vez de cuatro.

Calculemos el trabajo efectivo del metal en la sección cj. Dicho trabajo será, por milímetro cuadrado,

$$\frac{C}{b \times e} = \frac{70.200}{350 \times 38} = 5{,}30 \text{ kg.}$$

puesto que

$$C = \frac{91.260}{1{,}30} = 70.200.$$

Pero así no tenemos en cuenta la sección real de la cabeza, que queda debilitada por los agujeros de los roblones. En realidad habrá secciones con cuatro roblones, de los cuales los extremos atraviesan las tres chapas, y los centrales las tres chapas y las dos cantoneras. Suponiendo que sean de 25 mm. de diámetro, la suma de las áreas de los agujeros, será

$$2 \times 25 \times 30 + 2 \times 25 \times 40 = 3.500 \text{ mm.}^2$$

Luego el área efectiva de la cabeza en la sección debilitada, será

$$350 \times 38 - 3.500 = 9.800 \text{ mm.}^2$$

y el trabajo efectivo del material

$$\frac{70.200}{9.800} = 7{,}16 \text{ kg. por mm.}^2$$

Según la regla de la circular austriaca el trabajo admisible es (núm. 8, nota)

$$7 + 0{,}02 \times 13 = 7{,}26 \text{ kg. por mm.}^2$$

El trabajo obtenido de 7,16 kg. es, pues, perfectamente admisible.

Análoga comprobación debe hacerse en las secciones en que el contorno efectivo se acerca más á la curva de los momentos, que son en este caso las *a i*, *b k*.

109. CÁLCULO DEL ALMA.—No se puede asignar al alma un espesor de menos de 8 mm., espesor que debe conservarse en toda su extensión para prevenir los efectos de la oxidación que podrían ser peligrosos en chapas excesivamente delgadas. La comprobación se reducirá, por lo tanto, á calcular el esfuerzo cortante en el apoyo, y ver si repartido en la sección vertical producida en la chapa que constituye el alma da un trabajo igual ó inferior al admisible como resistencia al esfuerzo cortante. Hemos dicho que este trabajo varía entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ de la resistencia á la tensión, y, admitiendo que ésta sea de 6 kg., el trabajo del alma podrá variar entre 4 y 5 kg.

El esfuerzo cortante máximo se ha de calcular, según hemos

visto, con arreglo al cuadro *b* de la circular austriaca, y, puesto que dicho esfuerzo máximo tiene lugar precisamente en el apoyo, habremos de suponer cargada toda la viga.

Según dicho cuadro, las cargas, por metro lineal, correspondientes á 10 y á 15 m. de longitud, son:

Para 10 m.....	10.000 kg.
» 15 »	8.500 »

Luego para 13 m. será

$$8.500 + \frac{10.000 - 8.500}{5} \times 2 = 9.100 \text{ kg.},$$

y para una viga 4.550.

Agregando el peso permanente de 520 kg., tendremos el total por metro lineal

$$p = 520 + 4.550 = 5.070 \text{ kg.}$$

El esfuerzo cortante en el apoyo, ó sea la reacción de éste, es la mitad del peso total de la viga con su sobrecarga (núm. 21).

$$E = \frac{1}{2} p\, l = \frac{1}{2} \times 5.070 \times 13 = 32.955 \text{ kg.}$$

El área de la sección vertical del alma es $8 \times 1.300 = 10.400$ mm.^{2}

Luego el trabajo del metal será

$$R = \frac{32.955}{10.400} = 3{,}17 \text{ kg. por mm.}^2$$

Si suponemos que, para el enlace del alma con las cantoneras que la unen á la cabeza, se emplean en una sección vertical dos roblones de 22 mm. de diámetro habrá que descontar de dicha sección la de los agujeros, que es

$$2 \times 22 \times 8 = 352 \text{ mm.}^2,$$

y la sección resistente del alma será

$$10.400 - 352 = 10.048 \text{ mm.}^2;$$

el trabajo real del hierro será, por lo tanto,

$$\frac{32.955}{10.048} = 3{,}28 \text{ kg. por mm.}^2$$

inferior al límite admisible que, como hemos visto, varía entre 4 y 5 kg.

La viga terminará en el apoyo por un montante formado por las cantoneras de las cabezas que se vuelven á ángulo recto para reforzar el extremo del alma. Supongamos que á 0,60 m. de distancia exista una doble cubrejunta compuesta de dos hierros T de $\frac{150 \times 80}{10}$ cuya área es 2.200 mm.^{2} Se formará así una especie de montante que resiste directamente á la reacción del apoyo quedando comprimido por ella. La sección de este montante está formada (fig. 90) por los dos hierros en ⌐, los dos hierros en T y el trozo de alma de 0,60 m. de longitud que comprenden. Su área total será

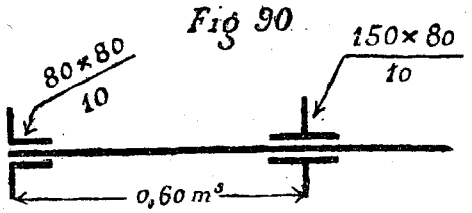


Fig 90

$$3.000 + 2 \times 2.200 + 8 \times 600 = 12.200 \text{ mm.}^2$$

Siendo la reacción del apoyo 32.955 kg., el trabajo del montante será

$$\frac{32.955}{12.200} = 2{,}70 \text{ kg. por mm.}^2$$

Si queremos tener en cuenta la sección debilitada por los agujeros de los roblones, suponiendo que estos sean 3 de 25 mm., la suma de las áreas á descontar de la del montante será

$$3 \times 28 \times 25 = 2.100,$$

y el área efectiva del montante queda reducida á

$$12.200 - 2.100 = 10.100 \text{ mm.}^2$$

El trabajo real del montante es

$$\frac{32.955}{10.100} = 3{,}26 \text{ kg. por mm.}^2$$

La relación de la longitud del montante á su menor dimensió transversal es $\frac{1.300}{168} = 7{,}73$ y, por lo tanto, no hay peligro de qu sufra flexión.

El trabajo del montante es, por consiguiente, muy moderado.

En los empalmes de las chapas que forman el alma se emplea generalmente como cubrejuntas hierros en T cuyo nervio norma al alma contribuye á darle rigidez. A distancias que varían de 1,5 á 2 m. se colocan también arriostramientos transversales constituí dos por hierros de la misma forma que enlazan las vigas á la altur de las cabezas, y formando con los montantes cuadros rectangulares que se hacen indeformables añadiendo las diagonales. Las dimensiones de estas piezas se fijan por comparación con otros puente del mismo tipo, y no se pueden calcular tratándose de puentes d luces tan pequeñas, por lo cual no debemos ocuparnos de ello.

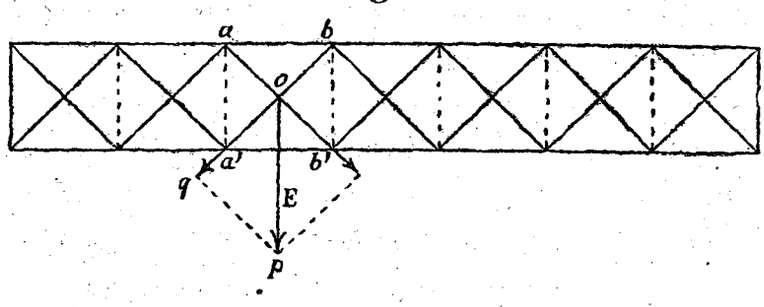
CAPÍTULO IV.

VIGAS DE CELOSÍA ORDINARIA.

110. Definición y composición de las vigas de celosía.—Las vigas de celosía difieren de las que hemos estudiado en el capítulo anterior en que el alma, en vez de ser llena, está aligerada. Se compone ésta de dos series de barras, generalmente formando ángulos de 45° con la vertical, y que se cruzan á ángulo recto. Estas barras se enlazan con los hierros de ángulo que sirven para unir el alma á las cabezas, ya directamente en los puentes de luces pequeñas, ya por el intermedio de una placa cogida entre los hierros de ángulo en los de mayor importancia.

Se clasifican las vigas de celosía según el número de barras cortadas por una sección vertical, ó lo que viene á ser lo mismo, por el número de cruzamientos de una barra. La celosía más sencilla de este género es la representada en la figura 91, compuesta de cruces

Fig 91.

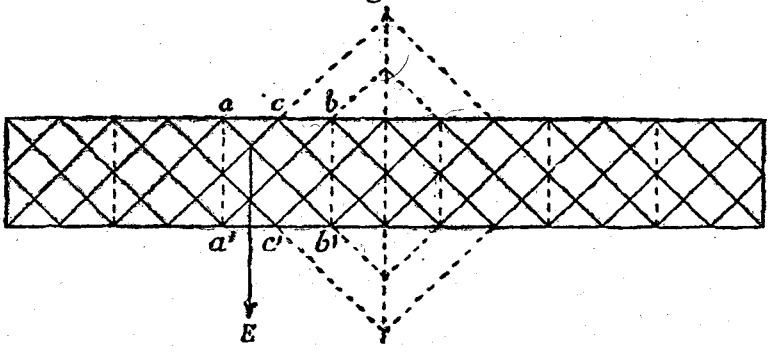


de San Andrés con un sólo cruzamiento en cada barra; se llama *malla* al trozo de viga que ocupa una de estas cruces, ó sea al cuadrado $a\,b$, $a'\,b'$.

Si entre los *nudos a, b...* del sistema anterior se intercala otr idéntico, de modo que los nudos del nuevo sistema estén en lo puntos medios de las mallas del primero, se obtiene la celosí doble (fig. 92).

Si entre los nudos *a* y *b* del sistema primitivo (fig. 91) intercala

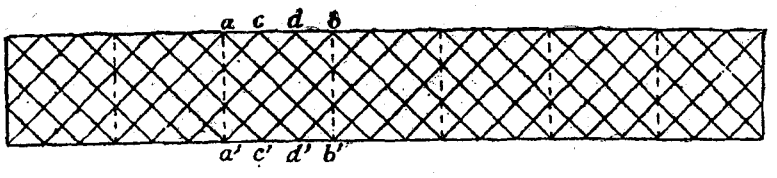
Fig. 92.



mos otros dos sistemas *c, d*, como en la figura 93, tendremos la celosía triple, y así sucesivamente.

Se ve que, para reconocer el orden de una celosía, basta contar e

Fig. 93.



número de vértices comprendidos entre los correspondientes al sistema primitivo y agregar una unidad.

Antiguamente se usaban celosías de órdenes elevados con muchas barras y claros pequeños, llegando á veces al sexto orden aún con luces moderadas. Hoy se observa la tendencia á disminuir el número de barras, siendo muy usados los tres sistemas que acabamos de definir, y pocas veces se pasa del 4.° orden, aun con grandes luces. Se comprenderá fácilmente la razón después de estudiar los métodos de cálculo que se aplican á estas vigas.

111. CÁLCULO DE LAS VIGAS DE CELOSÍA.—Se admite la misma

hipótesis que sirvió de base para el cálculo de las vigas de alma llena de sección variable, á saber, que las cabezas resisten al momento flector, y el alma al esfuerzo cortante. Según esto, el cálculo de las cabezas se hace del mismo modo que se ha explicado en el capítulo anterior, y sólo tenemos que ocuparnos de lo relativo al alma.

Sea E el esfuerzo cortante correspondiente al cruzamiento de las barras $a\,b'$ y $a'\,b$ (fig. 91). Este esfuerzo se descompondrá entre ambas, y cada una resistirá un esfuerzo dado por la expresión $\frac{E}{2\cos\alpha}$, siendo α el ángulo de las barras con la vertical.

En efecto, el triángulo $o\,q\,p$ es isósceles, siendo $o\,q = p\,q$; tendremos, pues, proyectando el contorno $o\,q\,p$ sobre el lado $o\,p$,

$$E = o\,q\cos\alpha + p\,q\cos\alpha = 2\,o\,q\cos\alpha,$$

de donde, llamando f al esfuerzo $o\,q$ que resiste una barra, se deducirá

$$f = o\,q = \frac{E}{2\cos\alpha}.$$

Si, como sucede generalmente en la práctica, α es igual á 45°, se tiene $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y

$$f = \frac{\sqrt{2}\times E}{2} = 1{,}41\times\frac{E}{2}.$$

Si consideramos la celosía doble de la figura 92, vemos que el esfuerzo cortante obra sobre cuatro barras, y admitiendo que se reparta por igual entre ellas, cada una resistirá un esfuerzo $\frac{E}{2\times 2\cos\alpha}$. En la figura 93, veremos que el esfuerzo que corresponde á cada barra es $\frac{E}{2\times 3\cos\alpha}$, y en general, llamando f al esfuerzo buscado y n al orden de la celosía, tendremos:

$$f = \frac{E}{2n\cos\alpha} \qquad [1]$$

De modo que, si llamamos ω al área de la sección de la barra y R al coeficiente de resistencia, se calculará ω por la fórmula

$$\omega = \frac{f}{R} = \frac{E}{2Rn\cos\alpha}. \qquad [2]$$

112. Barras comprimidas y estiradas.—De las barras de la celosía, unas están comprimidas y otras estiradas. Indicaremos aquí, como regla práctica, la manera de distinguirlas, reservando este estudio para el capítulo en que hemos de tratar de las vigas de celosía de grandes mallas. Si consideramos la sección vertical del centro de la viga, las barras que concurren en ella por encima de la viga son las comprimidas, y las que concurren por debajo están tendidas (fig. 92). Es decir, que en cada mitad de la viga, las barras comprimidas son las que bajan hacia los apoyos, y las del sistema opuesto que se cruzan con el anterior á ángulo recto, son las estiradas.

La figura 94 da una imagen clara de la manera como se distri-

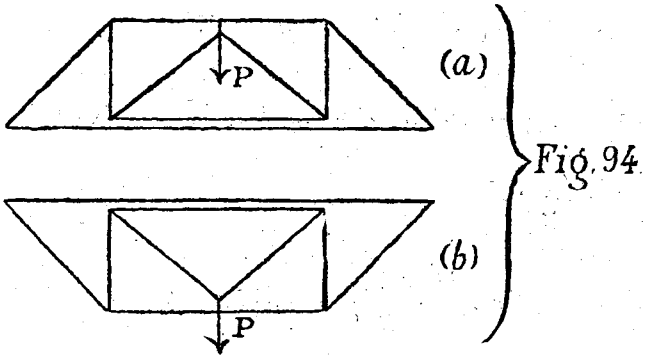


Fig. 94

buyen los esfuerzos entre las barras, cuando obra en el centro de la viga un peso dado. Se supone descompuesta la viga en dos sistemas simples, cada uno de los cuales sostiene la mitad del peso. En el diagrama *(a)* se ve que las verticales quedan tendidas, y comprimidas las diagonales, sucediendo lo contrario en el diagrama *(b)*. Si se superponen ambas figuras, las verticales resultan inútiles, pues la tensión que les corresponde en *(a)* y la compresión en *(b)* se compensan; se obtiene así una celosía de primer orden, análoga á la de la figura 91, con cuatro mallas, y en ella se ve comprobada la regla dada en el párrafo precedente.

Debemos observar, sin embargo, que esta regla sólo es exacta cuando se consideran cargas extendidas á todo el tramo. Veremos á continuación que, cuando se consideran cargas que recubren parcialmente la viga, como sucede en los puentes, hay una pequeña zona en el centro de la viga en que las barras pueden obrar unas veces por compresión y otras por tensión, según la disposición de las cargas.

En las barras comprimidas habrá que tener en cuenta, al determinar su sección, la relación de su longitud á la menor dimensión de su sección transversal para reducir, en caso necesario, el coeficiente de resistencia, aplicando las fórmulas ó tablas del núm. 14. Se considera como longitud la distancia entre dos cruzamientos consecutivos, en los cuales las barras se roblonan entre sí.

113. Esfuerzos cortantes que se deben considerar.—Para determinar las secciones de las barras, habremos de calcular, en las correspondientes secciones de la viga, los mayores esfuerzos cortantes que en ellas se pueden desarrollar. En una sección dada se ejercerá constantemente el esfuerzo cortante debido á la carga permanente, y, además, accidentalmente, el correspondiente á la sobrecarga, la cual puede distribuirse de diferentes modos en el tramo; debe tenerse en cuenta que la sobrecarga que produce en una sección el mayor esfuerzo cortante es la que se extiende desde dicha sección hasta el apoyo más alejado de ella, y no la que se extiende á todo el tramo (1).

Se recordará que la sobrecarga por metro lineal que sirve para el cálculo del esfuerzo cortante es diferente de la que se considera para el de los momentos flectores; en los puentes para ferrocarriles de ancho normal depende de la longitud á que se extiende la sobrecarga, y está dada por el cuadro *b* de la circular austriaca. En los cuadros de cargas para puentes de carreteras y ferrocarriles económicos, la carga por metro lineal que hemos adoptado depende de la luz, y es la misma para todas las barras.

En la imposibilidad de hacer variar la suma de las secciones de

---

(1) Puede verse la demostración en la nota del núm. 95.

las barras de la celosía de un punto á otro de la viga, de modo que se proporcionen exactamente al esfuerzo cortante, el cual varía de una á otra sección, en la práctica se subdivide la viga en un cierto número de zonas, conservando el mismo modelo de barras en cada una de ellas. Estas barras deben calcularse con arreglo á los esfuerzos cortantes máximos en las distintas zonas, que corresponden, en cada una, á las secciones más próximas al apoyo inmediato.

114. DETERMINACIÓN DE LA ZONA EN QUE LAS BARRAS SUFREN ESFUERZOS DE SIGNOS CONTRARIOS.—Es fácil ver que en el centro de la viga existe una zona en que las diversas combinaciones de las sobrecargas pueden producir esfuerzos cortantes de signos contrarios, y, por lo tanto, las barras pueden quedar sometidas unas veces á esfuerzos de compresión y otras de extensión. Importa conocer la extensión de esa zona, puesto que sabemos que las barras correspondientes se hallan en condiciones desfavorables de resistencia, y que su trabajo debe limitarse á unos 4 kg. por milímetro cuadrado, según las disposiciones oficiales adoptadas modernamente en todos los países.

Para determinarla, empecemos por trazar la recta $m\,o\,n$ (fig. 95), que representa los esfuerzos cortantes debidos á la carga permanente, π por metro lineal. Se sabe que, en el apoyo, el esfuerzo cortante $a\,m$ es $\frac{\pi l}{2}$ (número 21), en el centro o de la viga es cero, y en el apoyo de la derecha $b\,n = -\frac{\pi l}{2}$. Podemos, pues, trazar esa recta.

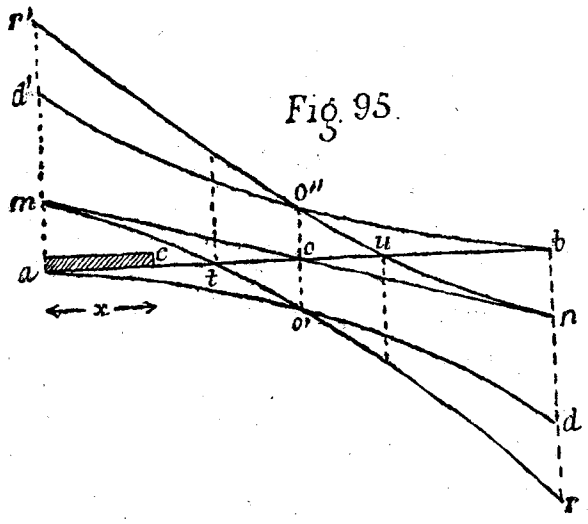


Fig. 95.

Supongamos que una sobrecarga móvil, p por metro lineal, penetre en el puente por el apoyo a, y determinemos el esfuerzo cortante correspondiente á su extremo c, cuya abscisa es x. La reacción X

del apoyo se hallará tomando momentos con relación á b, y será

$$X = \frac{p\,x\left(l - \frac{x}{2}\right)}{l}.$$

El esfuerzo cortante en c será, por lo tanto,

$$E = X - p\,x = \frac{p\,x\left(l - \frac{x}{2}\right)}{l} - p\,x = -\frac{p\,x^2}{2\,l}.$$

Si determinamos varios puntos de la curva, dando valores á x, y calculando los correspondientes de E, obtendremos la curva $a\,o'\,d$ (1); y si sumamos las ordenadas de ésta con las de la recta $m\,n$, podremos trazar la curva $m\,o'\,r$, cuyas ordenadas representan los esfuerzos cortantes totales debidos al peso permanente y á una sobrecarga que se extiende desde el apoyo izquierdo hasta la sección considerada.

Si ahora suponemos que la carga penetra por el apoyo derecho y avanza hacia la izquierda, obtendremos del mismo modo la curva $b\,o''\,d'$, que será simétrica de $a\,o'\,d$ respecto al punto o; y sumando sus ordenadas con las de $m\,n$, tendremos la curva $n\,o''\,r'$, simétrica de la $m\,o'\,r$ respecto al punto o, y cuya significación es la misma que la de ésta.

Los esfuerzos cortantes en cada sección están siempre comprendidos entre los valores de las ordenadas correspondientes de estas dos curvas. Por consiguiente, en la zona $a\,t$ de la viga, dichos esfuerzos cortantes son siempre positivos, en la $u\,b$ siempre negativos, y entre los puntos t y u pueden ser positivos ó negativos. La zona $t\,u$ comprendida entre los puntos en que las curvas $m\,o'\,r$, $n\,o''\,r'$ cortan al eje de las x es, pues, la que nos proponíamos determinar.

115. Montantes verticales.—Casi siempre se añaden montantes verticales á las almas de las vigas de celosía. Estas piezas resul-

(1) Esta curva es una parábola tangente en el origen al eje de las x. La curva $m\,o'\,r$ que resulta de sumar sus ordenadas con las de la recta $m\,n$ de los esfuerzos cortantes debidos á la carga permanente, es otra parábola tangente en m á la recta $m\,n$.

tan inútiles para resistir á las cargas, y algunos autores, dejándose llevar, quizás con exageración, por las ideas teóricas, proscriben su empleo. Pero en la práctica son necesarios generalmente para el enlace de las viguetas, sirven para repartir las cargas entre las cabezas de las vigas, se oponen al alabeo del alma, contribuyen eficazmente á resistir ciertos esfuerzos secundarios que ordinariamente no se tienen en cuenta en el cálculo, y constituyen un elemento esencial de los arriostramientos transversales, como hemos visto anteriormente. Ya hemos indicado que si las antiguas vigas de celosía compuestas exclusivamente de barras planas subsisten, se debe este resultado principalmente á los montantes.

Puesto que los montantes no están destinados á resistir esfuerzos perfectamente definidos, su sección es, entre ciertos límites, arbitraria, y se fija algunas veces por comparación con obras construídas. Veremos, al estudiar las vigas de montantes y cruces de San Andrés, la manera de determinar sus secciones, siendo aplicables los mismos procedimientos á las vigas de celosía ordinaria.

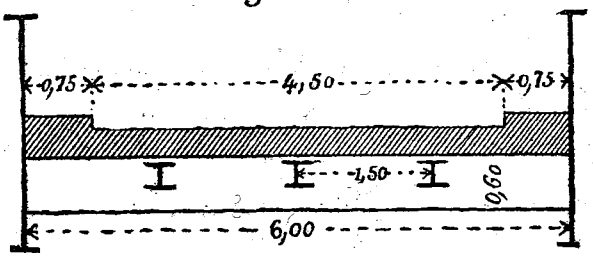
Encima de los apoyos se disponen generalmente fuertes montantes de alma llena. Además de resistir á la reacción del apoyo que obra concentrada en un espacio muy limitado en esos puntos, según se explicó al tratar de las vigas de alma llena, en las de celosía reciben estos montantes las tensiones y compresiones de algunas barras que quedan cortadas en los apoyos y someten al montante á flexiones. Estas consideraciones justifican la práctica constante de los constructores.

116. APLICACIONES.—1.ER EJEMPLO.—*Puente de 25 m. de luz para carretera.*—Supongamos que el puente ha de tener un firme de 4,5 m. y dos aceras de 0,75 m. Adoptemos viguetas de 0,60 m. de altura distantes entre sí 2,50 m., que también es la altura de la viga, igual al décimo de la luz, y supongamos que unimos entre sí las viguetas por tres largueros que distan entre sí 1,50 m., aparte de los dos que se necesitarán para formar las aceras. Todas estas disposiciones pueden verse en el croquis (fig. 96) que representa la sección transversal. Consideraremos una celosía doble con arreglo al diagrama figura 99. Empecemos por el cálculo de los largueros.

117. CÁLCULO DE LOS LARGUEROS.—Según la descripción que pre-

cede, la luz de los largueros es 2,50 m., y podemos adoptar una altura de 0,30 m., algo mayor que el décimo de la luz. Evaluemos la carga permanente por metro lineal que les corresponde. Se compondrá del peso de la chapa destinada á sostener el firme, del peso de éste con la capa de tierra interpuesta entre la chapa y el firme, y del peso propio, que habremos de fijar aproximadamente para este cálculo, puesto que es desconocido. Obtendremos las cifras siguientes:

Fig 96.



Peso de la chapa de 9 mm. á 70 kg. por m.^{2}.....		115 kg.
Firme y capa de tierra con espesor medio de 0,35;		
$1{,}50 \times 0{,}35 \times 1.800$.....		945 »
Peso propio del larguero.....		80 »
TOTAL.....	$\pi =$	1.140 »

El momento máximo correspondiente á este peso es

$$M_\pi = \frac{1}{8}\,\pi\, l^2 = \frac{1}{8} \times 1.140 \times \overline{2{,}50}^2 = 880$$

El peso móvil más desfavorable será el constituído por dos ruedas de carros que se crucen en el punto medio del larguero, caso que puede ocurrir en el larguero central; admitiremos que circulen carros de 6 000 kg., y éste será el peso que debemos considerar actuando en el centro del larguero.

El momento máximo correspondiente es

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4}\,P\,l = \frac{1}{4} \times 6.000 \times 2{,}50 = 3.750$$

Y el momento máximo total

$$M_{max} = M_\pi + \mathfrak{M} = 880 + 3.750 = 4.630.$$

Acudiendo al cuadro núm. 2, vemos que el peso del larguero por metro lineal, con una altura de 0,30 m., y trabajando á 5 kg. por milímetro cuadrado, debe ser de 70 kg.

Se puede formar el larguero como se indica á continuación:

Alma de 300 mm. por 6 de espesor, pesa por metro lineal.	14	kg.
Cuatro cantoneras de $\frac{70 \times 70}{9}$ á 9,4 kg. cada una.....	37,6	»
Dos chapas de 160 × 8.....	20	»
TOTAL.....	71,6	»

Este peso se acerca lo suficiente al que se había supuesto previamente, y se puede aceptar desde luego.

118. CÁLCULO DE LA VIGUETA.—Para la determinación de las dimensiones de la vigueta, seguiremos un procedimiento idéntico al empleado para el larguero. Empezaremos por determinar la carga permanente por metro lineal de vigueta, como sigue:

Capa de tierra y firme: $\frac{1}{6} \times 0{,}35 \times 4{,}50 \times 2{,}50 \times 1.800 =$	1.182	kg.
Chapa del piso: 2,50 × 70.....	175	»
Largueros del piso y de las aceras $\frac{1}{6} \times 5 \times 2{,}50 \times 75$...	156	»
Peso propio de la vigueta.....	120	»
TOTAL..... $\pi =$	1.633	»

El momento máximo de la carga permanente será

$$M_\pi = \frac{1}{8} \pi l^2 = \frac{1}{8} \times 1.633 \times 6^2 = 7.348.$$

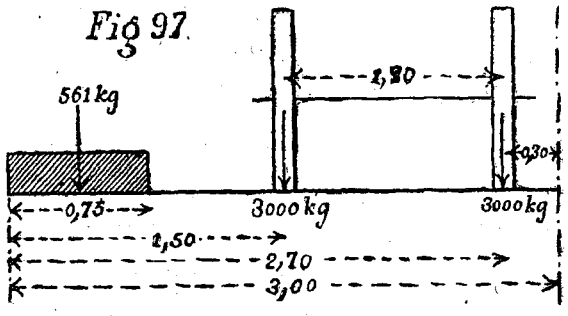
Pasemos á evaluar la carga móvil más desfavorable. Admitiendo que los carros de 6.000 kg. tengan un ancho mínimo de 1,20 m., el caso más desfavorable se realizará cuando dos de estos carros se crucen sobre la vigueta, de modo que las ruedas interiores se acerquen todo lo posible al centro; se admite un huelgo de 0,60 m. entre los puntos de apoyo de esas ruedas para tener en cuenta el resalto de los cubos y la necesidad de que estos no lleguen á tocarse; hemos

admitido el ancho mínimo para el vehículo, pues en este caso la rueda exterior se hallará más próxima al centro, y por consiguiente, es más desfavorable este vehículo que otro de mayor ancho de batalla. Se tiene además en cuenta que las aceras están sobrecargadas á razón de 300 kg. por m.²

El peso correspondiente será $0{,}75 \times 250 \times 300 = 565$ kg. para cada acera.

El croquis (fig. 97) indica la distribución de las cargas en la mitad de la vigueta con las distancias de sus puntos de aplicación al apoyo izquierdo. El momento flector máximo, que corresponde al centro de la vigueta, se calculará fácilmente; la reacción del apoyo es

Fig 97.



$$3.000 + 3.000 + 561 = 6.561 \text{ kg.}$$

y el momento máximo buscado será

$$\mathfrak{M} = 6.561 \times 3 - 561 \times 2{,}625 - 3.000 \times 1{,}50 - 3.000 \times 0{,}30 = 12.811$$

El momento máximo total es

$$M_{max} = M_{\pi} + \mathfrak{M} = 7.348 + 12.811 = 20.159.$$

Asignando á la vigueta una altura de 0,60 m., y admitiendo como coeficiente de resistencia 6 kg. por mm.², el cuadro núm. 2 da un peso de 120 kg. por metro lineal. La vigueta puede componerse del modo siguiente:

Alma de 9 mm. á 70 kg. por m.², $70 \times 0{,}60$	42,00 kg.
Cuatro cantoneras de $\frac{80 \times 80}{10}$	46,00 »
Dos chapas de 200×10 (peso por m.² 77,88); $77{,}88 \times 0{,}40$.	31,15 »
TOTAL	119,15 »

que es sensiblemente igual al que se había supuesto.

119. Cálculo de la viga.—Determinación de las cargas.—La carga permanente que corresponde á cada viga se compone del peso del firme y del de la parte metálica de la mitad del puente en 1 m. lineal; el peso de la parte metálica es, según el cuadro del núm. 93, 197 kg. por metro superficial, y el de la mitad del puente será $3 \times 197 = 591$ kg. El peso permanente se determinará, por lo tanto, como sigue:

Peso del firme: $\frac{1}{2} \times 4{,}50 \times 0{,}35 \times 1.800$	$= 1.417$ kg.
Peso de la parte metálica 3×197.....	$= 591$ »
Total.....	$\pi = 2.008$ »

120. Cálculo de las cabezas.—En la columna correspondiente á los carros de 6 t., veremos, en el cuadro del núm. 96, que la sobrecarga accidental es de 300 kg. por metro cuadrado, ó sea $3 \times 300 = 900$ kg. por metro lineal de viga.

Para el cálculo de las cabezas, se supone la sobrecarga extendida á todo el tramo, y, por consiguiente, la viga está sometida á un peso $p = 2.008 + 900 = 2.908$ kg. por metro lineal. Sabemos (núm. 21) que, en estas condiciones, el momento flector correspondiente al punto cuya distancia al apoyo izquierdo es x, viene dado por la expresión

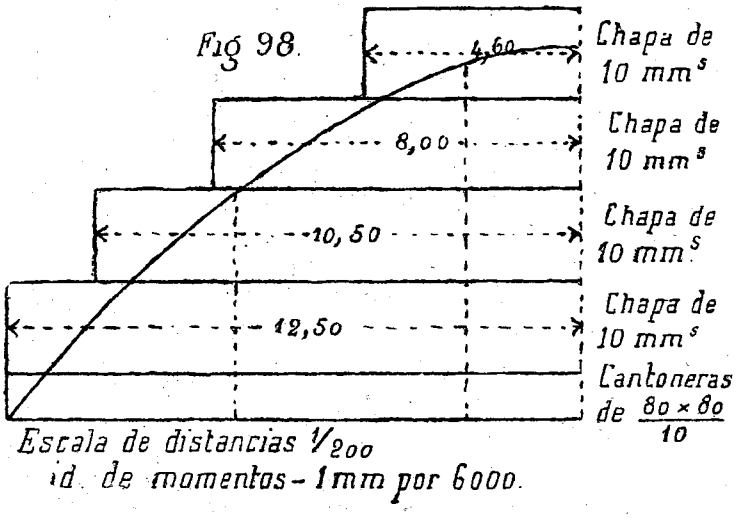
$$M = 1.454\ (25\ x - x^2)$$

sustituyendo en la fórmula en vez de p y l sus valores.

Para dibujar la curva, calcularemos algunos puntos de ella; bastarán los tres puntos cuyas abscisas son 5 m., 10 m. y 12,50 m. que corresponde al punto medio; siendo simétrica la curva respecto á la vertical de este punto, basta dibujar la mitad. Haciendo las sustituciones en la ecuación, tendremos

Para $x = 5$	$M = 145.400$
» $x = 10$	$M = 218.100$
» $x = 12{,}5$	$M = 230.095$

Obtenemos así la curva de la figura 98. La escala de las distancias es de 1 por 200; y la de los momentos de 1 mm. por 6.000. Repitiendo, para hacer la distribución de las chapas, el razonamiento



del núm. 106, veremos que el momento M_1 equilibrado por cada milímetro de espesor es

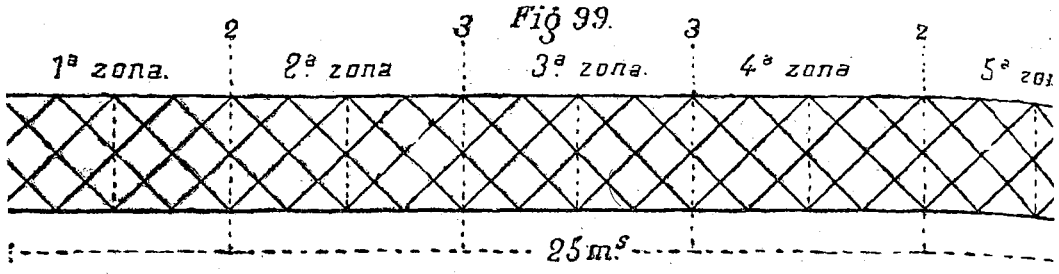
$$M_1 = 0{,}001 \times R\, b\, h = 0{,}001 \times 6.000.000 \times 0{,}40 \times 2{,}50 = 6.000$$

admitiendo para R, 6 kg. por mm.^{2}, siendo la altura de la viga $h = 2{,}50$, y el ancho de la cabeza $b = 0{,}40$. A una chapa de 10 mm. corresponde, según eso, un momento de 60.000. A las dos cantoneras, que suponemos de $\frac{80 \times 80}{10}$, corresponde, si se supone su área reducida á un rectángulo de base igual al ancho de la cabeza, un espesor de 7 mm., ó sea un momento de 40.000 próximamente. Con estos datos es fácil terminar la distribución de las chapas, cuyos resultados se hallan acotados detalladamente en la figura.

121. Cálculo de las barras de la celosía.—Supondremos dividida la viga en cinco zonas de á 5 m., y en cada una adoptaremos un modelo único de barras; es claro que, á causa de la simetría, las barras de las zonas 4.ª y 5.ª serán iguales á las de la 2.ª y 1.ª respectivamente. Las de la 1.ª zona se calcularán con arreglo al esfuerzo cortante máximo en el apoyo, sección núm. 1 de la figura 99. Las de

la 2.ª, con arreglo al esfuerzo cortante máximo en la sección núm. 2, distante 5 m. del apoyo, y finalmente, en la 3.ª, con arreglo al esfuerzo cortante máximo en la sección 3, distante 10 m. del apoyo izquierdo.

Fig 99.



En la sección 1, el esfuerzo cortante máximo se compone del correspondiente á la carga permanente $\pi = 2.008$ kg. por metro lineal, y del de la sobrecarga $p = 900$ kg. por metro lineal según el cuadro del núm. 96 de las cargas correspondientes al esfuerzo cortante, ambas extendidas á todo el tramo; llamando ε_1 al primero y e_1 al segundo, y observando que en este caso el esfuerzo cortante se confunde con la reacción del apoyo, tendremos

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi l}{2} = \frac{1}{2} \times 2.008 \times 25 = 25.100 \text{ kg.}$$

$$e_1 = \frac{p l}{2} = \frac{1}{2} \times \quad 900 \times 25 = 11.250 \text{ kg.}$$

El esfuerzo cortante total será

$$E_1 = \varepsilon_1 + e_1 = 25.100 + 11.250 = 36.350 \text{ kg.}$$

El esfuerzo cortante correspondiente á la carga permanente en la sección núm. 2 será

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \pi l - \pi x = 25.100 - 2.008 \times 5 = 15.060 \text{ kg.}$$

Para determinar, en esta sección, el esfuerzo cortante máximo correspondiente á la sobrecarga, debemos considerar cargada solamente la parte de viga que queda á la derecha de la sección; el esfuerzo cortante correspondiente será igual á la reacción del apoyo izquierdo, y ésta se determinará tomando momentos con relación al

apoyo de la derecha, de modo que

$$e_2 \times 25 = (900 \times 20) \times 10; \qquad e_2 = \frac{180.000}{25} = 7.200 \text{ kg.}$$

El esfuerzo cortante total será

$$E_2 = \varepsilon_2 + e_2 = 22.260 \text{ kg.}$$

Es fácil ver que si hubiéramos supuesto extendida la carga accidental á todo el tramo, hubiéramos hallado un esfuerzo cortante menor que e_2; en efecto, en este caso el esfuerzo cortante sería

$$\frac{p\,l}{2} - p\,x = \frac{1}{2} \times 900 \times 25 - 900 \times 5 = 6.750 \text{ kg.}$$

en vez de 7.200 que hemos hallado con la sobrecarga parcial considerada, lo cual está conforme con la regla dada para el cálculo de las secciones de las barras.

Finalmente, en la sección 3, encontraremos, por idéntico procedimiento, el esfuerzo cortante ε_3 de la carga permanente

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\pi\,l - \pi\,x = 25.100 - 2.008 \times 10 = 5.020 \text{ kg.}$$

y el e_3 correspondiente á la carga accidental extendida desde la sección 3 al apoyo derecho

$$e_3 = \frac{(900 \times 15) \times 7{,}50}{25} = 4.050 \text{ kg.;}$$

el esfuerzo cortante total será

$$E_3 = \varepsilon_3 + e_3 = 5.020 + 4.050 = 9.070 \text{ kg.}$$

Si se hubiera supuesto la sobrecarga extendida á todo el tramo, hubiéramos obtenido para valor de e_3

$$\frac{1}{2} \times 900 \times 25 - 10 \times 900 = 2.250 \text{ kg.}$$

en vez de $e_3 = 4.050$ kg.

En resumen, los esfuerzos cortantes máximos en las secciones 1, 2 y 3, que nos han de servir para calcular las secciones de las barras, son

$$E_1 = 36.350 \text{ kg.}$$
$$E_2 = 22.260 \text{ »}$$
$$E_3 = 9.070 \text{ »}$$

Las barras de la 1.ª zona tendrán una sección dada por la fórmula [2], que en este caso se convierte, admitiendo un coeficiente de resistencia de 6 kg. por mm.², en

$$\omega_1 = \frac{E_1}{6 \times 4 \cos 45^\circ} = \frac{E_1 \sqrt{2}}{24} = 2.136 \text{ mm.}^2$$

Las barras estiradas se pueden reducir á chapas de $220 \times 10 = 2.200$ mm.²

En las barras comprimidas, debemos tener en cuenta la relación de la longitud libre á la menor dimensión transversal á fin de evitar la flexión. La longitud comprendida entre dos articulaciones es

$$\frac{1}{4} \times \frac{2{,}50}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{4} \times 2{,}50 \times 1{,}41 = 0{,}88 \text{ m.}$$

Podremos, pues, adoptar el mismo coeficiente de resistencia que para la tensión, si admitimos hierros cuyos nervios sean, por lo menos, de $\frac{0{,}88 \text{ m.}}{12} = 0{,}073$ m. En la 1.ª zona, estas barras podrán ser hierros en T de $\frac{150 \times 80}{10}$ cuya área es de 2.200 mm.

En la zona 2.ª el área de las secciones de las barras será

$$\frac{E_2}{6 \times 4 \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 22.260}{24} = 1.300 \text{ mm.}^2$$

Las barras extendidas pueden ser chapas rectangulares de 130×10.

Las comprimidas se pueden formar con hierros en T de $\frac{100 \times 70}{80}$ cuya área es 1.360 mm.², y satisfacen á la condición necesaria para que no sea de temer la flexión.

En la zona 3.ª reduciremos á 5 kg. por mm.² el coeficiente de resistencia para evitar la dificultad de formar una sección perfilada, cuyo resalto ha de ser por lo menos de 70 mm. y cuya área es muy pequeña.

La sección de las barras será

$$\frac{E_3}{5 \times 4 \cos 45^\circ} = \frac{9.700 \times 1{,}41}{20} = 684 \text{ mm.}^2$$

Las barras estiradas pueden reducirse á chapas de $70 \times 10 = 700$ mm.²

Se ve la imposibilidad de formar las barras comprimidas con hierros perfilados de 70 mm. de ala con una área tan pequeña, y esto, á pesar de haber reducido el coeficiente de resistencia. Acudamos á las tablas del núm. 13, y veamos qué coeficiente deberemos admitir, suponiendo que adoptemos hierros en que la menor dimensión de la sección sea 50 mm.; el valor de $\frac{l}{h}$ será $\frac{88}{5} = 18$ y el valor correspondiente de $\frac{R_o}{R}$ es 1,52; luego el coeficiente de resistencia deberá ser $\frac{6}{1{,}52} = 3{,}90$. El esfuerzo que sufre la barra es, según la fórmula [1],

$$\frac{E_3}{4 \times \cos 45^\circ} = \frac{1}{4} \times 9.700 \times 1{,}41 = 3.420 \text{ kg.}$$

y el área será $\frac{3.420}{3{,}90} = 877$ mm.² Un hierro de ángulo de $\frac{55 \times 55}{9}$ da una área de 909 mm.², que se acerca bastante á la calculada.

122. Determinación de la zona en que las barras sufren esfuerzos de signo contrario. — Para determinar esta zona, seguiremos el procedimiento indicado en el núm. 114. Trazaremos la recta *m n* (fig. 100), que representa los esfuerzos cortantes debidos á la carga permanente, para lo cual basta calcular la reacción del apoyo,

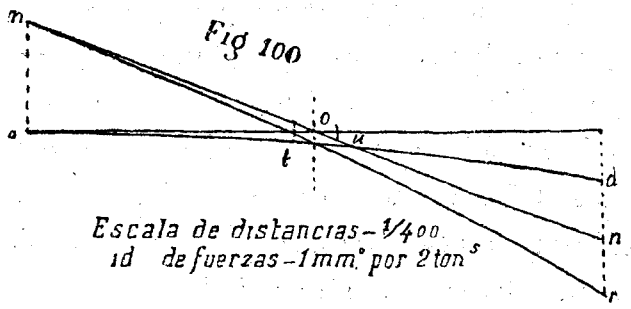


Fig 100

y unir el extremo de la ordenada que la representa con el punto medio de la viga. La curva que representa los esfuerzos cortantes de las cargas móviles que penetran en el puente por el apoyo izquierdo tiene por ecuación

$$e = -\frac{p\,x^2}{2\,l} = -\frac{900\,x^2}{2\times 25} = -18\,x^2$$

Calculemos los puntos necesarios para trazar esta curva.

Para $x = 6$ se obtiene.....	$e =$	— 618
» $x = 12{,}5$.....	$e =$	— 1.812,50
» $x = 20$.....	$e =$	— 7.200
» $x = 25$.....	$e =$	— 11.250

Así obtenemos la curva *a d*, y sumando sus ordenadas con las de la recta *m n*, obtendremos la curva *m r*. No hay necesidad de determinar las curvas correspondientes á las cargas que penetran por el apoyo de la derecha; basta determinar, ó simplemente medir en la figura la distancia del punto *t* en que la curva *m r* corta al eje de las *x* al centro de la viga, y la longitud *o t*, llevada á derecha é izquierda del centro, nos dará la zona buscada. En el caso presente sólo se extiende á 0,80 m. por cada lado y, por lo tanto, sólo se hallan comprendidas en ella las seis barras que concurren en la sección central de la viga. Como, por otra parte, el trabajo de estas es inferior á 4 kg. por mm.², la única precaución necesaria en este caso es formar esas seis barras con el tipo adoptado para las barras comprimidas de la 3.ª zona, es decir, con hierros de ángulo de $\frac{55 \times 55}{9}$

Se ve por estas consideraciones y por el aumento que hemos debido aceptar en las secciones adoptadas respecto á las teóricas, la poca importancia que tiene el hecho de ser los esfuerzos cortantes correspondientes á las cargas del cuadro algo menores que los verdaderos.

123. 2.º EJEMPLO.—*Puente de 40 m. de luz para ferrocarril.*— Supondremos que el ferrocarril es de simple vía, y el ancho del puente 4,50 m. Fijaremos la altura de la viga en 4,50 m., algo más del décimo de la luz, y admitiremos la celosía triple. Seguiremos un procedimiento idéntico al del caso anterior, salvo algunas diferencia

de detalle, y podremos, por lo tanto, abreviar la explicación, aunque presentaremos desarrollados los cálculos más importantes.

124. Cálculo de los largueros.—Las viguetas pueden colocarse en los nudos del sistema primitivo; pero como estos distan 4,50 m., convendrá intercalar otras, quedando á una distancia de 2,25 m. Esta será la luz de los largueros; admitiremos que tengan una altura de 0,30 m. La carga permanente se reduce en este caso al peso propio del larguero, que supondremos, incluyendo el carril, de 80 kg. por metro lineal, $\pi = 80$, y el momento máximo será

$$M_\pi = \frac{1}{8}\,\pi\,l^2 = \frac{1}{8} \times 80 \times \overline{2{,}25}^2 = 51.$$

Si suponemos que la locomotora más pesada es de 13 toneladas en cada eje, ó sea 6.500 kg. en cada rueda, y que los ejes disten entre sí 1,20 m., es fácil ver que cuando insista una rueda en el centro del larguero, las dos inmediatas estarán fuera de él; luego en el caso más desfavorable actuará en el centro del larguero un peso aislado de 6.500 kg., y el momento flector correspondiente será

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4} \times P\,l = \frac{1}{4} \times 6.500 \times 2{,}25 = 3.656$$

y el momento flector total

$$M_{max} = M_\pi + \mathfrak{M} = 51 + 3.656 = 3.707.$$

En el cuadro núm. 1 vemos que, admitiendo un trabajo de 5 kg. y una altura de 0,30 m., el larguero debe pesar unos 64 kg. por metro lineal. Puede componerse como sigue:

Alma de 8 mm. á 62,30 por m.² $62{,}30 \times 0{,}30 =$	18,69 kg.	
Cuatro cantoneras de $\frac{80 \times 80}{10}$ á 11,5 cada una	46,00	»
Total.....	64,69	»

Aunque este peso es algo mayor que el supuesto (toda vez que el carril pesará más de 15 kg.), puede admitirse sin inconveniente en vista de la poca influencia que tiene el peso propio en el momento flector.

125. Cálculo de la vigueta.—Admitiremos que la altura se de 0,50 m., y evaluaremos como sigue la carga permanente por metro lineal:

Peso propio.....	160 kg.
Largueros.....	65 »
Carriles y tablones.....	45 »
Total..... $\pi =$	270 »

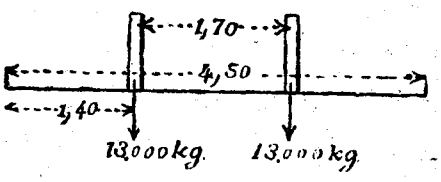
El momento máximo será

$$M_\pi = \frac{1}{8}\,\pi\, l^2 = \frac{1}{8} \times 270 \times \overline{4{,}50}^2 = 684$$

Para evaluar la sobrecarga más desfavorable, tendremos en cuenta el caso en que insista sobre la vigueta un eje de locomotora, que se reduce á dos pesos de 6.500 kg. aplicados simétricamente respecto al eje del puente á la distancia de 0,85 m. de dicho eje, ó sea 1,40 m. de cada apoyo, suponiendo el ancho de la vía de 1,70 m. entre los ejes de los carriles.

Pero, como al mismo tiempo podrán insistir sobre los largueros de los tramos contiguos otras dos ruedas, muy próximamente en sus puntos medios, las reacciones de los apoyos correspondientes á esos pesos se referirán á los mismos puntos de las viguetas, y darán lugar á otros dos pesos de 6.500 kg., de modo que, encima de cada carril obrará sobre la vigueta un peso de 13.000 kg. como indica la figura 101. Según eso, el momento flector máximo es

Fig 101.



$$\mathfrak{M} = 13.000 \times 1{,}40 = 18.200$$

y el total

$$M_{máx} = M_\pi + \mathfrak{M} = 684 + 18.200 = 18.884.$$

A este momento corresponde, según el cuadro núm. 2, con la altura 0,50 m., y trabajando el material á 5 kg., un peso de 160 kg. por metro, que puede componerse así:

Alma de 10 mm. á 77,88 por m.² $0{,}50 \times 77{,}88$.....	38,94 kg.
Cuatro cantoneras de $\frac{80 \times 80.}{10}$ á 11,5 kg.....	46,00 »
Cuatro chapas de 200×12 á 93,46 el m.².....	74,77 »
TOTAL.....	159,71 »

Podrían hacerse más económicas las viguetas suprimiendo las chapas en la región inmediata á los apoyos, repitiendo para determinarla el estudio del núm. 26, ejemplo 5.°

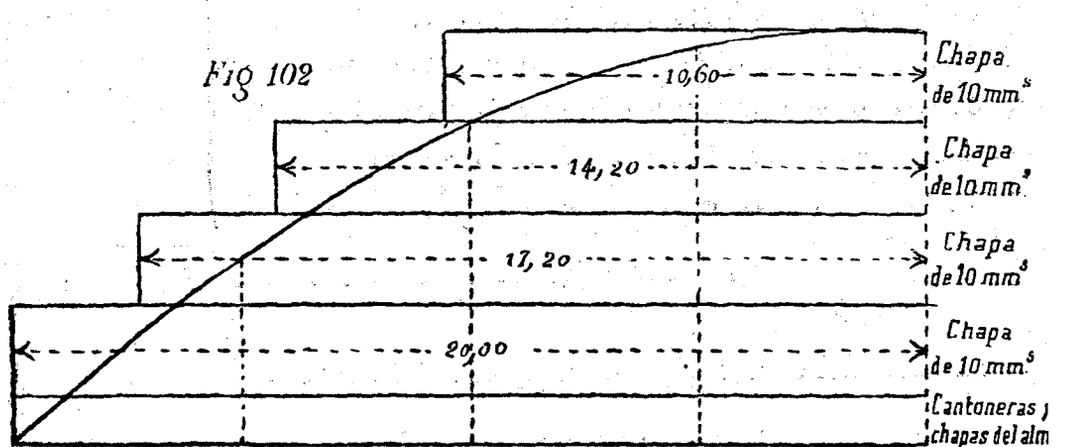
126. CÁLCULO DE LAS CABEZAS DE LA VIGA PRINCIPAL.—El peso permanente que corresponde á cada viga es, según el cuadro del núm. 93, de 942 kg. por metro lineal, y la sobrecarga, según el cuadro *a*) de la circular austriaca, 2.800 kg., de modo que el peso total que debemos considerar es $p = 942 + 2.800 = 3.742$ kg.

El momento, en el punto de abscisa x, es

$$M = \frac{1}{2} p\,(l\,x - x^2) = 1.871\ (40\ x - x^2).$$

Para dibujar la mitad de la curva (fig. 102), calcularemos los puntos siguientes:

$x = 5$	$M = 327.425$
$x = 10$	$M = 561.300$
$x = 15$	$M = 701.625$
$x = 20$	$M = 748.400$



Después de dibujada la curva, calcularemos el momento que corresponde á 1 mm. de espesor de la cabeza, suponiéndole un ancho de 0,60 m. Tendremos

$$M_1 = 0{,}001 \times R\, b\, h = 16.200$$

y cada chapa de 10 mm. corresponderá á un momento de 162.000.

Las dos cantoneras de $\frac{100 \times 100}{12}$ suman una área de 2.256 mm.² y la parte de alma llena comprendida entre ellas es de $100 \times 10 =$ 1.000 mm.² No tenemos en cuenta más que esa parte de la chapa, pues el resto corresponde más bien al alma de la viga, y está demasiado próxima al eje de flexión para considerarla concentrada en el centro de gravedad de la cabeza. Estos dos elementos corresponden á un espesor de chapa de $\frac{3.256}{600} = 5$ mm. próximamente, ó sea un momento de 81.000.

Con estos datos es fácil continuar la distribución de los palastros y llegar á los resultados consignados en la figura.

Calculemos el trabajo efectivo de las cabezas en la sección central de la viga, descontando los agujeros de los roblones.

El área considerada hasta ahora es $45 \times 600 =$ 27.000 mm.²

Se deben descontar las áreas siguientes:

Dos filas de roblones de 22 mm. atravesando todas las placas $2 \times 22 \times 45$	1.980	5.300	»
Roblones horizontales correspondientes al alma con 34 de espesor y 20 de diámetro $2 \times 20 \times 34$	1.360		
Cuatro filas de 22 mm. atravesando 4 chapas $4 \times 22 \times 40$	1.760		
Área efectiva		21.700	»

El valor del esfuerzo que corresponde á la cabeza es

$$\frac{M}{h} = \frac{748.400}{4{,}50} = 166.311 \text{ kg.}$$

y el trabajo efectivo del metal será

$$\frac{166.311}{21.700} = 7{,}66 \text{ kg. por mm.}^2$$

Si se aplica la regla de Leber al caso presente, se encuentra

$$7{,}00 + 0{,}02 \times 40 = 7{,}80 \text{ kg. por mm.}^2$$

Conviene hacer una comprobación análoga en las secciones en que terminan las diversas chapas.

127. CÁLCULO DE LAS BARRAS DE LA CELOSÍA.—Empecemos por el cálculo de los esfuerzos cortantes. Consideraremos en la viga ocho zonas de 5 m. cada una; en el centro habrá una zona de 10 m. á la cual corresponden barras del mismo modelo; de modo que debemos calcular los esfuerzos cortantes en secciones que distan entre sí 5 m., empezando por el apoyo y terminando en el centro de la viga.

En el apoyo el esfuerzo cortante debido al peso permanente es

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi l}{2} = \frac{1}{2} \times 942 \times 40 = 18.840 \text{ kg.}$$

El cuadro *b* de la circular austriaca da, para la longitud de 40 m., una sobrecarga de 6,2 t., ó sea 3.100 kg. para una viga; y el esfuerzo cortante correspondiente es

$$e_1 = \frac{p l}{2} = \frac{1}{2} \times 3.100 \times 40 = 62.000.$$

El esfuerzo cortante total en la sección 1, será

$$E_1 = \varepsilon_1 + e_1 = 18.840 + 62.000 = 80.840 \text{ kg.}$$

Pasemos á la sección 2, en la cual $x = 5$ m. Conservando las notaciones empleadas anteriormente, tendremos

$$\varepsilon_2 = \frac{\pi l}{2} - \pi x = 18.840 - 942 \times 5 = 14.130 \text{ kg.}$$

Según el cuadro *b*, la sobrecarga es de 3.260 para cada viga, con una longitud cargada de 35 m.; de modo que

$$e_2 = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l} = \frac{3.260 \times \overline{35}^2}{2 \times 40} = 49.919 \text{ kg.}$$

y el esfuerzo cortante total será

$$E_2 = \varepsilon_2 + e_2 = 64.049 \text{ kg.}$$

En la sección 3, para $x = 10$ se tendrá

$$\varepsilon_3 = \frac{\pi\,l}{2} - \pi\,x = 18.840 \text{ kg.}$$

La sobrecarga correspondiente á 30 m. es 3.450 kg.; luego

$$e_3 = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l} = \frac{3.450 \times \overline{30}^2}{2 \times 40} = 38.813 \text{ kg.}$$

de modo que

$$E_3 = \varepsilon_3 + e_3 = 48.233 \text{ kg.}$$

En la sección 4, tenemos $x = 15$

$$\varepsilon_4 = \frac{\pi\,l}{2} - \pi\,x = 18.840 - 942 \times 15 = 4.710 \text{ kg.}$$

Siendo 25 m. la longitud cargada, el cuadro *b* da $p = 3.625$, de modo que

$$e_4 = \frac{p\,(l-x)^2}{2\,l} = \frac{3.625 \times \overline{25}^2}{2 \times 40} = 28.370 \text{ kg.}$$

y

$$E_4 = \varepsilon_4 + e_4 = 33.030 \text{ kg.}$$

Tenemos ya los esfuerzos cortantes que han de servir para calcular las barras de las cuatro zonas diferentes; sólo falta determinar los esfuerzos de tensión ó compresión de cada barra y las secciones correspondientes.

La longitud libre de las barras es

$$\frac{4{,}50}{6 \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 4{,}50}{6} = 1{,}06 \text{ m.}$$

La mínima dimensión de la sección de una barra será

$$\frac{1{,}06}{12} = 0{,}09 \text{ m.}$$

si se ha de admitir el mismo coeficiente de resistencia que si estuviera tendida; para las barras en que esta condición pueda ser satisfecha, adoptaremos, lo mismo que para las tendidas, 6 kg. por mm.^{2}

En la 1.ª zona, el esfuerzo de las barras será

$$\frac{E_1}{2n \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 80.840}{6} = 18.997 \text{ kg.}$$

La sección de las barras será

$$\frac{18.997}{6} = 3.166 \text{ mm.}^2$$

Las barras extendidas de sección rectangular podrán ser chapas de 270×12, cuya área es 3.240 mm.^{2}

Las comprimidas pueden ser hierros en T de $\frac{230 \times 100}{10}$; su área es de 3.200 mm.^{2}

En la 2.ª zona, el esfuerzo de las barras es

$$\frac{E_2}{2n \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 64.049}{6} = 10.675 \text{ kg.}$$

El área de la sección será

$$\frac{10.675}{6} = 1.780 \text{ mm.}^2$$

Las barras extendidas serán de $180 \times 10 = 1.800$ mm.^{2}

Para las comprimidas se puede adoptar el hierro T de $\frac{100 \times 90}{10}$ cuya área es de 1.800 mm.^{2}

En la zona 3.ª, el esfuerzo de las barras es

$$\frac{E_3}{2n \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 48.233}{6} = 8.037 \text{ kg.}$$

La sección será de

$$\frac{8.037}{6} = 1.340 \text{ mm.}^2$$

Las barras extendidas pueden ser de $140 \times 10 = 1.400$ mm.²

Y las comprimidas hierros en T de $\frac{90 \times 90}{8}$, que dan una área de 1.360 mm.²

Finalmente, en la 4.ª zona, el esfuerzo es

$$\frac{E_4}{2n \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 33.030}{6} = 7.762 \text{ kg.}$$

Las barras estiradas podrán ser de

$$\frac{7.762}{6} = 1.294 \text{ mm.}^2$$

y se formarán prácticamente con chapas de $130 \times 10 = 1.300$ mm.²

Para las comprimidas es imposible adoptar hierros perfilados con la dimensión mínima de 90 mm., porque resultaría un espesor excesivamente pequeño. Supongamos que tratemos de reducir esta menor dimensión á 70 mm. La relación de la longitud á la menor dimensión de la sección será

$$\frac{l}{h} = \frac{106}{7} = 15,$$

á la cual corresponde, según el cuadro del núm. 13, un trabajo de

$$\frac{6}{1{,}36} = 4{,}4 \text{ kg. por mm.}^2$$

Resulta un área de

$$\frac{7.762}{4{,}40} = 1.764 \text{ mm.}^2$$

Ahora bien, esta área es mayor que la correspondiente á las barras comprimidas adoptadas en la zona 3.ª, lo que hace ver que no puede obtenerse una reducción sensible del peso disminuyendo la

menor dimensión de la sección, y por lo tanto, debe adoptarse el mismo modelo de barras comprimidas que en la 3.ª zona.

Fácil sería completar este estudio determinando la zona en que las barras sufren inversión de esfuerzos, con el objeto de averiguar hasta qué distancia de la sección central deben ser todas las barras perfiladas, y comprobar si el trabajo que les corresponde es inferior á 4 kg.; bastaría aplicar lo dicho en los números 114 y 122, que no repetimos para este nuevo caso particular por creerlo innecesario.

CAPÍTULO V.

VIGAS DE CELOSÍA DE GRANDES MALLAS.

128. DEFINICIONES.—Se llama viga ó sistema articulado á una viga compuesta de una serie de barras ensambladas en sus extremos formando una red de triángulos unidos unos á otros por un lado común. En un principio sólo se admitía para formar estos sistemas un ensamblaje que constituía una verdadera articulación, permitiendo el giro relativo de las barras en su plano, y éste es el sistema que se sigue usando en América. Pero posteriormente se ha admitido el ensamblaje ordinario de roblones, sin perjuicio de considerarlo para el estudio de la estabilidad como una verdadera articulación, y la experiencia ha demostrado que no ofrece inconvenientes esta hipótesis.

Un sistema así dispuesto es un sistema simple ó estrictamente indeformable bajo la acción de pesos que se suponen siempre concentrados en los nudos ó articulaciones. Tiene las barras necesarias para el equilibrio, porque el giro que permite la articulación no puede verificarse por oponerse á él la invariabilidad de la longitud de las barras, y la forma triangular, y por lo tanto indeformable, de cada malla; y toda línea ó barra que se añadiese, según una diagonal del polígono del contorno, sería supérflua ó inútil para el equilibrio, é introduciría una indeterminación en la distribución de los esfuerzos.

Los sistemas simples que debemos considerar para el estudio de las vigas llamadas de grandes mallas, se reducen á tres.

1.° El sistema de triángulos isósceles, conocido con el nombre de sistema Warren (fig. 103).

2.° El de triángulos rectángulos compuestos de lados verticales comprimidos y diagonales estiradas, sistema Pratt (fig. 104).

3.° El de triángulos rectángulos con los lados verticales estirados y las diagonales comprimidas, sistema Howe (fig. 105).

El último sólo se emplea en los puentes de madera.

Fig 103.

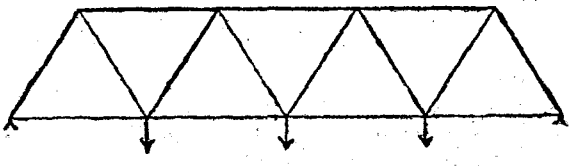


Fig 104.

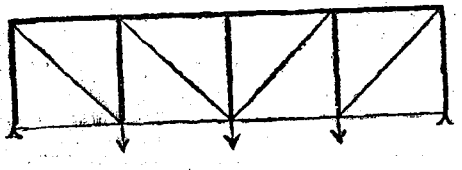
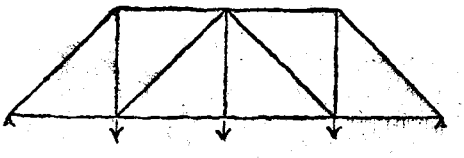


Fig 105.



En las figuras se ha supuesto que las cargas están uniformemente repartidas en toda la viga y que obran concentradas en todos los vértices inferiores. Más adelante veremos las modificaciones necesarias cuando las cargas pueden obrar solamente en algunos de los vértices, como sucede en los puentes.

Estos sistemas simples, tal como los acabamos de definir, rara vez pueden emplearse en la práctica. Los sistemas de grandes mallas se usan para luces de alguna consideración, y las alturas que se asignan á estas vigas son superiores á las que hemos indicado para las vigas de alma llena y de celosía ordinaria, estando comprendidas entre $^1/_5$ y $^1/_8$ de la luz.

Por otra parte, las viguetas sólo pueden colocarse en los nudos ó articulaciones, puesto que es condición indispensable para que las barras sólo sufran tensiones ó compresiones, que todas las cargas se transmitan á las vigas por los nudos. Resulta de aquí que gene-

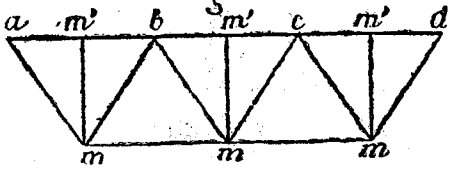
ralmente habrían de estar las viguetas demasiado separadas, exigiendo, por lo tanto, las viguetas y los largueros, dimensiones excesivas.

Para salvar esta dificultad y poder aproximar más los nudos, se han ideado dos soluciones.

La primera consiste en introducir nuevas barras, pero disponiéndolas de modo que no introduzcan indeterminación, constituyendo las llamadas vigas *complejas*.

Se comprenderá esto fácilmente con un ejemplo. Supongamos una viga Warren (fig. 106) que debe sostener el piso á la altura de la cabeza superior. Se habrán de disponer las viguetas en las articulaciones *a*, *b*, *c*, *d*, resultando en general demasiado separadas, pues basta que la luz sea de 30 m. para que la separación de las viguetas sea de 10.

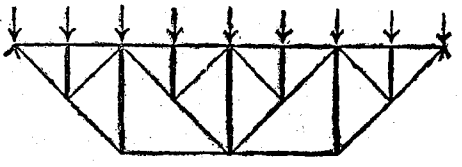
Fig 106.



Si añadimos los montantes $m\,m'$, podremos reducir la separación á la mitad colocando viguetas en los puntos m', y las cargas correspondientes á estas viguetas se transmitirán por los montantes á las articulaciones inferiores que quedarán cargadas con iguales pesos que las superiores. Se ve que el sistema se podrá calcular lo mismo que el de la figura 103, con la sola diferencia de que se repartirán las cargas entre todas las articulaciones, y los montantes deberán tener una sección suficiente para resistir por compresión la carga que corresponde á una articulación.

En América se emplean mucho las vigas complejas, y uno de los sistemas más aceptados, es el sistema Pettit. Se deriva del sistema Pratt mediante la adición de montantes intermedios entre los principales de una altura igual á la mitad de la de estos y cuyo extremo inferior se sostiene por la diagonal correspondiente, y de un tirante que va á parar á la articulación inmediata (fig. 107).

Fig 107.



La segunda solución consiste en intercalar, entre los nudos del

sistema simple que sirve de base, otro ú otros sistemas iguales, conforme al principio de los sistemas múltiples, ya explicado al tratar de las celosías ordinarias. Así la viga de la figura 91, que nos ha servido de base para derivar de ella las vigas de celosía ordinaria de diversos órdenes, se puede considerar como la superposición de dos vigas Warren de triángulos equiláteros. La figura 92 proviene de la superposición de tres sistemas simples, y así sucesivamente. Se suponen las cargas distribuídas por igual entre los sistemas componentes, y se ve que las celosías ordinarias pueden calcularse fácilmente una vez conocido el cálculo del sistema simple. Sin embargo, en la práctica se prefiere el método de cálculo explicado en el capítulo anterior, que es más breve en el caso en que el número de sistemas simples superpuestos excede de dos.

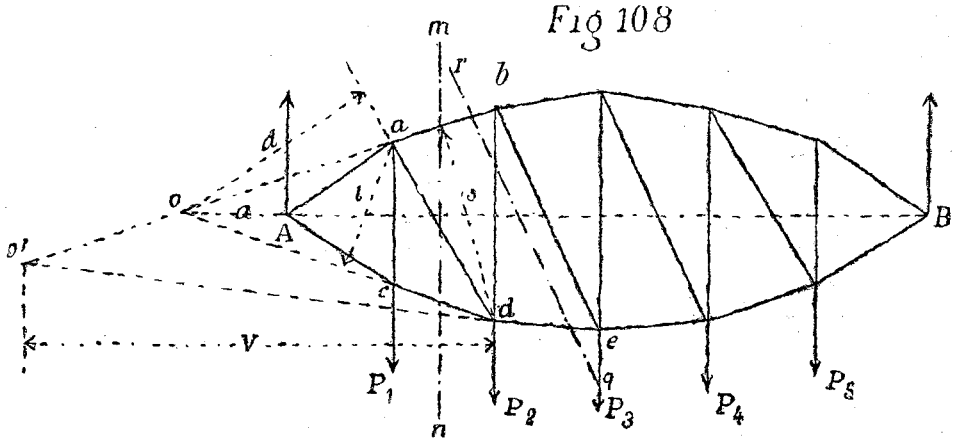
En las vigas de grandes mallas, cuyo cálculo se lleva á cabo considerándolas compuestas de varios sistemas simples, se atiende más estrictamente para su composición á las indicaciones teóricas que en las vigas de celosía ordinarias. Así, en estas últimas, generalmente se roblonan entre sí las barras de los dos sistemas en sus cruzamientos, mientras que en las de grandes mallas se dejan siempre independientes. En éstas, las barras comprimidas son siempre perfiladas y las estiradas chapas planas, mientras que, en las ordinarias, no se establece siempre esta distinción, existiendo puentes en que todas las barras son perfiladas, y otros en que todas son chapas planas. Pasemos ya á exponer los principios generales del cálculo de las vigas simples, para aplicarlos luego á un corto número de tipos simples ó múltiples que se usan ya frecuentemente en todas las naciones de Europa.

De los diversos métodos que pueden aplicarse á estas vigas, elegiremos el de Ritter, que se reduce á la aplicación inmediata de las ecuaciones de equilibrio de la Estática, y es quizás el más fácil de comprender; el cálculo numérico en los casos prácticos, es asimismo, rápido y sencillo.

129. Método general de cálculo de los sistemas articulados simples.—Consideremos (fig. 108) un sistema articulado compuesto de dos cabezas poligonales, montantes verticales y diagonales, en el cual los montantes se hallan equidistantes, como sucede siempre

en las vigas de los puentes. Supongamos que actúen los pesos en las articulaciones inferiores, y sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 estos pesos. Empezaremos por hallar las reacciones A y B de los apoyos; toma-

Fig 108



remos los momentos de todas las fuerzas con relación á B, y tendremos desde luego, dividiendo por la luz l los dos miembros de la ecuación,

$$A = \frac{5}{6} P_1 + \frac{4}{6} P_2 + \frac{3}{6} P_3 + \frac{2}{6} P_4 + \frac{1}{6} P_5.$$

Del mismo modo obtendremos, tomando momentos con relación á A,

$$B = \frac{1}{6} P_1 + \frac{2}{6} P_2 + \frac{3}{6} P_3 + \frac{4}{6} P_4 + \frac{5}{6} P_5.$$

Para determinar la tensión ó compresión de una barra cualquiera, la $a\,b$ por ejemplo, supongamos que cortemos la viga por un plano $m\,n$ que encuentre tres barras. Es evidente que si suponemos aplicadas á las barras cortadas $a\,b$, $a\,d$ y $c\,d$ fuerzas iguales y contrarias á las tensiones ó compresiones que les corresponden, el equilibrio de la parte de viga que queda á la izquierda del plano $m\,n$ no se habrá alterado.

Por consiguiente, todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga á la izquierda de ese plano y las tres fuerzas que actúan sobre las barras cortadas están en equilibrio; y la suma de sus momentos con relación á un punto cualquiera del plano será cero. Si elegimos

como centro de momentos el punto en que se cortan dos de ellas, los momentos de sus tensiones desaparecerán de la ecuación, por ser cero los brazos de palanca, y se podrá calcular la tensión de la otra barra, que será la única incógnita de la ecuación. Consideraremos las tensiones como positivas, y las ecuaciones mismas indicarán, por el signo negativo, cuáles son las barras comprimidas.

Así, llamemos S á la reacción correspondiente á la barra $a\,b$. Para calcularla, deberemos tomar los momentos de las fuerzas A, P_1 y S con relación al punto d en que se cortan $a\,d$ y $c\,d$. Llamemos s al brazo de palanca de S, el cual se puede medir ó calcular conociendo la forma de la viga, y observando que el de A es $\frac{2}{6}\,l$, el de P_1, $\frac{1}{6}\,l$, y que la fuerza P_1 tiene un momento negativo, puesto que tiende á hacer girar al brazo de palanca en sentido contrario al de las agujas de un reloj, tendremos

$$\frac{2}{6}\,l\,A - \frac{1}{6}\,l\,P_1 + S\,s = 0$$

de donde resulta

$$S = \frac{1}{6\,s}(l\,P_1 - 2\,l\,A);$$

y sustituyendo en vez de A el valor hallado y efectuando las reducciones

$$S = -\frac{l}{36\,s}\,(9\,P_1 + 8\,P_2 + 6\,P_3 + 4\,P_4 + 2\,P_5) \qquad [1]$$

Observamos que el signo de S es negativo, y, por lo tanto, la reacción que debe desarrollar la barra $a\,b$ es una compresión, como debía suceder, puesto que es un elemento de la cabeza superior de la viga.

Para calcular el esfuerzo de la barra $c\,d$ de la cabeza inferior, esfuerzo que llamaremos I, habremos de tomar momentos con relación al punto a. Siendo i la distancia de dicho punto á la barra, obtendremos fácilmente, razonando como en el caso anterior,

$$\frac{1}{6}\,l \times A - I\,i = 0$$

Se observa que el momento de P_1 es nulo, y el de I, considerado como tensión, negativo, porque hace girar al brazo de palanca de derecha á izquierda. Se deduce de la ecuación anterior

$$I = \frac{1}{6\,i}\, l\, A$$

y poniendo en vez de A su valor

$$I = \frac{1}{36\,i}\, l\,(5\,P_1 + 4\,P_2 + 3\,P_3 + 2\,P_4 + P_5) \qquad [2]$$

valor esencialmente positivo, y que, por lo tanto, representa una tensión, según corresponde á la cabeza inferior de la viga.

Observemos desde luego que, en los valores dados por las fórmulas [1] y [2], todos los pesos P_1, P_2... entran con el mismo signo; la supresión de alguno de estos pesos disminuiría la compresión ó la tensión de la barra, y, por lo tanto, los mayores valores de estos esfuerzos corresponden al caso en que todas las articulaciones estén cargadas; así se justifica el procedimiento que hemos empleado siempre para calcular las cabezas de las vigas, suponiendo la sobrecarga extendida á todo el tramo.

Pasemos á la determinación del esfuerzo correspondiente á la diagonal *a d*. Cortemos la viga por el plano *m n;* representemos por D dicho esfuerzo; tomemos como centro de momentos el punto *o* en que concurren las barras *a b* y *c d;* llamemos *d* al brazo de palanca del esfuerzo buscado, y *a* á la distancia *o A,* brazo de palanca de la reacción A del apoyo. Ambos brazos de palanca pueden medirse ó calcularse, una vez conocida la forma de la viga. Tendremos la ecuación

$$D\,d - A\,a + P_1\left(a + \frac{1}{6}\,l\right) = 0$$

Despejando D, sustituyendo en vez de A su valor y haciendo las reducciones, tendremos

$$D = \frac{1}{6\,d}\,(-P_1\,(a + l) + 4\,P_2\,a + 3\,P_3\,a + 2\,P_4\,a + P_5\,a) \qquad [3]$$

130. TENSIONES MÁXIMA Y MÍNIMA DE UNA BARRA.—Observamos en esta expresión que el peso P_1, que actúa á la izquierda de la barra que se calcula, tiene signo negativo, mientras que todos los pesos situados á la derecha de la misma entran con signo positivo. Se ve, pues, que las acciones de los pesos situados á la izquierda y las de los situados á la derecha se contrarían, y que el valor de D será máximo si se suprime el peso P_1, es decir, si la sobrecarga se extiende desde la barra que se calcula hasta el apoyo B. Este resultado justifica el método que hemos empleado constantemente para evaluar el esfuerzo cortante máximo que corresponde á una sección dada de la viga.

El valor de la tensión máxima de la diagonal $a\,d$, que designaremos por $D_{máx}$, será, por lo tanto,

$$D_{máx} = \frac{a}{6\,d}\,(4\,P_2 + 3\,P_3 + 2\,P_4 + P_5) \qquad [4]$$

Si, por el contrario, suprimimos todos los pesos situados á la derecha de la sección considerada y sólo conservamos el peso P_1 que actúa á la izquierda, obtendremos el menor valor posible de D, que designaremos por $D_{mín}$, y será

$$D_{mín} = -\frac{P_1\,(a+l)}{6\,d} \qquad [5]$$

Por lo tanto, si los pesos P_1, P_2, P_3... son los mayores que pueden actuar en las articulaciones de la viga, el esfuerzo que deberá desarrollar la diagonal estará siempre comprendido entre los valores dados por las fórmulas [4] y [5]. Veremos, en los ejemplos de aplicación, que el valor de la tensión mínima puede ser negativo, es decir, una compresión, como resulta en el caso que examinamos, ó positivo, es decir, una tensión. En el primer caso, las condiciones de la barra son completamente diferentes de las ordinarias, quedando sometida á alternativas de tensiones y compresiones, y debiendo reducirse su coeficiente de resistencia según hemos explicado. Es indispensable, por lo tanto, calcular en cada diagonal la tensión máxima y la mínima. La primera corresponde al caso en que se suponen cargadas todas las articulaciones situadas á la derecha del

plano $m\,n$ que corta á la viga, y la segunda al caso en que se suponen cargadas las articulaciones que quedan á la izquierda del mismo plano.

Veamos ahora cómo se calculará un montante, y consideremos el $b\,d$. Cortemos la viga por el plano $q\,r$, que encuentra tres barras, las $a\,b$, $d\,e$, de las cabezas, y el montante que nos ocupa. Sea V la tensión que buscamos, v su brazo de palanca ó distancia al punto o' (en que se cortan las barras $a\,b$ y $d\,e$) que será el centro de momentos. Tomando momentos tendremos,

$$-Vv + P_1\left(a + \frac{l}{6}\right) + P_2\left(a + \frac{2\,l}{6}\right) - A\,a = 0.$$

El momento de V es negativo, si se supone que V sea positivo. Se deduce de aquí

$$V = \frac{1}{v}\left[P_1\left(a + \frac{l}{6}\right) + P_2\left(a + \frac{2\,l}{6}\right) - A\,a\right]$$

y poniendo en vez de A su valor y efectuando las reducciones,

$$V = \frac{1}{6\,v}\left[P_1\,(a + l) + 2\,P_2\,(a + l) - \frac{3}{6}\,P_3\,a - \frac{2}{6}\,P_4\,a - \frac{1}{6}\,P_5\,a\right] \quad [6]$$

En esta expresión observaremos que los pesos P_1 y P_2 que obran á la izquierda del plano secante son positivos, y negativos los que obran á la derecha. Obtendremos, pues, el valor máximo de V, suprimiendo los segundos, y el valor mínimo, suprimiendo los primeros. Tendremos así las fórmulas

$$V_{máx} = \frac{1}{6\,v}\left[P_1\,(a + l) + 2\,P_2\,(a + l)\right] \qquad [7]$$

$$V_{mín} = -\frac{a}{36\,v}\left[3\,P_3 + 2\,P_4 + P_5\right] \qquad [8]$$

Se observará que estas cargas son las mismas que corresponden á los máximos y mínimos de las diagonales, pero la que produce la tensión máxima en la diagonal desarrolla la mínima en el montante, y la correspondiente al mínimo en la diagonal da lugar al máximo en el montante.

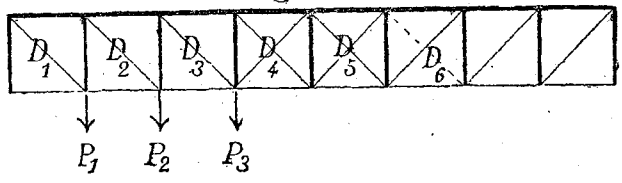
131. SISTEMAS DE GRANDES MALLAS MÁS USADOS.—El número de tipos de vigas de grandes mallas que se aplican con frecuencia y cuyo cálculo debemos estudiar detalladamente, es muy limitado.

En primer lugar mencionaremos las vigas de cabezas rectas. Uno de los tipos más frecuentemente usados, es el sistema Pratt (fig. 104). Sin embargo, en la práctica no puede componerse la viga con tanta sencillez porque, como hemos indicado, el diagrama de la figura supone la carga extendida constantemente á todo el tramo.

Cuando se determinan las tensiones máximas y mínimas de las diagonales para tener en cuenta las cargas parciales que se realizan en el servicio del puente, se observa que en un cierto número de diagonales inmediatas á los apoyos no hay inversión de esfuerzos, porque la tensión máxima y la mínima son positivas. Pero en algunas de las mallas centrales, dichas tensiones máxima y mínima son de signos contrarios, y para evitar que una misma barra resista esos esfuerzos alternativos, se dispone en esas mallas la diagonal opuesta, de modo que ésta trabaje por tensión cuando la primera debiera resistir una compresión.

Consideremos (fig. 109) una viga de ocho mallas y supongamos que calculemos las diagonales, determinando en cada una las tensiones máxima y mínima, empezando por la D_1, correspondiente al apoyo izquierdo. Para la diagonal D_1 encontraremos que la tensión máxima y la mínima son positivas, y lo mismo sucederá en la D_2. Admitamos que esté en el mismo caso la D_3; pero al llegar á la D_4, encontraremos que la tensión mínima será negativa, es decir, compresión. Esta compresión corresponde precisamente á la carga parcial P_1, P_2, P_3 que desarrollaría en la diagonal del otro sistema la tensión máxima.

Fig. 109.



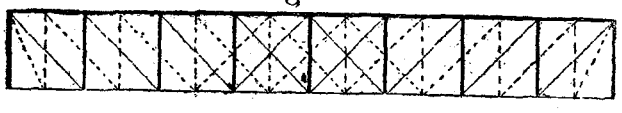
Colocaremos, por lo tanto, esa otra diagonal que resistirá por tensión los esfuerzos que la D_4 habría de resistir por compresión, evitándose así que haya barras sometidas á inversiones de esfuerzos. Si continuamos calculando las tensiones máximas y mínimas de las

diagonales, encontraremos que en la D_5 serán de signo contrario, y al llegar á la D_6, ambas son negativas ó compresiones. Esta diagonal se suprime, por lo tanto, porque la contraria no estará sometida á inversiones de esfuerzos.

El método más sencillo para el cálculo consiste, por consiguiente, en ir calculando las diagonales que bajan del apoyo izquierdo hacia el centro hasta llegar á una en que la tensión máxima y la mínima sean negativas, y reproducir las simétricas, que trabajarán por tensión para resistir á las cargas que en el primer sistema desarrollarían compresiones.

Este sistema simple sólo se emplea para luces inferiores á 40 ó 50 m. Con luces mayores se tropieza con el inconveniente ya señalado de la excesiva separación de las viguetas, y es necesario emplear el sistema doble intercalando otro idéntico, como se ve en la figura 110, en la cual el segundo sistema simple que entra en la composición de la viga se ha indicado con líneas de trazos para que se distinga mejor del anterior.

Fig. 110.



Conviene hacer algunas indicaciones generales respecto á la composición de estos puentes. Como los sistemas de grandes mallas se aplican generalmente á luces de alguna consideración, las secciones de las piezas exigen mucho desarrollo, y ordinariamente son las vigas de pared doble. Las cabezas tienen la forma de ⊔ presentando dos nervios verticales á los cuales se roblonan las dos chapas que constituyen las diagonales estiradas. Los montantes se componen de varios hierros en ángulo, y una de las formas más sencillas que se puede adoptar es la doble T con las cabezas en los mismos planos que los nervios verticales de las cabezas de las vigas y las chapas planas que forman las diagonales. Los ensamblajes son así muy sencillos, pues basta coser entre sí las tres piezas que concurren en los nudos por medio de dobles cartelas, una en cada pared. Si la doble T diera una sección excesiva para componer los montantes, puede reducirse la sección á los cuatro hierros de ángulo que forman sus cabezas enlazando éstas entre sí por una celosía ligera.

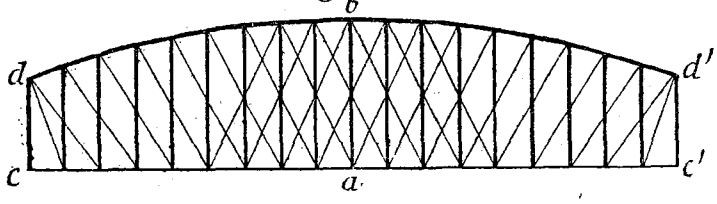
Otra de las vigas de frecuente aplicación, que se considera como de grandes mallas, es la llamada de montantes y cruces de San Andrés.

Este sistema puede concebirse como compuesto de dos simples superpuestos de diversos modos. Si se superponen dos vigas, una del sistema Pratt (fig. 104) y otra del sistema Howe (fig. 105), obtendremos la viga de montantes y cruces de San Andrés; basta calcular cada una de las vigas simples, admitiendo que las cargas se repartan por igual entre ambas, para determinar las secciones de las barras de la viga que examinamos.

Para luces pequeñas se considera á veces como celosía ordinaria, y se le aplica el procedimiento de cálculo que hemos estudiado en el capítulo IV.

Estos mismos sistemas de celosía se emplean con cabezas curvas. En algunos puentes de grandes luces construídos en Alemania y en Holanda, se han trazado las vigas del modo siguiente: Sobre la mitad de la cabeza inferior, que es recta y sostiene el piso, se ha tomado una altura $a\,b$ que varía de $^1/_5$ á $^1/_8$ de la luz (fig. 111.) Sobre

Fig. 111.

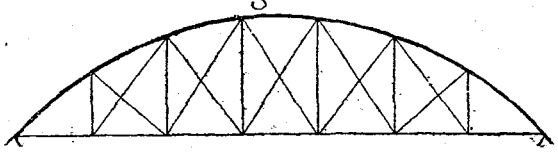


los apoyos se toman alturas $c\,d$, $c'\,d'$, suficientes para poder arriostrar las vigas por la parte superior, permitiendo el paso de los trenes. La cabeza superior es una curva $d\,b\,d'$, que puede ser un arco de círculo, de elipse ó de parábola, simétrico siempre respecto á $a\,b$. Las cabezas se enlazan entre sí por un sistema doble ó triple de montantes comprimidos y diagonales estiradas. El procedimiento de cálculo es el mismo que en el caso de las cabezas rectas, salvo pequeñas diferencias de detalle fáciles de comprender.

Incluiremos, finalmente, entre los sistemas de grandes mallas que debemos estudiar, por ser de frecuente aplicación, la viga parabólica, conocida también con el nombre inglés *bow-string*.

Consta de la cabeza superior, que es una parábola cuyo eje vertical está en el punto medio de la luz y que pasa por los puntos de apoyo (fig. 112). La cabeza inferior es recta. Las dos cabezas se unen por un sistema de piezas verticales y diagonales en ambos sentidos. Todas las piezas de esta viga, exceptuando la cabeza superior, están sometidas á tensión, como veremos al estudiarla detalladamente, resultando que el sistema es muy ligero y económico.

Fig. 112.



Se nota, sin embargo, en estos últimos años alguna tendencia á abandonarlo, atribuyéndosele el inconveniente de ser muy deformable. Pero esta objeción, importante cuando se trata de puentes para ferrocarriles, lo es mucho menos tratándose de carreteras, y para esta clase de vías, puede prestar muy buenos servicios, si las luces han de ser considerables. Puede convenir especialmente para luces comprendidas entre 50 y 80 m., y aún para luces mayores, si no se considera admisible la solución, aún más económica, de los puentes colgados.

CAPÍTULO VI.

VIGA RECTA DE MONTANTES COMPRIMIDOS Y DIAGONALES ESTIRADAS. SISTEMA SIMPLE.

132. CÁLCULO DE UNA VIGA RECTA SIMPLE DE MONTANTES COMPRIMIDOS Y DIAGONALES ESTIRADAS.—Empecemos por estudiar la aplicación del método de Ritter al diagrama de viga simple de la figura 113. Elegimos una viga de cinco mallas solamente, para facilitar la explicación, prefiriendo este método que permite establecer concretamente las ecuaciones que sirven para el cálculo de cada barra, en vez de estudiar fórmulas generales que podrían confundir á los lectores poco familiarizados con el álgebra. No ofrece inconvenientes este sistema, puesto que, en las aplicaciones prácticas, es siempre muy limitado el número de mallas de las vigas simples que hay que considerar, y no hay dificultad alguna en repetir para el cálculo de cada barra los razonamientos que conducen á la ecuación que determina la tensión ó compresión que le corresponde.

Designemos por S_1, S_2, S_3... las tensiones de las barras de la cabeza superior, por I_1, I_2, I_3... las correspondientes á la cabeza inferior, por V_1, V_2, V_3... las de las verticales, afectando de subíndices *máx* ó *mín* estas últimas, según se refieran á la tensión máxima ó á la mínima, y por D_1, D_2, D_3... las de las diagonales, también con la misma distinción entre la tensión máxima y la mínima.

Supondremos que, tanto el peso propio de la viga como la sobrecarga, se aplican á los nudos superiores; llamaremos π á la parte de peso propio que corresponde á cada nudo, y P á la sobrecarga que obra sobre el mismo. Con estos datos, podemos indicar la marcha

general de los cálculos, y empezaremos por la determinación de las tensiones correspondientes á las cabezas.

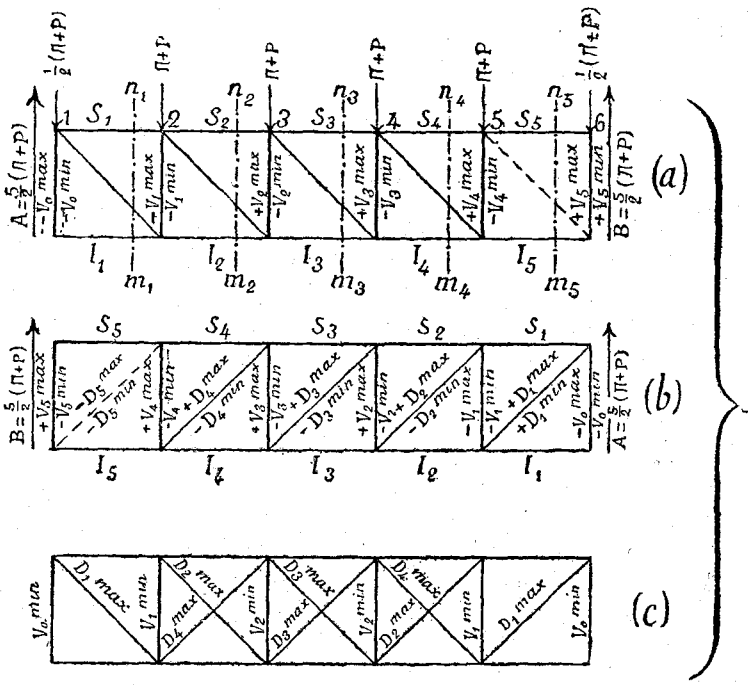


Fig 113.

133. CÁLCULO DE LAS TENSIONES DE LAS CABEZAS.—Sabemos que las cabezas sufren los mayores esfuerzos á que pueden estar expuestas cuando la carga móvil obra en todo el tramo. Por consiguiente, debemos calcularlas para el caso en que obre sobre cada nudo un peso $\pi + P$, y en los nudos extremos la mitad, ó sea $\frac{1}{2}(\pi + P)$. Entonces las reacciones de los apoyos serán

$$A = B = \frac{5}{2}(\pi + P).$$

Para calcular S_1 supondremos cortadas las tres barras S_1, D_1, é I_1 por el plano vertical $m_1\, n_1$, y escribiremos la ecuación de los momentos de todas las fuerzas exteriores que obran á su izquierda y de las tensiones de las barras cortadas con relación al segundo nudo inferior en que concurren las D_1, I_1. El momento de la reacción A del apoyo es positivo, y su brazo de palanca la longitud de una malla, ó sea $\frac{1}{5}\, l$,

siendo l la luz. El momento de S_1 (suponiendo que esta fuerza es una tensión) es positivo, y su brazo de palanca es la altura h de la viga. Además está aplicado en el vértice superior el peso $\frac{\pi + P}{2}$ cuyo brazo de palanca es $\frac{l}{5}$, y su momento negativo. No existen otras fuerzas á la izquierda de $m_1\ n_1$, y, por lo tanto, tendremos la ecuación

$$+\frac{1}{5}\ l A\ -\frac{\pi + P}{2}.\frac{l}{5} + S_1\ h = 0$$

de donde se deduce, poniendo en vez de A su valor,

$$-S_1 = \frac{4}{5}\frac{\pi + P}{h}\ l;$$

se ve que S_1 es una compresión, como se podía prever.

Observemos que este valor es precisamente igual al momento flector en el nudo segundo de la cabeza inferior dividido por la altura de la viga. Esta es una regla general que comprobaremos para todas la barras de las cabezas.

La tensión de una barra correspondiente á una cabeza, es siempre igual al momento flector en el vértice opuesto del triángulo rectángulo á que pertenece dicha barra, dividido por la altura de la viga.

Para calcular I_1, tomaremos los momentos con relación al primer nudo de la cabeza superior, y, como todas las fuerzas pasan por él, sus momentos son nulos; por lo tanto, $I_1 = o$. Se comprende, en efecto, por la simple inspección de la viga que podrían suprimirse el primer montante y la barra I_1 de la cabeza inferior, apoyando la viga en el nudo primero de la cabeza superior, sin que se alterase por eso el equilibrio del sistema. La regla del momento flector conduce á dividir por h el momento flector de la vertical del apoyo, el cual es cero.

Pasemos al cálculo de S_2, I_2, y cortemos la viga por el plano $m_2\ n_2$. Para la determinación de S_2, el centro de momentos será el tercer nudo de la cabeza inferior. Las fuerzas que deberemos considerar son las mismas que en el caso anterior, y además el peso $\pi + P$ que

obra en el segundo vértice; los brazos de palanca de las primeras serán la longitud de dos mallas, ó sea $\frac{2}{5}\,l$, y el de la segunda, la longitud de una malla, ó sea $\frac{1}{5}\,l$. Tendremos así la ecuación

$$\frac{2}{5}\,l\,A - \frac{2}{5}\,l\,\frac{(\pi + P)}{2} - \frac{1}{5}\,l\,(\pi + P) + S_2\,h = 0$$

de donde

$$-S_2 = \frac{2}{5}\,\frac{l\,A}{h} - \frac{2}{5\,h}\,l\,(\pi + P) = \frac{3}{5}\,\frac{(\pi + P)\,l}{h}.$$

Observamos, en la primera ecuación que, al despejar S_2, no hacemos otra cosa que dividir por h el momento flector en el tercer montante.

Para calcular I_2, tomaremos momentos con relación al segundo nudo de la cabeza superior, lo que conduce á la ecuación

$$\frac{1}{5}\,l\,A - \frac{1}{5}\,l\,\frac{(\pi + P)}{2} - I_2\,h = 0$$

ecuación idéntica á la que ha servido para calcular S_1, salvo el signo de la incógnita, y por lo tanto, tendremos

$$-S_1 = I_2$$

I_2 será una tensión de igual valor absoluto que la compresión S_1

Así debía suceder, puesto que, para calcular S_1, hemos debido valernos del momento flector en el segundo montante, y el mismo sirve para calcular I_2, toda vez que el vértice opuesto á esta barra es el segundo nudo de la cabeza superior.

Calculemos ahora S_3; para ello, tomaremos los momentos con relación al vértice cuarto de la cabeza inferior; tendremos que considerar, además de las fuerzas del caso anterior, el peso $\pi + P$ aplicado en el tercer montante, y los brazos de palanca quedan aumentados en la longitud de una malla, ó sea $\frac{1}{5}\,l$.

Tendremos la ecuación

$$\frac{3}{5} A\, l - \frac{3}{5} l \times \frac{\pi + P}{2} - \frac{2}{5} l\,(\pi + P) - \frac{1}{5} l\,(\pi + P) + S_3 h = 0$$

de donde

$$- S_3 = \frac{3}{5} \frac{(\pi + P)\, l}{h}.$$

Se observará que el valor buscado es, conforme á la regla, el momento flector en el cuarto nudo dividido por h.

Vemos también que el valor de S_3 es el mismo que el de S_2. Así debe suceder, en efecto, puesto que el momento flector en el montante tercero es igual al momento flector en el montante cuarto, á causa de la simetría (1).

El valor de I_3 será igual y de signo contrario á S_2, como puede verse fácilmente, estableciendo directamente la ecuación, ó por la regla de los momentos flectores.

No es necesario continuar el cálculo de las barras que constituyen las cabezas. Si lo continuáramos del mismo modo, los esfuerzos S_4, S_5 del diagrama *(a)* no resultarían iguales á los simétricos S_2 y S_1, puesto que la viga *(a)* no es simétrica (2). Pero, como hemos de modificarlo para suprimir las diagonales comprimidas, adoptando la viga *(c)* que es simétrica, resultará en ésta que $S_1 = S_5$ y $S_2 = S_4$.

Para verlo con toda claridad, basta observar que las barras S_4 y S_5 del diagrama *(b)* se hallan en idénticas condiciones que las S_1 y S_2 del diagrama *(a)*, y que, si les aplicamos el mismo método de cálculo partiendo del apoyo de la derecha, obtendremos necesariamente los mismos valores. Esta observación permite limitar el cálculo de las cabezas á la mitad de la viga.

Conocemos, por lo tanto, los mayores esfuerzos que deben poder resistir las cabezas, y podremos fácilmente determinar las secciones de los diversos trozos.

---

(1) Nos referimos á la simetría de las cargas y no á la de la figura.

(2) Si consideramos, por ejemplo, los esfuerzos S_2 y S_4, veremos que el primero depende del momento flector en el tercer montante, y el segundo del correspondiente al quinto, y estos dos montantes no están en secciones simétricas respecto al eje de la viga.

134. CÁLCULO DE LAS DIAGONALES.—Al calcular los esfuerzos correspondientes á las diagonales, debemos determinar separadamente los debidos á la carga permanente, que necesariamente se extiende á todo el tramo, y los debidos á las cargas móviles parciales que producen las tensiones máxima y mínima. Los esfuerzos mayor y menor correspondientes á una diagonal se hallarán sumando el debido á la carga permanente con el máximo y el mínimo debidos á la sobrecarga.

Así, si D_k es una diagonal, designaremos por D_k^{π} el esfuerzo que desarrolla en dicha diagonal la carga permanente; $d_k^{máx}$ y $d_k^{mín}$ serán los esfuerzos máximo y mínimo debidos á la sobrecarga; y los esfuerzos máximo y mínimo totales, que llamaremos $D_k^{máx}$ y $D_k^{mín}$ serán

$$D_k^{máx} = D_k^{\pi} + d_k^{máx}$$

$$D_k^{min} = D_k^{\pi} + d_k^{mín}.$$

Diagonal D_1.—Calculemos, en primer lugar, el esfuerzo D_1^{π} debido á la carga permanente. La reacción correspondiente en el apoyo izquierdo, que llamaremos A_1^{π} será

$$A_1^{\pi} = \frac{5}{2}\,\pi.$$

Debemos ahora suponer cortadas las tres barras S_1, D_1, I_1, y con arreglo al procedimiento que anteriormente hemos seguido, deberíamos escribir la ecuación de los momentos con relación al punto en que se cortan S_1, I_1; pero, como estas barras son paralelas, la ecuación de los momentos no puede aplicarse en el caso presente. La dificultad se resuelve con mucha facilidad, empleando la ecuación de las proyecciones de las fuerzas sobre el plano vertical $m_1\ n_1$; se sabe que la suma algebráica de las proyecciones de todas las fuerzas que han de hacerse equilibrio, es cero. Por otra parte, las tensiones S_1, I_1, son perpendiculares al plano $m_1\ n_1$, y desaparecen en la ecuación, quedando como única incógnita la tensión D_1 que buscamos.

Esta misma dificultad se encuentra al calcular las barras verticales y se resuelve de la misma manera.

Las fuerzas que obran á la izquierda del plano $m_1\, n_1$, son la reacción del apoyo A_1^{π} y la carga correspondiente al primer nudo $\frac{\pi}{2}$. Llamando α al ángulo de la diagonal con la vertical, tendremos

$$A_1^{\pi} - \frac{\pi}{2} - D_1^{\pi} \cos \alpha = 0$$

de donde

$$D_1^{\pi} = \frac{A_1^{\pi} - \frac{\pi}{2}}{\cos \alpha} = \frac{2\,\pi}{\cos \alpha};$$

sustituyendo en vez de A_1^{π} su valor $\frac{5}{2}\,\pi$.

Para calcular la tensión $d_1^{máx}$ correspondiente á la sobrecarga, sabemos que debemos considerar cargados con un peso P todos los vértices situados á la derecha del plano $m_1\, n_1$, excepto el del apoyo derecho que sólo recibe la carga $\frac{P}{2}$. Los nudos cargados son, por lo tanto, 2, 3, 4, 5 y 6.

Calculemos la correspondiente reacción del apoyo $a_1^{máx}$. Basta tomar los momentos con relación al apoyo derecho, y dividiendo por l toda la ecuación, tendremos

$$a_1^{máx} = P\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) = 2\,P.$$

Proyectando sobre $m_1\, n_1$ las fuerzas $a_1^{máx}$, $\frac{P}{2}$ (carga correspondiente al primer nudo), y $d_1^{máx}$, obtenemos

$$a_1^{máx} - \frac{P}{2} - d_1^{máx} \times \cos \alpha = 0$$

ó sea

$$d_1^{máx} = \frac{a_1^{máx} - \frac{P}{2}}{\cos \alpha} = \frac{3\,P}{2 \cos \alpha}.$$

Observaremos que el valor hallado no es otra cosa que el esfuerzo cortante en el segundo montante dividido por el coseno del ángulo α, ó lo que es lo mismo, que la proyección de la tensión de la diagonal sobre la vertical V_1 hace equilibrio al esfuerzo cortante en dicha sección vertical.

Para calcular d_1^{min} hemos de suponer cargado sólo el primer nudo. La carga es $\frac{P}{2}$ y la reacción del apoyo será $-\frac{P}{2}$; luego la ecuación será

$$\frac{P}{2} - \frac{P}{2} + d_1^{min} \cos \alpha = 0$$

de donde se deduce

$$d_1^{min} = 0.$$

Ahora obtendremos los valores $D^{máx}$ y D_1^{min} como ya hemos indicado, y serán

$$D_1^{máx} = D_1^{\pi} + d_1^{máx} = \frac{2\pi}{\cos \alpha} + \frac{3P}{2 \cos \alpha} = \frac{4\pi + 3P}{2 \cos \alpha}.$$

$$D_1^{min} = D_1^{\pi} + d_1^{min} = \frac{2\pi}{\cos \alpha}.$$

Diagonal D_2.—Para calcular D_2^{π}, cortaremos la viga por el plano vertical $m_2 n_2$, y proyectaremos sobre él las fuerzas que obran á la izquierda. En este caso son: 1.° la reacción del apoyo que es $\frac{5}{2}\pi$; 2.° la carga sobre el primer nudo $\frac{\pi}{2}$; 3.° la carga sobre el segundo nudo que es π, y 4.° la tensión D_2^{π} que buscamos; tendremos, por consiguiente, la ecuación

$$\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - \pi - D_2^{\pi} \cos \alpha = 0$$

de donde resulta

$$D_2^{\pi} = \frac{\pi}{\cos \alpha}.$$

Para calcular $d_2^{máx}$, supondremos cargados los nudos 3, 4 y 5 con la carga P, y el 6 con la carga $\frac{P}{2}$. Para determinar la reacción del apoyo $a_2^{máx}$, tomaremos momentos con relación al apoyo derecho y obtendremos, dividiendo la ecuación por l,

$$a_2^{máx} = \frac{P}{5}(3+2+1) = \frac{6}{5}P.$$

Proyectando todas las fuerzas que obran á la izquierda del plano $m_2 n_2$ sobre la vertical, tendremos

$$\frac{6}{5}P - d_2^{máx}\cos\alpha = 0$$

de donde se saca

$$d_2^{máx} = \frac{6P}{5\cos\alpha}.$$

Para determinar $d_2^{mín}$, supondremos cargados los nudos 1 y 2. La reacción del apoyo $a_2^{mín}$ será

$$a_2^{mín} = \frac{1}{2}P + \frac{4}{5}P = \frac{13}{10}P.$$

La ecuación de las proyecciones nos dará

$$\frac{13}{10}P - \frac{P}{2} - P - d_2^{mín}\cos\alpha = 0$$

de donde se sacará

$$d_2^{mín} = -\frac{2P}{10\cos\alpha} = -\frac{P}{5\cos\alpha}$$

que es una compresión. Los valores de $D_2^{máx}$ y $D_2^{mín}$ serán

$$D_2^{máx} = \frac{\pi}{\cos\alpha} + \frac{6P}{5\cos\alpha}$$

$$D_2^{mín} = \frac{\pi}{\cos\alpha} - \frac{P}{5\cos\alpha};$$

En general, el primer término de $D_2^{mín}$ será mayor que el segundo y resultará una tensión en las aplicaciones numéricas.

Diagonal D_3.—Cortando por el plano vertical $m_3 n_3$, estableceremos ya fácilmente la ecuación que da D_3^{π}, estando cargados todos los nudos con el peso π, excepto los dos extremos, cuya carga será $\frac{\pi}{2}$. Dicha ecuación será

$$\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - 2\pi - D_3^{\pi} \cos\alpha = 0$$

de donde resulta

$$D_3^{\pi} = 0.$$

Para el cálculo de $d_3^{máx}$, los nudos cargados son los 4, 5 y 6.

La reacción del apoyo izquierdo $a_3^{máx}$, se halla como siempre, y será

$$a_3^{máx} = \frac{P}{5}(2+1) = \frac{3}{5}P.$$

Proyectando sobre $m_3 n_3$ esta fuerza, que es la única exterior que obra á la izquierda, y la tensión $d_3^{máx}$ que buscamos, se tendrá

$$\frac{3}{5}P - d_3^{máx} \cos\alpha = 0$$

y

$$d_3^{máx} = \frac{3P}{5\cos\alpha}.$$

La tensión $d_3^{mín}$ corresponde al caso de hallarse cargados los nudos 1, 2 y 3.

La reacción $a_3^{mín}$ del apoyo es

$$a_3^{mín} = \frac{1}{2}P + \frac{4}{5}P + \frac{3}{5}P = \frac{19}{10}P,$$

y proyectando todas las fuerzas de la izquierda del plano $m_3 n_3$ sobre dicho plano

$$\frac{19}{10}P - \frac{1}{2}P - 2P - d_3^{mín} \cos\alpha = 0,$$

de donde se deduce

$$d_3^{min} = -\frac{3P}{5\cos\alpha};$$

luego

$$D_3^{máx} = \frac{3P}{5\cos\alpha}$$

$$D_3^{min} = -\frac{3P}{5\cos\alpha}.$$

Esta última es siempre una compresión.

Diagonal D_4.—D_4^{π} vendrá dada por la ecuación

$$\frac{5}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi - 3\pi - D_4^{\pi}\cos\alpha = 0$$

como se ve cortando por el plano $m_4\, n_4$. Se deduce

$$D_4^{\pi} = -\frac{\pi}{\cos\alpha},$$

que, como se ve, es una compresión.

Para calcular $d_4^{máx}$, los nudos cargados serán los 5 y 6.

La reacción del apoyo $a_4^{máx}$ será

$$a_4^{máx} = \frac{P}{5}$$

y por lo tanto, la ecuación de las proyecciones dará

$$\frac{P}{5} - d_4^{máx}\cos\alpha = 0$$

de donde

$$d_4^{máx} = \frac{P}{5\cos\alpha}.$$

En el cálculo de d_4^{min}, hemos de suponer cargados los nudos 1, 2, 3 y 4.

La reacción del apoyo a_4^{min} será

$$a_4^{min} = \frac{1}{2}P + \frac{4}{5}P + \frac{3}{5}P + \frac{2}{5}P = \frac{23}{10}P.$$

La ecuación de las proyecciones sobre la vertical dará

$$\frac{23}{10}P - \frac{P}{2} - 3P - d_4^{min}\cos\alpha = 0$$

de donde se saca

$$d_4^{min} = -\frac{6}{5}P.$$

Luego

$$D_4^{máx} = -\frac{\pi}{\cos\alpha} + \frac{P}{5\cos\alpha}$$

$$D_4^{min} = -\frac{\pi}{\cos\alpha} - \frac{6}{5}P.$$

La D_4^{min} es siempre una compresión. La $D_4^{máx}$ lo será también generalmente.

Hay una relación entre los signos de D_2^{min} y $D_4^{máx}$, de modo que si hay inversión de esfuerzos en una de estas barras, lo hay también en la otra; pero si $D_2^{máx}$ y D_2^{min} fueran tensiones ambas, las $D_4^{máx}$ y D_4^{min} serían compresiones.

Diagonal D_5.—La consideración de la carga permanente da

$$\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2} - 4\pi - D_5^{\pi}\cos\alpha = 0$$

de donde

$$D_5^{\pi} = -\frac{2\pi}{\cos\alpha}.$$

Para calcular $d_5^{máx}$, sólo ha de estar cargado el nudo 6; luego

$$a_6^{máx} = 0 \qquad \text{y} \qquad d_5^{máx} = 0.$$

Para el cálculo de d_5^{min}, han de suponerse cargados todos los nudos, excepto el 6. Tendremos

$$a_5^{min} = \frac{1}{2}P + \frac{4}{5}P + \frac{3}{5}P + \frac{2}{5}P + \frac{1}{5}P = \frac{5}{2}P,$$

y d_5^{min} se deducirá de la ecuación

$$\frac{5}{2}P - \frac{1}{2}P - 4\,P - d_5^{\,min}\cos\alpha = 0,$$

de donde

$$d_5^{\,min} = -\frac{2\,P}{\cos\alpha}.$$

Luego

$$D_5^{\,máx} = -\frac{2\,\pi}{\cos\alpha}.$$

$$D_5^{\,min} = -\frac{2\,\pi}{\cos\alpha} - \frac{2\,P}{\cos\alpha}.$$

Se ve que ambas son compresiones, así como son tensiones las $D_1^{\,máx}$ y $D_1^{\,min}$ de la malla simétrica.

135. CÁLCULO DE LAS VERTICALES.—Si se corta una vertical cualquiera por un plano paralelo á la diagonal, y se proyectan todas las fuerzas que quedan á la izquierda de este plano sobre la vertical, se tendrá una ecuación en la que entrará la tensión buscada y otras fuerzas conocidas. La tensión de una vertical será la suma algebráica de todas las fuerzas exteriores que obran á la izquierda del montante.

Pero, una vez conocidas las tensiones de las diagonales, es muy fácil deducir de ellas las correspondientes á los montantes. En efecto, si consideramos un nudo cualquiera de la cabeza inferior, observaremos que en él deben equilibrarse la proyección de la tensión de la diagonal sobre la vertical y la tensión buscada del montante. Se sigue de aquí que el esfuerzo que corresponde al montante será el de la diagonal, multiplicado por el coseno del ángulo que ésta forma con la vertical. Además, el signo de la tensión del montante será siempre contrario al de la diagonal, y se ve inmediatamente que, en un nudo de la cabeza inferior, donde no obran otras fuerzas que tengan componentes verticales, no podría haber equilibrio si la diagonal y el montante estuvieran sometidos los dos á tensión ó los dos á compresión.

Debe tenerse en cuenta, además, que las cargas que producen la tensión máxima en la diagonal desarrollan la mínima en el montante y vice-versa; por consiguiente, para hallar la tensión máxima

del montante habrá que proyectar sobre él la mínima de la diagonal que concurre con él en la cabeza inferior, y para hallar la tensión máxima, será preciso proyectar la tensión máxima de la misma diagonal, cambiando el signo en ambos casos.

Se observará que no se puede aplicar esta regla al primer montante, puesto que no concurre con ninguna diagonal en la cabeza inferior; pero, en este caso, la determinación del esfuerzo es sencillísima, bastando hallar la reacción del apoyo cuando está cargado y cuando esté descargado el tramo, restando el peso correspondiente á media malla que obra en la parte superior del montante.

Así tendremos el valor de $V_1^{mín}$ considerando cargado el tramo y será

$$V_0^{mín} = -\frac{5}{2}(\pi + P) + \frac{1}{2}(\pi + P) = -2(\pi + P)$$

y considerándolo descargado

$$V_0^{máx} = -\frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = -2\pi.$$

Montante V_1.—Para calcular $V_1^{mín}$ bastará observar la condición de equilibrio en el nudo inferior del segundo montante, y veremos que, conforme á la regla, se hallará dicho valor proyectando $D_1^{máx}$ sobre la vertical y cambiando el signo del producto; tendremos, pues,

$$V_1^{mín} = -D_1^{máx} \times \cos\alpha = -2\pi - \frac{3}{2}P.$$

Del mismo modo obtendremos, proyectando sobre la vertical $D_1^{mín}$,

$$V_1^{máx} = -D_1^{mín} \times \cos\alpha = -2\pi.$$

Montante V_2.—Aplicando el mismo procedimiento obtendremos:

$$V_2^{mín} = -D_2^{máx} \cos\alpha = -\pi - \frac{6}{5}P.$$

$$V_2^{máx} = -D_2^{mín} \cos\alpha = -\pi + \frac{1}{5}P.$$

Montante V_3.—Los valores máximo y mínimo en V_3 serán:

$$V_3^{mín} = - D_3^{máx} \cos \alpha = - \frac{3}{5} P.$$

$$V_3^{máx} = - D_3^{mín} \cos \alpha = + \frac{3}{5} P.$$

Montante V_4.—La consideración del equilibrio en el cuarto nudo inferior nos dará:

$$V_4^{mín} = - D_4^{máx} \cos \alpha = \pi - \frac{1}{5} P.$$

$$V_4^{máx} = - D_4^{mín} \cos \alpha = \pi + \frac{6}{5} P.$$

Montante V_5.—El equilibrio en el nudo quinto de la cabeza inferior da:

$$V_5^{mín} = - D_5^{máx} \cos \alpha = + 2 \pi.$$

$$V_6^{máx} = - D_5^{mín} \cos \alpha = 2 (\pi + P).$$

Finalmente, el montante V_6 se halla en condiciones especiales, puesto que á su parte inferior se aplica la reacción del apoyo de la derecha, pero los esfuerzos que le corresponden son evidentemente iguales á los de V_0, y son, por consiguiente, conocidos.

En las aplicaciones numéricas es preferible empezar por determinar los esfuerzos correspondientes á los montantes y deducir de éstos los de las diagonales. En las expresiones algebráicas ha sido muy fácil la multiplicación de las tensiones de las diagonales por cos α; pero, en una aplicación numérica, hubiéramos tenido que empezar por hacer divisiones por cos α al hallar los esfuerzos de las diagonales y multiplicar éstos por la misma cantidad para deducir los de los montantes. Empezando por determinar directamente los de los montantes, se evitan esas operaciones.

136. Composición de la viga.—Tenemos ya todas las tensiones máximas y mínimas de las diversas piezas del diagrama simple de la figura 113 *(a)*, y vemos en ella que hay diagonales y montantes que quedarían alternativamente sometidos á tensiones y compre-

siones. Para fijar las ideas, supongamos que en la diagonal D_2 la tensión máxima sea positiva y la mínima negativa. Lo mismo sucederá en las D_3 y D_4. La D_5 estará siempre sometida á compresión, puesto que $D_5^{máx}$ y D_5^{min} son negativas. En tal caso, las verticales V_0 y V_1 sufrirían exclusivamente compresiones, y las V_2, V_3 y V_4 estarían expuestas alternativamente á compresiones y á tensiones. En la figura 113 *(a)* se han indicado los signos de los esfuerzos máximos y mínimos correspondientes á cada una de las piezas que forman la celosía.

Imaginemos ahora el sistema simple *(b)*, en que sólo entran las diagonales que faltan en la *(a)*. Es evidente que, si determinamos las tensiones máximas y mínimas de las diagonales y de las verticales partiendo del apoyo de la derecha, obtendremos los mismos valores que en el diagrama *(a)* para las diagonales simétricas de las que figuran en éste. Superponiendo ambos diagramas podremos formar una viga en que todas las diagonales trabajen solamente por tensión y las verticales por compresión.

En efecto, la diagonal D_5 de la figura *(b)* podrá suprimirse, puesto que las cargas que ésta resistiría por compresión, las resistirá por tensión la D_1 de la figura *(a)*. En la 2.ª malla conservaremos las dos diagonales D_2 de *(a)* y D_4 de *(b)*; de este modo, las cargas que desarrollarían compresiones en la D_2, producirán tensiones en la D_4, y todas podrán ser contrarrestadas por tensiones de una ú otra de las diagonales, siempre que éstas se doblen antes de desarrollar reacciones por compresión, lo cual sucede si se constituyen con chapas planas exclusivamente. En el mismo caso están las mallas 3.ª y 4.ª, en que deberán conservarse las dos diagonales con una sección capaz de resistir á la máxima tensión que á cada una corresponda; y, finalmente, la diagonal D_5 del diagrama *(a)* puede suprimirse, puesto que siempre obraría por compresión, y las cargas que desarrollarían estas compresiones serán resistidas por tensión por la D_1 del diagrama *(b)*. Así obtendremos el diagrama *(c)*, en que todas las diagonales obrarán sólo por tensión, y su sección debe calcularse para resistir á la máxima que le corresponda en el diagrama simple *(a)* ó *(b)* á que pertenezca dicha diagonal.

En cuanto á los montantes, bastará observar que no podrán estar

sometidos á tensión, puesto que el esfuerzo que han de desarrollar es siempre de signo contrario al de la diagonal inmediata. Por consiguiente, para determinar la sección de un montante, habrá que elegir la *mayor compresión* á que puede estar sometido según los diagramas *(a)* y *(b)*, haciendo caso omiso de las tensiones, que nunca se podrán realizar; ó en otros términos, de las cuatro cifras inscritas frente á cada montante, se elegirá la tensión mínima negativa.

137. INFLUENCIA DE LA POSICIÓN DEL PISO.—En lo que precede se ha supuesto que el piso del puente está situado á la altura de las cabezas superiores de las vigas principales. Si estuviera en la parte inferior, habría que considerar cargados los nudos inferiores. La aplicación de la regla general hace ver inmediatamente la pequeña alteración que esto introduce en el cálculo, y de ella se dará cuenta fácilmente el lector al estudiar el ejemplo numérico en que hemos supuesto que el piso está colocado á la altura de las cabezas inferiores. Sin embargo, se observará que en este caso la relación que sirve para deducir la tensión de una diagonal de la del montante contiguo se verifica entre los montantes y diagonales que concurren en los nudos superiores. Así, en el caso que hemos estudiado, hemos visto que la proyección vertical de la tensión de la diagonal D_1 equilibra á la compresión V_1. Si los pesos actuasen en los vértices inferiores, la compresión V_1 habría de ser equilibrada por la componente vertical de la tensión de D_2.

Si el piso está á una altura intermedia, los nudos estarán descargados. Las tensiones de las barras horizontales y diagonales serán las mismas que en los casos anteriores; pero las de las verticales serán diferentes en la parte superior al piso y en la inferior, puesto que para cada una de estas partes se deducirán las tensiones correspondientes de dos diagonales distintas. Así, en la vertical V_2 la parte superior al piso será la proyección de la tensión de la diagonal D_3, y la inferior, la proyección de la tensión de la diagonal D_2. Claro es que en la práctica se elegirá como sección única la que resulte mayor de las dos.

Pasemos ya al estudio de los ejemplos numéricos.

138. PUENTE DE 35 M. DE LUZ PARA CARRETERA CON 6 M. DE ANCHO Y PISO INFERIOR. SISTEMA SIMPLE DE MONTANTES COMPRIMIDOS Y DIAGO-

NALES TENDIDAS.—Adoptemos para altura de la viga 5 m., que es $\frac{1}{7}$ de la luz, y descomponiéndola en siete mallas, éstas resultarán cuadradas y las diagonales estarán inclinadas á 45° (fig. 114).

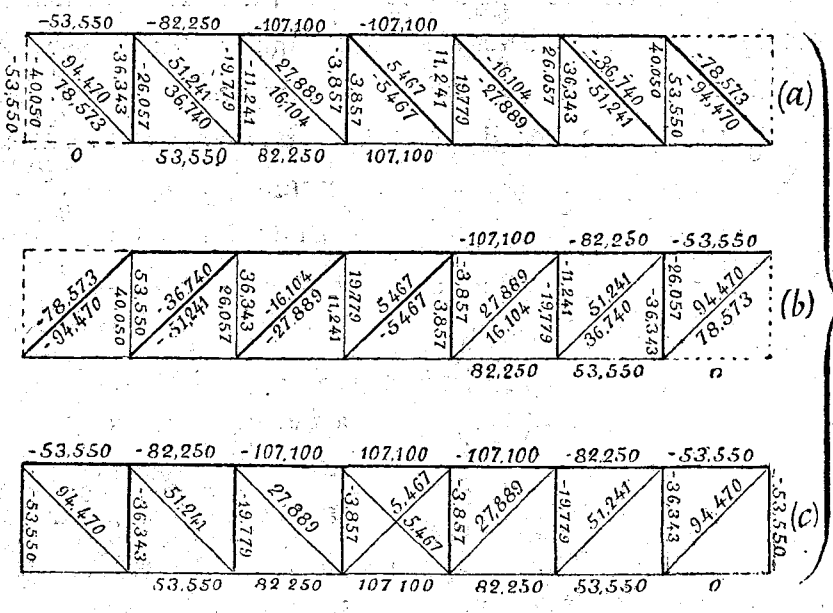


Fig. 114.

Prescindiremos en lo sucesivo del cálculo de los largueros y viguetas para evitar repeticiones, puesto que hemos estudiado ya bastantes ejemplos para que el lector pueda hacer con facilidad estos cálculos.

Supondremos que el piso está situado en la parte inferior de la viga.

Evaluemos la carga permanente, suponiendo, para hacerlo más fácilmente, que los 6 m. de ancho estén afirmados. Admitiendo un espesor medio de 0,35 m. para el firme y la capa de tierra, y un peso de 1.800 kg. por m.^{3}, el peso del firme correspondiente á una viga será

$$0{,}35 \times 3 \times 1.800 = 1.890 \text{ kg. por metro lineal.}$$

El peso de la parte metálica es, según el cuadro del núm. 93, de 257 kg. por m.^{2} de planta, y á una viga corresponderá por metro lineal

$$3 \times 257 = 771 \text{ kg.}$$

El peso permanente, por metro lineal, será

$$1.890 + 771 = 2.661 \text{ kg.}$$

ó redondeando esta cifra para facilitar las operaciones, 2.670 kg.

La carga accidental es, según el cuadro del núm. 96, 300 kg. por metro cuadrado, y por metro lineal de viga será $3 \times 300 = 900$ kg.

Sabemos que para el cálculo de las cabezas debemos suponer cargado todo el puente, y, por consiguiente, la carga por metro lineal será

$$2.670 + 900 = 3.570 \text{ kg.}$$

Siendo el piso inferior, se supondrán concentrados los pesos en los nudos inferiores, y á cada uno corresponderá

$$5 \times 3.570 = 17.850 \text{ kg.}$$

excepto á los dos extremos que recibirán cada uno la mitad de este peso, ó sea 8.925 kg.

139. Cálculo de las cabezas.—Después de haber inscrito junto á cada pieza el nombre de la tensión correspondiente con las notaciones que anteriormente hemos explicado, determinaremos la reacción A del apoyo que será

$$A = \frac{7 \times 17.850}{2} = 62.475 \text{ kg.}$$

y pasaremos á la determinación de S_1. Suponiendo cortada la primera malla por un plano vertical, tomaremos los momentos de las fuerzas que obran á la izquierda con relación al nudo inferior 2, y expresaremos que su suma algebráica es cero. En adelante nos contentaremos con escribir las ecuaciones que determinan las diversas tensiones, indicando el centro de los momentos, y sin hacer ninguna reducción para que el lector pueda comprobarla fácilmente. Para S_1, la ecuación será

$$S_1 \times 5 + 62.475 \times 5 - 8.925 \times 5 = 0$$

de donde se deduce

$$S_1 = -53.550 \text{ kg.}$$

Inmediatamente deducimos

$$I_2 = -S_1 = 53.550 \text{ kg.}$$

y vemos también fácilmente, que

$$I_1 = 0$$

Para el cálculo de S_2, el centro de momentos será el nudo inferior 3, y la ecuación de los momentos

$$S_2 \times 5 + 62.475 \times 10 - 8.925 \times 10 - 17.850 \times 5 = 0$$

de donde se saca

$$S_2 = -82.250 \text{ kg.}$$

é

$$I_3 = -S_2 = 82.250 \text{ kg.}$$

Para calcular S_3, el centro de momentos será el nudo inferior 4, y tendremos

$$S_3 \times 5 + 62.475 \times 15 - 8.925 \times 15 - 17.850 \times 10 - 17.850 \times 5 = 0.$$

Hechas las reducciones resulta

$$S_3 = -107.100 \text{ kg.}$$

é

$$I_4 = -S_3 = 107.100 \text{ kg.}$$

Para determinar S_4, el centro de momentos será el nudo inferior 5, y deduciremos

$$S_4 \times 5 + 62.475 \times 20 - 8.925 \times 20 - 17.850 \times 15 - 17.850 \times 10 - 17.850 \times 5 = 0$$

de donde se sacará

$$S_4 = -107.100 \text{ kg.}$$

El lector habrá observado la ley de formación de las ecuaciones sucesivas, y las simplificaciones de que son susceptibles para obtener rápidamente las tensiones que se buscan.

Fácilmente se explica que resulten iguales los valores de S_3 y S_4,

observando que el primero es el momento flector en el montante 3.°, dividido por la altura de la viga, y el segundo el momento flector en el 4.° montante dividido por la misma altura; y ambos momentos son iguales á causa de la simetría.

No necesitamos continuar el cálculo de las cabezas, pues es evidente que las piezas simétricas de las ya calculadas sufrirán idénticos esfuerzos en la viga *(c)*, conforme á lo que hemos explicado en el núm. 133.

Por lo tanto, podemos ya formar el siguiente cuadro, que resume los esfuerzos correspondientes á las cabezas en las diversas mallas. Este cuadro se refiere al diagrama *(c)* de la viga definitiva.

CABEZA SUPERIOR. — Valores de S.	CABEZA INFERIOR. — Valores de I.
$S_1 = -\ 53.550$	$I_1 = 0$
$S_2 = -\ 82.250$	$I_2 = 53.550$
$S_3 = -\ 107.100$	$I_3 = 82.250$
$S_4 = -\ 107.100$	$I_4 = 107.100$
$S_5 = -\ 107.100$	$I_5 = 82.250$
$S_6 = -\ 82.250$	$I_6 = 53.550$
$S_7 = -\ 53.550$	$I_7 = 0$

140. CÁLCULO DE LAS VERTICALES.—Tenemos que determinar separadamente el esfuerzo correspondiente á la carga permanente y á la carga móvil. El peso que corresponde á cada nudo por la carga permanente es $5 \times 2.670 = 13.350$ kg., y por la carga móvil $5 \times 3 \times 300 = 4.500$ kg., según el cuadro del núm. 96, correspondiente á los esfuerzos cortantes.

El valor $V_0^{máx}$ corresponde al caso en que el tramo esté descargado, y el $V_0^{mín}$ al caso en que esté cargado. En el primer caso, la reacción del apoyo es

$$A = \frac{7 \times 13.350}{2} = 46.725 \text{ kg.}$$

y en el segundo, 62.475 kg., según hemos visto al calcular las cabezas.

Luego, teniendo en cuenta que en el montante obra en sentido contrario de esta reacción la mitad de la carga correspondiente á un nudo, tendremos

$$V_0^{máx} = -46.725 + 6.675 = -40.050$$

$$V_0^{mín} = -62.475 + 8.925 = -53.550$$

Para determinar los valores de $V_1^{máx}$ y $V_1^{mín}$, empezaremos por calcular la parte fija que corresponde á la carga permanente, que designaremos por v_1^{π}. Si cortamos V_1 por un plano paralelo á la diagonal, proyectamos sobre la vertical todas las fuerzas correspondientes á la carga permanente que obran á la izquierda de este plano, y expresamos que su suma es cero, recordando que la reacción del apoyo correspondiente á la carga permanente es 46.725 kg., tendremos

$$-v_1^{\pi} = 46.725 - 6.675 - 13.350 = 26.700 \text{ kg.}$$

$$v_1^{\pi} = -26.700 \text{ kg.}$$

Para determinar el esfuerzo máximo del montante bajo la acción de la carga móvil, esfuerzo que designaremos por $v_1^{máx}$, teniendo en cuenta que el piso es inferior, deberemos suponer cargados los nudos 1 y 2, el primero con 2.250 kg. y el segundo con 4.500.

La correspondiente reacción del apoyo izquierdo $a_1^{máx}$ se hallará tomando momentos con relación al apoyo derecho, y después de dividir la ecuación por l, tendremos

$$a_1^{máx} = 2.250 + \frac{6}{7} \times 4.500 = 6.107 \text{ kg.}$$

Expresando ahora que las proyecciones de las fuerzas que obran á la izquierda de la sección producida en la vertical V_1 por un plano paralelo á la diagonal, se hallan en equilibrio, tendremos

$$v_1^{máx} + 6.107 - 2.250 - 4.500 = 0$$

de donde resulta

$$v_1^{máx} = 643 \text{ kg.}$$

Determinaremos ahora el valor $v_1^{mín}$ correspondiente á la carga móvil que obra sobre todos los vértices situados á la derecha del plano sector, que son los 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Para calcular la reacción del apoyo correspondiente á esta carga, tomaremos momentos con relación al apoyo derecho, y tendremos, llamando á esta reacción $a_1^{mín}$

$$a_1^{mín} = 4.500 \times \frac{5}{7} + 4.500 \times \frac{4}{7} + 4.500 \times \frac{3}{7} + 4.500 \times \frac{2}{7} +$$

$$+ 4.500 \times \frac{1}{7} = \frac{4.500}{7} (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 9.643 \text{ kg.}$$

Expresando ahora el equilibrio entre las fuerzas que obran á la izquierda del plano sector, tendremos

$$v_1^{mín} + 9.643 = 0$$

ó bien

$$v_1^{mín} = - 9.643 \text{ kg.}$$

Sumando el esfuerzo debido á la carga permanente con los valores $v_1^{máx}$ y $v_1^{mín}$ debidos á las cargas accidentales, tendremos los esfuerzos límites á que puede estar sometido el montante V_1, que serán

$$V_1^{máx} = v_1^{\pi} + v_1^{máx} = - 26.700 + 643 = - 26.057 \text{ kg.}$$

$$V_1^{mín} = v_1^{\pi} + v_1^{mín} = - 26.700 - 9.643 = - 36.343 \text{ kg.}$$

Pasemos á la determinación de los esfuerzos correspondientes al montante V_2. El esfuerzo debido á la carga permanente se deducirá de la ecuación

$$v_2^{\pi} + 46.725 - 6.675 - 2 \times 13.350 = 0$$

que dará

$$v_2^{\pi} = - 13.350.$$

Para la determinación de $v_2^{máx}$, los nudos cargados serán 1, 2 y 3, y el valor de la reacción del apoyo $a_2^{máx}$

$$a_2^{máx} = 2.250 + \frac{4.500}{7}(6 + 5) = 9.321 \text{ kg.}$$

Y la ecuación que determina $v_2^{máx}$ será

$$v_2^{máx} + 9.321 - 2.250 - 2 \times 4.500 = 0$$

de donde se deduce

$$v_2^{máx} = 1.929 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_2^{mín}$, se deben suponer cargados los nudos 4, 5, 6, 7 y 8. La reacción del apoyo será

$$a_2^{mín} = \frac{4.500}{7}(4 + 3 + 2 + 1) = 6.429 \text{ kg.}$$

La ecuación que determina $v_2^{mín}$ es

$$v_2^{mín} + 6.429 = 0$$

y el valor buscado

$$v_2^{mín} = - 6.429 \text{ kg.}$$

Se deducen de aquí los valores

$$V_2^{máx} = v_2^{\pi} + v_2^{máx} = - 13.350 + 1.929 = - 11.421 \text{ kg.}$$
$$V_2^{mín} = v_2^{\pi} + v_2^{mín} = - 13.350 - 6.429 = - 19.779 \text{ kg.}$$

Pasemos á determinar los esfuerzos del montante V_3. El valor v_3^{π} vendrá dado por la ecuación

$$v_3^{\pi} + 46.725 - 6.675 - 3 \times 13.350 = 0$$

de la cual se deduce

$$v_3^{\pi} = 0$$

$v_3^{máx}$ se determinará suponiendo cargados los nudos 1, 2, 3 y 4. La reacción del apoyo es

$$a_3^{máx} = 2.250 + \frac{4.500}{7}(6 + 5 + 4) = 11.893 \text{ kg.}$$

La ecuación que determina $v_3^{máx}$

$$v_3^{máx} + 11.893 - 2.250 - 3 \times 4.500 = 0$$

y

$$v_3^{máx} = 3.857 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_3^{mín}$ los nudos cargados son 5, 6, 7 y 8. La reacción del apoyo

$$a_3^{mín} = \frac{4.500}{7} (3 + 2 + 1) = 3.857 \text{ kg.}$$

La ecuación que determina $v_3^{mín}$

$$v_3^{mín} + 3.857 = 0$$

y el valor de esta tensión

$$v_3^{mín} = - 3.857 \text{ kg.}$$

Se deducen los valores

$$V_3^{máx} = v_3^{\pi} + v_3^{máx} = \quad 3.857 \text{ kg.}$$
$$V_3^{mín} = v_3^{\pi} + v_3^{mín} = - 3.857 \text{ kg.}$$

Pasemos al montante V_4. El valor d v_4^{π} se deducirá de la ecuación

$$v_4^{\pi} + 46.725 - 6.675 - 4 \times 13.350 = 0$$

de donde resulta

$$v_4^{\pi} = 13.350.$$

Los nudos cargados, para el cálculo de $v_4^{máx}$, serán 1, 2, 3, 4 y 5. La reacción del apoyo será

$$a_4^{máx} = 2.250 + \frac{4.500}{7} (6 + 5 + 4 + 3) = 13.821 \text{ kg.}$$

La ecuación que da $v_4^{máx}$ es

$$v_4^{máx} + 13.821 - 2.250 - 4 \times 4.500 = 0$$

de donde resulta

$$v_4^{máx} = 6.429 \text{ kg.}$$

Los nudos cargados, para obtener v_4^{min}, son 6, 7 y 8. Tendremos, pues,

$$a_4^{min} = \frac{4.500}{7}(2 + 1) = 1.929 \text{ kg.}$$

y por lo tanto

$$v_4^{min} = -1.929 \text{ kg.}$$

Se deduce de aquí

$$V_4^{máx} = v_4^{\pi} + v_4^{máx} = 13.350 + 6.429 = 19.779 \text{ kg.}$$

$$V_4^{min} = v_4^{\pi} + v_4^{min} = 13.350 - 1.929 = 11.421 \text{ kg.}$$

En el montante V_5 tendremos

$$v_5^{\pi} + 46.725 - 6.675 - 5 \times 13.350 = 0$$

$$v_5^{\pi} = 26.700 \text{ kg.}$$

Los nudos cargados, para el cálculo de $v_5^{máx}$, son 1, 2, 3, 4, 5 y 6; luego

$$a_5^{máx} = 2.250 + \frac{4.500}{7}(6 + 5 + 4 + 3 + 2) = 15.107 \text{ kg.}$$

y la ecuación que determina $v_5^{máx}$, será

$$v_5^{máx} + 15.107 - 2.250 - 5 \times 4.500 = 0$$

y

$$v_5^{máx} = 9.643 \text{ kg.}$$

Para determinar v_5^{min}, los nudos cargados serán 7 y 8. La reacción del apoyo

$$a_5^{min} = \frac{4.500}{7} = 643 \text{ kg.}$$

y, por lo tanto,

$$v_5^{min} = -643 \text{ kg.}$$

Luego

$$V_5^{máx} = v_5^{\pi} + v_5^{máx} = 26.700 + 9.643 = 36.343 \text{ kg.}$$

$$V_5^{mín} = v_5^{\pi} + v_5^{mín} = 26.700 - 643 = 26.057 \text{ kg.}$$

Finalmente, para el montante V_6, tendremos

$$v_6^{\pi} + 46.725 - 6.675 - 6 \times 13.350 = 0$$

de donde resulta

$$v_6^{\pi} = 40.050 \text{ kg.}$$

Supondremos cargados los nudos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 para el cálculo de $v_6^{máx}$, y se obtendrá

$$a_6^{máx} = 2.250 + \frac{4.500}{7}(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 15.750 \text{ kg.}$$

luego

$$v_6^{máx} + 15.750 - 2.250 - 6 \times 4.500 = 0$$

y

$$v_6^{máx} = 13.500.$$

Para la determinación de $v_6^{mín}$, sólo se supondrá cargado el nudo 8. Resultará

$$a_6^{mín} = 0$$

y, por lo tanto,

$$v_6^{mín} = 0.$$

Luego

$$V_6^{máx} = v_6^{\pi} + v_6^{máx} = 40.050 + 13.500 = 53.550 \text{ kg.}$$

$$V_6^{mín} = v_6^{\pi} + v_6^{mín} = 40.050 \text{ kg.}$$

El montante V_7 no se halla en las mismas condiciones que los demás, puesto que recibe directamente la reacción del apoyo; este montante es inútil en el diagrama *(a)*, pero se observa que los esfuerzos que le corresponden en la viga definitiva *(c)* son los mismos que hemos calculado para el V_0, y son ya conocidos.

Podremos ya formar el siguiente cuadro, en que figuran los esfuerzos máximos y mínimos correspondientes á los diversos montantes en el diagrama *(a)*.

VALORES MÁXIMOS. — *Kilogramos.*		VALORES MÍNIMOS. — *Kilogramos.*	
$V_0^{máx}$	= — 40.050	$V_0^{mín}$	= — 53.550
$V_1^{máx}$	= — 26.057	$V_1^{mín}$	= — 36.343
$V_2^{máx}$	= — 11.421	$V_2^{mín}$	= — 19.779
$V_3^{máx}$	= 3.857	$V_3^{mín}$	= — 3.857
$V_4^{máx}$	= 19.779	$V_4^{mín}$	= 11.421
$V_5^{máx}$	= 36.343	$V_5^{mín}$	= 26.057
$V_6^{máx}$	= 53.550	$V_6^{mín}$	= 40.050
$V_7^{máx}$	= 0	$V_7^{mín}$	= 0

141. CÁLCULO DE LAS DIAGONALES.—Deduciremos las tensiones de las diagonales de las correspondientes á los montantes contiguos que concurren en los nudos superiores. Bastará, por consiguiente, dividir el esfuerzo correspondiente al montante por $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ó, lo que es lo mismo, multiplicarlo por el factor numérico 1,41 cambiando el signo al resultado. Recordaremos también que la carga que produce el esfuerzo máximo en el montante corresponde al mínimo en la diagonal, y la que produce el mínimo en el montante desarrolla el máximo en la diagonal; de modo que, del valor de $V_4^{máx}$, por ejemplo, deduciremos el de $D_5^{mín}$, y del de $V_4^{mín}$, el de $D_5^{máx}$.

De esta regla se deducen los valores siguientes:

Cálculo de D_1

$$D_1^{máx} = - \frac{V_0^{mín}}{\cos 45^\circ} = 53.550 \times 1{,}41 = 94.470 \text{ kg.}$$

$$D_1^{mín} = - \frac{V_0^{máx}}{\cos 45^\circ} = 40.050 \times 1{,}41 = 78.573 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_2

$$D_2^{máx} = - \frac{V_1^{min}}{\cos 45^\circ} = 36.343 \times 1{,}41 = 51.241 \text{ kg.}$$

$$D_2^{min} = - \frac{V_0^{máx}}{\cos 45^\circ} = 26.057 \times 1{,}41 = 36.740 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_3

$$D_3^{máx} = - \frac{V_2^{min}}{\cos 45^\circ} = 19.779 \times 1{,}41 = 28.889 \text{ kg.}$$

$$D_3^{min} = - \frac{V_2^{máx}}{\cos 45^\circ} = 11.421 \times 1{,}41 = 16.104 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_4

$$D_4^{máx} = - \frac{V_3^{min}}{\cos 45^\circ} = \quad 3.877 \times 1{,}41 = \quad 5.467 \text{ kg.}$$

$$D_4^{min} = - \frac{V_3^{máx}}{\cos 45^\circ} = - 3.877 \times 1{,}41 = - 5.467 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_5

$$D_5^{máx} = - \frac{V_4^{min}}{\cos 45^\circ} = - 11.421 \times 1{,}41 = - 16.104 \text{ kg.}$$

$$D_5^{min} = - \frac{V_4^{máx}}{\cos 45^\circ} = - 19.779 \times 1{,}41 = - 27.889 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_6

$$D_6^{máx} = - \frac{V_5^{min}}{\cos 45^\circ} = - 26.057 \times 1{,}41 = - 36.740 \text{ kg.}$$

$$D_6^{min} = - \frac{V_5^{máx}}{\cos 45^\circ} = - 36.343 \times 1{,}41 = - 51.241 \text{ kg.}$$

Cálculo de D_7

$$D_7^{máx} = - \frac{V_6^{min}}{\cos 45^\circ} = - 40.050 \times 1{,}41 = - 78.573 \text{ kg.}$$

$$D_7^{min} = - \frac{V_6^{máx}}{\cos 45^\circ} = - 53.550 \times 1{,}41 = - 94.470 \text{ kg.}$$

Tenemos ya calculadas las tensiones máximas y mínimas de todas las diagonales, que resumiremos, como las relativas á las

demás piezas, en el siguiente cuadro, que se refiere al diagrama *(a)*:

VALORES MÁXIMOS. — *Kilogramos.*	VALORES MÍNIMOS. — *Kilogramos.*
$D_1^{máx} = 94.470$	$D_1^{min} = 78.573$
$D_2^{máx} = 51.241$	$D_2^{min} = 36.740$
$D_3^{máx} = 27.889$	$D_3^{min} = 16.104$
$D_4^{máx} = 5.467$	$D_4^{min} = -5.467$
$D_5^{máx} = -16.104$	$D_5^{min} = -27.889$
$D_6^{máx} = -36.740$	$D_6^{min} = -51.241$
$D_7^{máx} = -78.573$	$D_7^{min} = -94.470$

Con el auxilio de los cuadros anteriores formaremos el diagrama *(a)* (fig. 114), en el cual se han inscrito las tensiones correspondientes á las cabezas con sus signos, y para cada montante y cada diagonal, la tensión máxima y la tensión mínima, también con sus signos, distinguiendo así las tensiones de las compresiones.

Es fácil formar inmediatamente el diagrama *(b)* de la misma figura, copiando las tensiones máximas y mínimas correspondientes á los montantes ó diagonales, simétricos, en la figura *(a)*, de los que se consideran; y finalmente, superponiendo ambos diagramas, suprimiendo las diagonales que sufrirían sólo compresiones y los montantes que estarían siempre sometidos á tensión, y eligiendo en los montantes la mayor compresión, y la mayor tensión en las diagonales, obtendremos el diagrama *(c)* con los esfuerzos máximos que han de servir para determinar las secciones de todas las piezas.

En el cuadro siguiente se indican los esfuerzos máximos correspondientes á cada pieza de la viga, y las secciones teóricas que resultan de dividir por 6 dichos esfuerzos, admitiendo como coeficiente de resistencia 6 kg. por mm.^{2}, sin descontar los agujeros de los roblones. Debemos advertir, sin embargo, que las secciones de los montantes así determinadas son provisionales, pues, al componer

Esfuerzos y secciones teóricas de las piezas de la viga.

CABEZA SUPERIOR.		CABEZA INFERIOR.		MONTANTES.		DIAGONALES.	
Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Tensiones — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Tensiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*
$S_1 = 53.500$	8.917	$I_1 = 0$	0	$V_0 = 53.500$	8.917	$D_1 = 94.470$	15.745
$S_2 = 82.250$	13.709	$I_2 = 53.550$	8.917	$V_1 = 36.443$	6.058	$D_2 = 51.241$	8.540
$S_3 = 107.100$	17.850	$I_3 = 82.250$	13.709	$V_2 = 19.779$	3.297	$D_3 = 27.889$	4.648
$S_4 = 107.100$	17.850	$I_4 = 107.100$	17.850	$V_3 = 3.857$	645	$D_4 = 5.467$	912
$S_5 = 107.100$	17.850	$I_5 = 82.250$	13.709	$V_4 = 3.857$	645	»	»
$S_6 = 82.250$	13.709	$I_6 = 53.550$	8.917	$V_5 = 19.779$	3.297	»	»
$S_7 = 53.500$	8.917	$I_7 = 0$	0	$V_6 = 36.343$	6.058	»	»
				$V_7 = 53.500$	8.917	»	»

las secciones prácticas, habrá que tener en cuenta la reducción necesaria del trabajo del hierro para evitar la flexión, con arreglo á las tablas del núm. 13. En la cabeza superior, esta condición es fácil de satisfacer, como veremos.

No entraremos en detalles respecto á la composición de todas las piezas, porque los ejemplos que se han estudiado ya, son suficientes para que el lector se haya hecho cargo de cómo se procede.

142. CÁLCULO DEL ARRIOSTRAMIENTO SUPERIOR.—En el caso particular que nos ocupa habría alguna dificultad práctica para la disposición de las piezas del arriostramiento, pues es necesario dejar una altura libre de 4,50 m., por lo menos, para el paso de los carruajes, y la altura de la viga es sólo de 5 m. Pero, prescindiendo de esta dificultad, vamos á suponer que se enlazan las cabezas superiores frente á los nudos por medio de piezas transversales, y en cada recuadro así formado se colocan las diagonales; y vamos á determinar las secciones de estas piezas para que resistan á la acción del viento, con arreglo á los principios explicados en el capítulo II de la tercera parte.

Para poder calcular la superficie expuesta al viento, necesitamos conocer aproximadamente las secciones de las diversas piezas, ó por lo menos, el ancho que presentarán en el alzado de la viga. Basta un ligero tanteo para comprender que conviene la celosía de pared doble, con objeto de poder formar las diagonales con dobles chapas. Las cabezas serán en forma de **U**, y los montantes podrán ser de forma de doble **T** con alma llena ó de celosía, según la sección necesaria.

Es fácil ver que se pueden formar las cabezas con una ó dos chapas horizontales de 450 mm., dos nervios de 400 y dos hierros de ángulo de $\frac{80 \times 80}{10}$ (fig. 115). Haciendo variar los espesores de las chapas entre 8 y 10 mm. y empleando dos chapas horizontales en la tres mallas del centro, se obtienen con mucha aproximación las secciones necesarias.

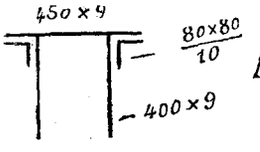


Fig 115.

Por otra parte, la relación de la longitud á la menor dimensión de la sección transversal es $\frac{5}{0{,}40} = 12$

próximamente, y no hay necesidad de rebajar el coeficiente de resistencia para evitar la flexión.

Con objeto de evaluar con exageración la superficie expuesta al viento, admitamos que las diagonales sean dobles chapas de 10 mm. de espesor solamente y de ancho de 0,60, 0,40 y 0,20 m., y para el cálculo de la superficie podemos tomar el término medio, ó sea 0,40 m. Admitiremos que las cabezas de los montantes se formarán con dos hierros de ángulo de 0,10 m. de ala, y el ancho que presentarán á la acción del viento será 0,20 m.

La superficie efectiva de una viga se compondrá, por lo tanto, del modo siguiente:

Cabeza superior.....	$0{,}40 \times 35$	$= 14{,}00$ m.²
Cabeza inferior y piso (ancho 0,60 m.)	$0{,}60 \times 35$	$= 21{,}00$ »
Ocho montantes.....	$8 \times 0{,}20 \times 5$	$= 8{,}00$ »
Ocho diagonales.....	$8 \times 0{,}40 \times \frac{5}{\cos 45^\circ}$	$= 12{,}56$ »
TOTAL.....		$55{,}56$ »

La superficie total dentro del contorno de la viga es $5 \times 37 = 185$ m.²

La superficie libre entre las mallas es $185 - 55{,}56 = 129{,}44$.

Hallaremos la relación $\frac{129{,}44}{185} = 0{,}69$, que hace falta para deducir del cuadro del núm. 101 el coeficiente para la reducción de la superficie efectiva de la 2.ª viga que se presenta á la acción del viento. Vemos que el coeficiente de reducción es 0,70, y, por consiguiente, la superficie que buscamos será

$$55{,}56 + 0{,}70 \times 55{,}56 = 94{,}45$$

ó sea, en números redondos, 95 m.²

Estando cargado el puente, admitiremos que la superficie de los carros expuesta al viento sea de 1 m. de altura por término medio, sin descontar las partes de las vigas y de los carros que se superponen, y la superficie expuesta al viento será

$$95 + 35 = 130 \text{ m.}^2$$

Hemos dicho que el esfuerzo del viento puede ser de 270 kg. por metro cuadrado estando descargado el puente, y de 170 kg. cuando está cargado.

En el primer caso, el esfuerzo total del viento será

$$270 \times 95 = 25.650 \text{ kg.}$$

Y en el segundo caso

$$170 \times 130 = 22.100 \text{ kg.}$$

La primera hipótesis es, pues, la más desfavorable, y el esfuerzo del viento se repartirá por igual (así lo admitiremos por ser desfavorable esta suposición) entre la viga horizontal constituída por el piso y la formada por el arriostramiento superior. Esta última deberá resistir, por lo tanto, un esfuerzo total de $\frac{25.650}{2} = 12.825$ kg.

Le corresponde por metro lineal $\frac{12.825}{35} = 366$ kg., y en cada nudo $366 \times 5 = 1.830$ kg., excepto en los extremos, en que sólo obrará la mitad de esta carga, ó sea 915 kg.

En la figura 116, que es la planta del arriostramiento, se indica

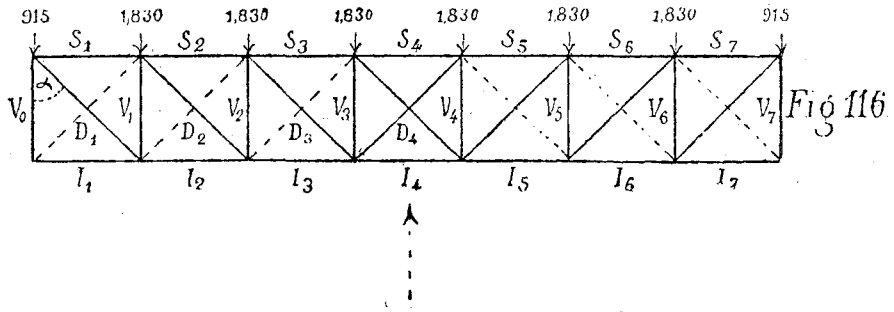


Fig 116

la disposición de la viga; se supone que el viento obra en el sentido indicado por las flechas, y entonces entrarán en acción los montantes, obrando por compresión, y las diagonales indicadas con líneas llenas, que trabajarán por tensión. Las diagonales de puntos son inútiles para resistir á los esfuerzos en el sentido que consideramos, y el conjunto de las piezas que trabajan constituye una viga del sistema Pratt, ó de montantes comprimidos y diagonales tendi-

das. Su cálculo se simplifica en este caso, pues la carga obra uniformemente repartida en todo el tramo.

Se puede admitir para las piezas del arriostramiento un coeficiente de resistencia hasta de 10 kg. por mm.^{2}, en atención á que raras veces desarrollan ese trabajo límite.

Las cabezas de la viga horizontal que nos ocupa son al mismo tiempo las de las vigas principales, y es preciso que su trabajo no llegue á 10 kg. bajo la acción combinada del viento y de la carga.

En general, para luces inferiores á 45 m. no hace falta reforzar las cabezas para resistir á la acción del viento; entre el trabajo máximo que se admite para las mayores cargas, y los 10 kg. admisibles como límite, cuando además obra el viento más desfavorable, hay margen suficiente para que el límite de 10 kg. no sea rebasado. Sin embargo, vamos á determinar los esfuerzos que les corresponden para estudiar el arriostramiento completo, y comprobar en este caso particular la afirmación que precede.

La reacción del apoyo izquierdo es $\frac{12.825}{2} = 6.413$ kg.

Cortando la primera malla por un plano paralelo á V_0 y tomando momentos con relación á *1* tendremos

$$S_1 \times 6 + 6.413 \times 5 - 915 \times 5 = 0$$

de donde

$$S_1 = -4.582 \text{ kg.}$$

Para calcular S_2, tomaremos momentos con relación á *2*, después de haber cortado la segunda malla por un plano paralelo al montante, y tendremos

$$S_2 \times 6 + 6.413 \times 10 - 915 \times 10 - 1.830 \times 5 = 0$$

$$S_2 = -10.689 \text{ kg.}$$

Para calcular S_3, tendremos la ecuación

$$S_3 \times 6 + 6.413 \times 15 - 915 \times 15 - 1.830 \times 10 - 1.830 \times 5 = 0$$

de donde

$$S_3 = -17.820 \text{ kg.}$$

Finalmente, S_4 vendrá dada por la ecuación

$$S_4 \times 6 + 6.413 \times 20 - 915 \times 20 - 1.830\ (15 + 10 + 5) = 0$$
$$S_4 = -27.477 \text{ kg.}$$

Las demás porciones de las cabezas son simétricas de las anteriores, y, por lo tanto, no hay que considerarlas.

Observemos ahora que si dividimos el esfuerzo hallado para S_4 por la sección teórica correspondiente, obtendremos

$$\frac{27.477}{17.850} = 1{,}54 \text{ kg. por mm.}^2$$

Como el trabajo máximo bajo la acción de la carga es 6 kg., el total será 7,54, que, como vemos, es menor que 10 kg.

En S_3 no hay necesidad de cálculo alguno, pues el esfuerzo es menor y la sección la misma.

Para S_2 tendremos

$$\frac{10.689}{13.709} = 0{,}77 \text{ kg.}$$

El trabajo total máximo es 6,77 kg., inferior al que se puede admitir.

En S_1 tendremos

$$\frac{4.582}{8.917} = 0{,}51 \text{ kg.}$$

Y el trabajo más desfavorable será 6,51 kg.

No necesitamos ocuparnos de la cabeza opuesta á la acción del viento, puesto que sabemos que $I_0 = 0$; $I_1 = -S_1$; $I_2 = -S_2$, $I_3 = -S_3$; $I_4 = -S_4$; por consiguiente, el trabajo más desfavorable será igual ó menor que el ya calculado para alguna de las piezas que hemos estudiado (1).

---

(1) Debemos observar que el cálculo se ha efectuado en una hipótesis muy desfavorable que no puede llegar á realizarse. Hemos calculado los esfuerzos producidos por el viento partiendo de un esfuerzo de 25 650 kg. para todo el tramo, el cual corresponde al caso en que el puente está descargado. En realidad, al suponer que el trabajo que produce en las cabezas este esfuerzo se suma con el producido por las cargas, hacemos una hipótesis inadmisi-

No es preciso, por lo tanto, reforzar las cabezas para que puedan resistir á la acción del viento.

Calculemos las piezas transversales, que son los montantes de la viga de arriostramiento.

Fácilmente obtendremos

$$V_0 = \frac{1.830 \times 7}{2} - 915 = 5.490 \text{ kg.}$$

$$V_1 = 5.490 - 1.830 = 3.660 \text{ kg.}$$

$$V_2 = 5.490 - 2 \times 1.830 = 1.830 \text{ kg.}$$

$$V_3 = 5.490 - 3 \times 1.830 = 0$$

Las demás son simétricas de las anteriores y no es menester calcularlas. Dada la longitud de estas piezas comprimidas, deberán presentar una sección perfilada, y como no conviene que la relación de la longitud á la menor dimensión transversal sea muy grande, nos veremos obligados á admitir para el trabajo del hierro una cifra muy moderada. Bastan algunos tanteos, teniendo presentes las tablas del núm. 13, para convencerse de ello.

Las tensiones de las diagonales se deducen fácilmente de los valores que preceden. El ángulo que forman con las riostras transversales es de 39° 45′ y su coseno es 0,768. Tendremos, por lo tanto,

$$D_1 = \frac{V_0}{\cos 39° 45'} = \frac{5.490}{0,768} = 7.149 \text{ kg,}$$

$$D_2 = \frac{V_1}{\cos 39° 45'} = \frac{3.660}{0,768} = 4.767 \text{ kg.}$$

$$D_3 = \frac{V_2}{\cos 39° 45'} = \frac{1.830}{0,768} = 2.383 \text{ kg.}$$

$$D_4 = 0$$

---

ble, y sólo pueden acumularse en las cabezas los esfuerzos debidos á la sobrecarga y los producidos por un viento de 22.100 kg. que corresponde al caso en que el puente está cargado y ha sido determinado á razón de 170 kg. por m.² El esfuerzo total de 25.650 kg. se ha calculado para un viento de 270 kg. por m.², y como se ha hecho notar en el texto, no puede admitirse que el puente esté cargado con la máxima carga, reinando un viento tan fuerte. Además, es muy desfavorable la hipótesis de que la acción del viento se reparta por igual entre el arriostramiento superior y el piso, pues á éste corresponde siempre una parte mucho mayor.

Admitiendo un trabajo de 8 kg. por mm.^{2}, tendremos las siguientes secciones:

Para D_1; $\frac{7.149}{8} = 894$ mm.^{2}, ó sea una chapa de 90 $\times$ 10 que da 900 mm.^{2}

Para D_2; $\frac{4.767}{8} = 596$ mm.^{2}, ó prácticamente 60 $\times$ 10.

Y para D_3; $\frac{2.383}{8} = 298$, que prácticamente habría que aumentar á 50 $\times$ 10, por ejemplo, lo que da un trabajo real muy próximo á 6 kg. Generalmente se adoptan en la práctica secciones mayores que las indicadas.

Las piezas transversales y las diagonales de la malla central resultan con una sección nula teóricamente; mas en previsión de que las cargas no se repartan con la uniformidad que hemos supuesto, no deben suprimirse nunca, adoptando para ellas las menores secciones prácticas calculadas.

En el caso en que el viento obre en sentido opuesto, como indica la flecha de puntos, formarían la viga destinada á resistirlo las cabezas, las piezas transversales y las diagonales indicadas de puntos. En nada hay que modificar lo relativo á las cabezas y á las riostras transversales; pero esta consideración obliga á colocar las diagonales indicadas de puntos, y sus secciones serán evidentemente iguales á las ya calculadas para la otra diagonal de la misma malla.

En la práctica conviene reforzar mucho los montantes extremos y las riostras que los enlazan constituyendo fuertes cuadros de mucha rigidez transversal para que puedan funcionar como verdaderos apoyos de la viga horizontal que acabamos de estudiar.

CAPÍTULO VII.

VIGA RECTA DOBLE DE MONTANTES COMPRIMIDOS Y DIAGONALES ESTIRADAS.

---

143. CÁLCULO DE UNA VIGA RECTA DOBLE DE MONTANTES COMPRIMIDOS Y DIAGONALES ESTIRADAS.—Cuando la luz de la viga excede de ciertos límites, los nudos en que deben actuar los pesos, y en los cuales deben, por consiguiente, insistir las viguetas, se hallan demasiado separados. Conviene entonces aumentar el número de nudos, intercalando otro sistema idéntico al que acabamos de estudiar, con lo cual la separación de los nudos, y, por lo tanto, de las viguetas, se reduce á la mitad.

Supongamos que el diagrama *(c)* de la figura 113 se halle en este caso. Podremos estudiar un nuevo diagrama *(a)* (fig. 117), cuyos

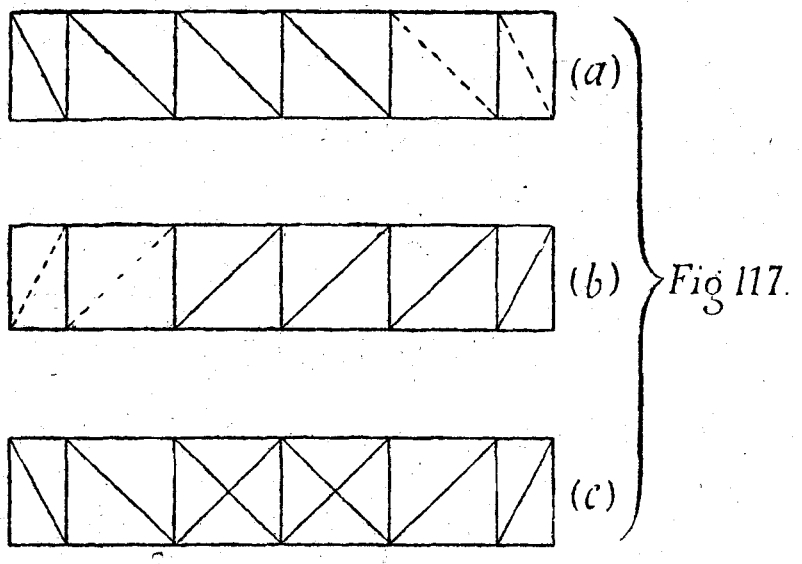
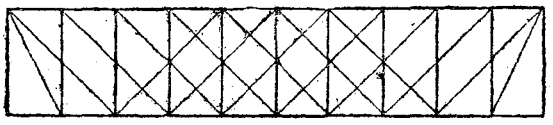


Fig 117.

montantes corresponden á los puntos medios de las mallas del anterior, suponiendo repartidas las cargas por igual entre ambas vigas. Considerando el diagrama *(b)* de la misma figura con las diagonales simétricas, obtendremos, superponiendo estos dos últimos, la viga simple *(c)*, en la cual sólo existen montantes comprimidos y diagonales estiradas. Y, finalmente, si superponemos esta viga á la *(c)* de la figura 113, obtendremos la viga doble (fig. 118), en la cual sólo se conservan montantes comprimidos y diagonales estiradas, cuyos esfuerzos son conocidos.

Fig 118



En cuanto á las cabezas, se observa que cada trozo corresponde á la vez á los dos diagramas elementales, y la tensión que deberá resistir será la suma de las tensiones que corresponden á los dos trozos superpuestos.

En resumen, para calcular una viga de este sistema, basta calcular separadamente las tensiones y compresiones de cada uno de los diagramas *(a)* de la figura 113 y *(a)* de la figura 117, suponiendo las cargas repartidas por igual entre ambos sistemas simples. De ellos se deduce inmediatamente la composición de la viga doble (fig. 118) y las tensiones y compresiones máximas de cada una de sus piezas, que servirán para calcular las secciones necesarias para que resistan en buenas condiciones.

Tal es el principio en que se funda el cálculo de una viga de este sistema, y estudiaremos los detalles haciendo la aplicación numérica á un caso particular.

Supondremos que se trata de un puente para ferrocarril de vía simple normal y de 64 m. de luz.

144. PUENTE PARA FERROCARRIL DE VÍA ÚNICA, DE 64 M. DE LUZ Y PISO SUPERIOR. Empecemos por fijar el trazado de la viga. Adoptaremos una altura de 8 m., que es $\frac{1}{8}$ de la luz, y podremos dividir el diagrama simple en ocho mallas de á 8 m., con lo cual las diagonales quedarán inclinadas á 45°. Trazando los montantes y las diagonales que bajan de izquierda á derecha, obtendremos el diagrama

simple *(a)* de la figura 119, el cual debemos calcular suponiendo concentrada en cada una de las articulaciones superiores la mitad de las cargas que corresponden á la viga definitiva.

Tracemos ahora el diagrama *(b)* con la misma altura, y colocando

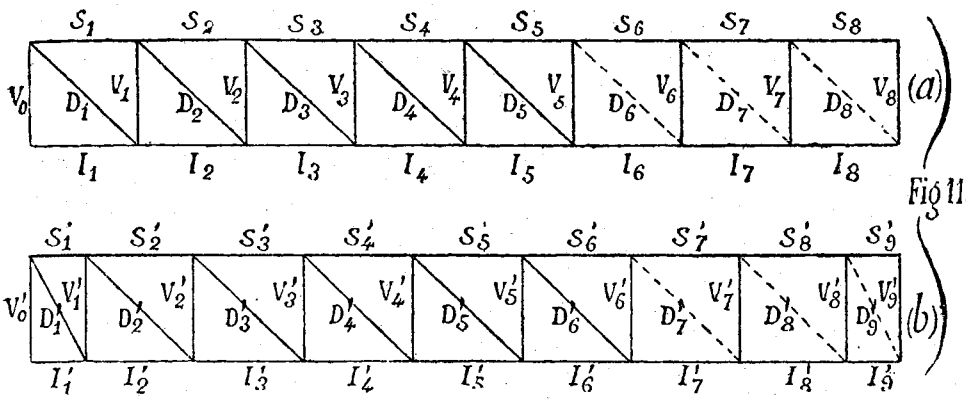


Fig 119

los montantes en los puntos medios de las mallas del anterior. La mitad de las cargas correspondientes á la viga obrará en las articulaciones superiores, y según hemos indicado, bastará calcular las tensiones y compresiones de las piezas de los diagramas *(a)* y *(b)* para conocer todas las necesarias para la composición de la viga que proyectamos.

145. Evaluación de las cargas.—Para determinar la carga permanente, acudiremos al cuadro del núm. 93, el cual da el peso del metro lineal de puente para las luces de 60 y de 65 m., á saber:

Para 60 m.....	2.742 kg.
» 65 ».....	2.965 »

Deduciremos por interpolación el peso correspondiente á la luz de 64 m., que será

$$2.742 + \frac{4}{5}(2.965 - 2.742) = 2.922 \text{ kg.}$$

Corresponderá á cada viga la mitad, ó sea 1.461 kg.

Y en cada nudo obrará un peso de $4 \times 1.461 = 5.844$ kg., teniendo presente que la malla efectiva en la viga compuesta tiene una longitud de 4 m.; esto equivale evidentemente á repartir el peso per-

manente en partes iguales entre los dos diagramas simples *(a)* y *(b)*. Redondeando la cifra anterior para facilitar los cálculos, adoptaremos como carga permanente en cada nudo 5.850 kg.

A los nudos extremos del diagrama *(a)*, corresponderá la mitad de esta carga, ó sea 2.925 kg.

A los extremos del diagrama *(b)*, la cuarta parte de la carga normal en un nudo, ó sea $\frac{1}{4} \times 5.850 = 1.462{,}5$ kg.

Y, finalmente, en los montantes inmediatos del mismo diagrama, en los cuales se concentran los pesos correspondientes á media malla de 8 m. y á media malla de 4 m., corresponderá un peso igual á las tres cuartas partes de un nudo ordinario, ó sea $\frac{3}{4} \times 5.850 =$ 4.387,5 kg.

Determinemos ahora las cargas uniformes que deben considerarse como equivalentes á los trenes de prueba para el cálculo de las cabezas, valiéndonos para ello del cuadro *a* del núm. 95. En este cuadro vemos que, á la luz de 40 m., corresponde una carga de 5.600 kg., y á la de 80 m., de 4.400 kg. Para 64 m., la carga será esta última aumentada en $\frac{16}{40}$ de la diferencia, suponiendo que la carga varía en proporción inversa de la luz entre 40 y 80 m., de modo que la carga por metro lineal será

$$4.400 + \frac{16}{40}(5.600 - 4.400) = 4.880 \text{ kg.}$$

Corresponderá, por lo tanto, á cada viga la mitad, 2.440 kg., y á cada nudo, excepto los extremos, $4 \times 2.440 = 9.760$ kg.

En los nudos extremos del diagrama *(a)* actuará el peso $\frac{9.760}{2} =$ 4.880 kg.

En los extremos de *(b)*, $\frac{9.760}{4} = 2.440$ kg.

Y en los contiguos á los extremos del mismo diagrama, $\frac{3}{4} \times 9.760 =$ 7.320 kg.

Para el cálculo de las cabezas, se ha de suponer la carga móvil extendida á todo el tramo, y, por consiguiente, los pesos correspondientes á los diversos nudos se hallarán sumando las cifras halladas para el peso permanente y para la carga móvil en el mismo nudo.

Así, el peso que actúa en un nudo ordinario será

$$5.850 + 9.760 = 15.610 \text{ kg.}$$

En los nudos extremos del diagrama *(a)* obrará un peso de

$$2.925 + 4.880 = 7.805 \text{ kg.}$$

En los extremos de *(b)*

$$1.462{,}5 + 2.440 = 3.902{,}5 \text{ kg.}$$

Y en los inmediatos á éstos en el mismo diagrama

$$4.385{,}5 + 7.320 = 11.707{,}5 \text{ kg.}$$

146. Cálculo del diagrama *(a)*.—*Cabezas.*—Determinadas ya las cargas, pasaremos al cálculo del diagrama simple *(a)*, y seguiremos la misma marcha que en el ejemplo numérico del capítulo anterior.

Empecemos por el cálculo de las cabezas; estableceremos desde luego las ecuaciones relativas á cada pieza, sin repetir nuevamente para todas ellas los razonamientos necesarios, que fácilmente podrá ya suplir el lector.

La reacción del apoyo, estando cargado todo el tramo, que es la que debemos considerar para calcular las cabezas, es

$$\frac{15.610 \times 8}{2} = 62.440 \text{ kg.}$$

Para calcular S_1, el centro de momentos será el extremo inferior del montante V_1, y la ecuación,

$$S_1 \times 8 + 62.440 \times 8 - 7.805 \times 8 = 0;$$

de donde se deduce

$$S_1 = -54.635 \text{ kg.}$$

Fácilmente veremos que

$$I_1 = 0;$$

y resulta de la ley observada en los casos anteriores, que también se puede comprobar rápidamente, que $S_1 = -I_2$, y, por lo tanto,

$$I_2 = 54.635 \text{ kg.}$$

Para calcular S_2, tomaremos como centro de momentos el extremo inferior del montante V_2, y tendremos

$$S_2 \times 8 + 62.440 \times 16 - 7.805 \times 16 - 15.610 \times 8 = 0$$

de donde resulta

$$S_2 = -93.660 \text{ kg.}; \qquad I_3 = 93.660 \text{ kg.}$$

Tomando por centro de momentos el extremo inferior del montante V_3, escribiremos la ecuación que determinará S_3

$$S_3 \times 8 + 62.440 \times 24 - 7.805 \times 24 - 15.610 \times 16 - 15.610 \times 8 = 0.$$

Reduciendo entre sí los términos segundo y tercero, luego los dos últimos, y dividiendo por 8, se facilitará el cálculo, como se ve á continuación

$$S_3 = -54.635 \times 3 + 15.610\ (2 + 1) = -117.075 \text{ kg.}$$

y

$$I_4 = 117.075 \text{ kg.}$$

Para calcular S_4, tomaremos como centro de momentos el extremo inferior del montante V_4, y tendremos

$$S_4 \times 8 + 62.440 \times 32 - 7.805 \times 32 - 15.610 \times 24 - 15.610 \times 16 - 15.610 \times 8 = 0$$

y simplificando, como en el caso anterior,

$$S_4 = -54.635 \times 4 + 15.610\ (3 + 2 + 1) = -124.880 \text{ kg.}$$

En virtud de la simetría que se obtiene al suprimir las diagonales comprimidas y los montantes tendidos, resultarán iguales los

esfuerzos de las piezas simétricas, y, por lo tanto, no hace falta proseguir el cálculo de las cabezas, pudiéndose escribir desde luego

$$S_5 = S_4 = -124.880 \text{ kg.}$$
$$S_6 = S_3 = -117.075 \text{ »}$$
$$S_7 = S_2 = -93.660 \text{ »}$$
$$S_8 = S_1 = -54.635 \text{ »}$$

Del mismo tendremos

$$I_5 = I_4 = 117.075 \text{ kg.}$$
$$I_6 = I_3 = 93.660 \text{ »}$$
$$I_7 = I_2 = 54.635 \text{ »}$$
$$I_8 = I_1 = 0$$

147. MONTANTES.—Debemos evaluar separadamente, para cada montante, el esfuerzo debido á la carga permanente y los esfuerzos máximo y mínimo debidos á la carga móvil.

Las cargas permanentes que obran en cada nudo son las que hemos determinado anteriormente, y la reacción del apoyo correspondiente á dicha carga será

$$A_\pi = \frac{5.850 \times 8}{2} = 23.400 \text{ kg.}$$

La compresión producida por esta carga en el montante V_0 será

$$v_0^{\pi} = -23.400 \text{ kg.}$$

Para evaluar $v_0^{máx}$, la carga es nula según la regla; luego

$$v_0^{máx} = 0$$

La carga á la cual corresponde $v_0^{mín}$ se extiende á todo el tramo, es decir, á una longitud de 64 m. Según el cuadro *(b)* del núm. 95, corresponde á 80 m. una carga por metro lineal de 4.800 kg., y á 40 m. una de 6.200; deduciremos, por interpolación, para 64 m., teniendo presente que el peso total se reparte entre las dos vigas,

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{16}{40}(6.200 - 4.800)\right] = 2.680 \text{ kg.}$$

Teniendo presente que esta carga por metro lineal se reparte, á su vez, entre los dos diagramas simples, $v_0^{máx}$ será

$$v_0^{máx} = \frac{2.680 \times 32}{2} = 42.880 \text{ kg.}$$

Deduciremos, como siempre, los esfuerzos totales máximo y mínimo que tendrá que resistir el montante V_0, á saber,

$$V_0^{máx} = - 23.400 \text{ kg.}$$
$$V_0^{mín} = - 23.400 - 42.880 = - 66.280 \text{ kg.}$$

Calculemos los esfuerzos del montante V_1. Es fácil ver, recordando que la carga permanente que obra sobre el montante V_0 es 2.925 kg., que la compresión que corresponde á V_1 por la carga permanente está dada por la ecuación

$$v_1^{\pi} + 23.400 - 2.925 = 0$$

de donde

$$v_1^{\pi} = - 20.475 \text{ kg.}$$

Para la determinación de $v_1^{máx}$, se ha de considerar cargado únicamente el montante V_0, ó sea una longitud de 4 m. El cuadro *(b)* da, para esta longitud, como carga por metro lineal,

$$\frac{1}{2}\left[14.000 + \frac{1}{2,5}(18.000 - 14.000)\right] = 7.800 \text{ kg.}$$

Y en el montante extremo V_0 obrará una carga de $2 \times 7.800 = 15.600$ kg.; de donde se deduce que la reacción del apoyo es 15.600 y el valor de $v_0^{máx}$

$$v_0^{máx} = 15.600 - 15.600 = 0$$

Para calcular $v_0^{mín}$, los nudos cargados son todos excepto el del montante del apoyo V_0, ó sea una longitud de 60 m. La carga por metro lineal será, según el cuadro *(b)*,

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{1}{2}(6.200 - 4.800)\right] = 2.750 \text{ kg.}$$

A cada nudo corresponderá $4 \times 2.750 = 11.000$ kg.

Calcularemos la reacción a_1^{min} del apoyo, correspondiente á esta carga,, tomando para ello la ecuación de los momentos con relación al apoyo de la derecha, y tendremos

$$a_1^{min} = \frac{11.000}{64}(56 + 48 + 40 + 32 + 24 + 16 + 8) =$$

$$= \frac{11.000}{8}(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 38.500 \text{ kg.}$$

de donde se deduce

$$v_1^{min} = -38.500 \text{ kg.}$$

Luego

$$V_1^{máx} = -20.475 \text{ kg.}$$

$$V_1^{min} = -20.475 - 38.500 = -58.975 \text{ kg.}$$

Pasemos al montante V_2. Para la carga permanente, tendremos la ecuación

$$v_2^{\pi} + 23.400 - 2.925 - 5.850 = 0$$

de donde se deduce

$$v_2^{\pi} = -14.625 \text{ kg.}$$

Para el cálculo de $v_2^{máx}$, se han de suponer cargados los nudos superiores de los montantes V_0 y V_1, ó sea una longitud de 12 m. A esta longitud corresponde, según el cuadro *(b)*, una carga por metro lineal de

$$\frac{1}{2}\left[8.500 + \frac{3}{5}(10.000 - 8.500)\right] = 4.700 \text{ kg.}$$

En el montante V_0 obrará una carga de $2 \times 4.700 = 9.400$ kg.

Y en el V_1, $4 \times 4.700 = 18.800$ kg.

Determinaremos la reacción $a_2^{máx}$, del apoyo izquierdo, por medio de la ecuación de los momentos con relación al apoyo derecho, que será

$$a_2^{máx} = 9.400 + \frac{7}{8} \times 18.800 = 25.850 \text{ kg.}$$

y escribiendo la ecuación de equilibrio de las proyecciones verticales de las fuerzas que obran á la izquierda de V_2, tendremos

$$v_2^{máx} + 25.850 - 9.400 - 18.800 = 0$$

de donde se deduce

$$v_2^{máx} = + 2.350.$$

Para el cálculo de $v_2^{mín}$, los montantes cargados serán el V_2 y todos los situados á la derecha de éste, ó sea una longitud 52 m. La carga por metro lineal que se deduce del cuadro *(b)* es

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{28}{40}(6.200 - 4.800)\right] = 2.890 \text{ kg.}$$

y en cada nudo obrará un peso de $4 \times 2.890 = 11.560$ kg.

Se deduce, escribiendo la ecuación de los momentos con relación al apoyo derecho, despejando la reacción del apoyo izquierdo, y dividiendo por 8 el numerador y el denominador

$$a_2^{mín} = \frac{11.560}{8}(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 30.245 \text{ kg.}$$

de donde resulta

$$v_2^{mín} = - 30.245 \text{ kg.}$$

Y finalmente

$$V_2^{máx} = - 14.625 + 2.350 = - 12.275 \text{ kg.}$$
$$V_2^{mín} = - 14.625 - 30.245 = - 44.870 \text{ kg.}$$

Estudiemos el montante V_3. El esfuerzo debido á la carga permanente resultará de la ecuación

$$v_3^{\pi} + 23.400 - 2.925 - 2 \times 5.850 = 0$$

de donde se saca

$$v_3^{\pi} = - 8.875 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_3^{máx}$, supondremos cargados los montantes V_0, V_1 y

V_2, lo que equivale á una longitud de viga de 20 m. A esta longitud corresponde, según el cuadro *(b)*, una carga por metro lineal de

$$\frac{1}{2} \times 7.600 = 3.800 \text{ kg.}$$

En el montante V_0, obrará un peso de $2 \times 3.800 = 7.600$ kg., y en los otros dos, un peso de $4 \times 3.800 = 15.200$ kg. en cada uno. Se deduce de aquí la reacción del apoyo $a_3^{máx}$, que será

$$a_3^{máx} = 7.600 + \frac{15.200}{8} (7 + 6) = 32.300 \text{ kg.}$$

Y deduciremos $v_3^{máx}$ de la ecuación

$$v_3^{máx} + 32.300 - 7.600 - 2 \times 15.200 = 0$$

que da

$$v_3^{máx} = 5.700 \text{ kg.}$$

Para determinar $v_3^{mín}$, se supondrán cargados los montantes V_3 á V_8, ambos inclusive, ó sea una longitud de 44 m., y á ésta corresponde, según el cuadro *(b)*, una carga por metro lineal de

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{36}{40} (6.200 - 4.800)\right] = 3.030 \text{ kg.}$$

En cada nudo obrará el peso $4 \times 3.030 = 12.120$ kg., y la reacción del apoyo, que se obtendrá como siempre, será

$$a_3^{mín} = \frac{12.120}{8} (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 22.725 \text{ kg.}$$

de donde resulta

$$v_3^{mín} = - 22.725 \text{ kg.}$$

Y por fin

$$V_3^{máx} = - 8.875 + 5.700 = - 3.175 \text{ kg.}$$

$$V_3^{mín} = - 8.875 - 22.725 = - 31.600 \text{ kg.}$$

Calculemos, siguiendo la misma marcha, los esfuerzos del montante V_4.

Para determinar el debido á la carga permanente, tendremos la ecuación

$$v_4^{\pi} + 23.400 - 2.925 - 3 \times 5.850 = 0$$

de donde se saca

$$v_4^{\pi} = - 2.925 \text{ kg.}$$

Para la determinación de $v_4^{máx}$, se suponen cargados los montantes V_0, V_1, V_2 y V_3, ó sea una longitud de 28 m., á la que corresponde, según el cuadro *(b)*, la carga por metro lineal

$$\frac{1}{2}\left[6.200 + \frac{12}{20}\,(7.600 - 6.200)\right] = 3.520 \text{ kg.}$$

Corresponderá á los montantes V_1, V_2 y V_3 una carga de

$$4 \times 3.520 = 14.080 \text{ kg.} \quad \text{y al } V_0, \quad 2 \times 3.520 = 7.040 \text{ kg.}$$

La reacción del apoyo correspondiente á esta carga será

$$a_4^{máx} = 7.040 + \frac{14.080}{8}\,(7 + 6 + 5) = 38.720 \text{ kg.}$$

Escribiremos la ecuación

$$v_4^{máx} + 38.720 - 7.040 - 3 \times 14.080 = 0$$

y deduciremos

$$v_4^{máx} = + 10.560 \text{ kg.}$$

Para determinar $v_4^{mín}$, se suponen cargados los montantes V_4 á V_8, ó sea una longitud de 36 m., á la que corresponde por metro lineal

$$\frac{1}{2}\left[6.200 + \frac{1}{5}\,(7.600 - 6.200)\right] = 3.240 \text{ kg.}$$

A cada nudo corresponderá $4 \times 3.240 = 12.960$ kg.
Se deducirá, como de ordinario,

$$a_4^{mín} = \frac{12.960}{8}\,(4 + 3 + 2 + 1) = 16.200 \text{ kg.}$$

Y, por lo tanto,

$$v_4^{mín} = - 16.200 \text{ kg.}$$

Tendremos, finalmente

$$V_4^{máx} = - 2.935 + 10.560 = + 7.635 \text{ kg.}$$
$$V_4^{mín} = - 2.925 - 16.200 = - 19.125 \text{ kg.}$$

Continuemos, calculando los esfuerzos del montante V_5. La parte debida á la carga permanente vendrá dada por la ecuación

$$v_5^{\pi} + 23.400 - 2.925 - 4 \times 5.850 = 0$$

de donde

$$v_5^{\pi} = 2.925 \text{ kg.}$$

La longitud cargada para el cálculo de $v_5^{máx}$ es la correspondiente á los montantes V_0 á V_4, ó sea 36 m. Las cargas son las mismas que en el caso anterior y tendremos

$$a_5^{máx} = 6.480 + \frac{12.960}{8} (7 + 6 + 5 + 4) = 42.120 \text{ kg.}$$

Determinaremos $v_5^{máx}$ por la ecuación

$$v_5^{máx} + 42.120 - 6.480 - 4 \times 12.960 = 0$$

de donde se deduce

$$v_5^{máx} = 16.200 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_5^{mín}$, la parte cargada es desde el montante V_5 al V_8, ó sea una longitud de 28 m., á la que corresponde en cada nudo un peso de 14.080 kg., según hemos visto al calcular el montante que precede. Se deduce para $a_5^{mín}$ el valor

$$a_5^{mín} = \frac{14.080}{8} (3 + 2 + 1) = 10.560 \text{ kg.}$$

y

$$v_5^{mín} = - 10.560 \text{ kg.}$$

Y sumando los esfuerzos debidos á la carga permanente con los producidos por las cargas móviles

$$V_5^{máx} = 2.925 + 16.200 = \quad 19.125 \text{ kg.}$$
$$V_5^{mín} = 2.925 - 10.560 = -\ 7.635 \text{ kg.}$$

Veamos los esfuerzos que corresponden á V_6. Para la carga permanente, tendremos la ecuación

$$v_6^{\pi} + 23.400 - 2.925 - 5 \times 5.850 = 0$$

Y, por consiguiente,

$$v_6^{\pi} = 8.775 \text{ kg.}$$

Los nudos cargados, para el cálculo de $v_6^{máx}$, comprenden una longitud de 44 m., y hemos visto que á esta longitud corresponde una carga de 12.120 kg. en cada nudo, excepto el último que sostendrá un peso de 6.060 kg. Se deduce

$$a_6^{máx} = 6.060 + \frac{12.120}{8}(7 + 6 + 5 + 4 + 3) = 43.935 \text{ kg.}$$

y la ecuación en $v_6^{máx}$ será

$$v_6^{máx} = 43.935 - 6.060 - 5 \times 12.120 = 0$$

de donde resulta

$$v_6^{máx} = 22.724 \text{ kg.}$$

Para èl cálculo de $v_6^{mín}$, la longitud cargada es 20 m., y la carga de cada nudo 15.200 kg. Resulta para $a_6^{mín}$ el valor

$$a_6^{mín} = \frac{15.200}{8}(2 + 1) = 5.700 \text{ kg.}$$

Y, por consiguiente,

$$v_6^{mín} = -\ 5.700 \text{ kg.}$$

Se deduce de aquí

$$V_6^{máx} = 8.775 + 22.724 = 31.499 \text{ kg.}$$
$$V_6^{mín} = 8.775 - 5.700 = 3.075 \text{ kg.}$$

Los resultados que preceden prueban que este montante no sufre más que tensiones en el diagrama simple *(a)*, y, por lo tanto, es inútil proseguir el cálculo, puesto que este montante y los situados á la derecha se han de suprimir, en cuanto líneas del diagrama *(a)*, siendo sustituídos por los simétricos que están sujetos á compresión.

148. DIAGONALES.—El cálculo de las tensiones máximas de las diagonales se reduce, según sabemos, á dividir por el coseno del ángulo correspondiente las mínimas de los montantes contiguos que concurren en los nudos inferiores. Podemos, por lo tanto, escribir inmediatamente, y calcular dichas tensiones máximas.

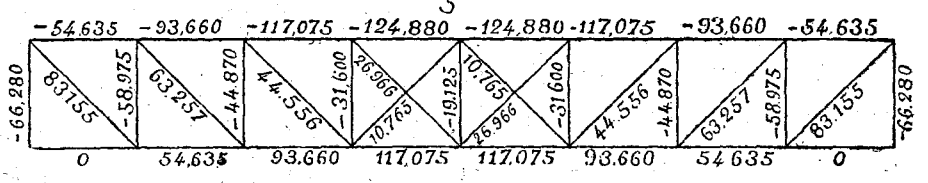
$$D_1^{máx} = -\frac{V_1^{mín}}{\cos 45^\circ} = 58.975 \times 1{,}41 = 83.155 \text{ kg.}$$
$$D_2^{máx} = -\frac{V_2^{mín}}{\cos 45^\circ} = 44.870 \times 1{,}41 = 63.257 \text{ »}$$
$$D_3^{máx} = -\frac{V_3^{mín}}{\cos 45^\circ} = 31.600 \times 1{,}41 = 44.556 \text{ »}$$
$$D_4^{máx} = -\frac{V_4^{mín}}{\cos 45^\circ} = 19.125 \times 1{,}41 = 26.966 \text{ »}$$
$$D_5^{máx} = -\frac{V_5^{mín}}{\cos 45^\circ} = 7.635 \times 1{,}41 = 10.765 \text{ »}$$

Las demás diagonales del diagrama *(a)* sólo sufren compresiones, y, por lo tanto, no hay necesidad de calcularlas, porque se han de suprimir en la viga compuesta que proyectamos.

Conocidos todos los esfuerzos de las piezas del diagrama *(a)* formaremos, como en el capítulo precedente, el diagrama con las diagonales simétricas, y de su superposición con el *(a)* resultará el de la figura 120, en que se indican los esfuerzos máximos que sirven para el cálculo de las secciones.

En el cuadro siguiente se resumen dichos esfuerzos con las secciones teóricas que resultan de dividir éstos por el coeficiente de resistencia, que suponemos de 7 kg. por mm.^{2}, no descontando los

Fig 120



agujeros de los roblones. Haremos respecto á las secciones teóricas de los montantes la misma salvedad que en el capítulo anterior, observando que dichas secciones son provisionales, y que, para fijar las definitivas, habrá que tener en cuenta la relación de la longitud á la menor dimensión de la sección, y deducir del cuadro del núm. 13 el coeficiente de resistencia que debe adoptarse.

Esfuerzos y secciones teóricas de las piezas de la viga de la figura 120.

CABEZA SUPERIOR.		CABEZA INFERIOR.		MONTANTES.		DIAGONALES.	
Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milim. cuadr.*	Tensiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milim. cuadr.*	Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milim. cuadr.*	Tensiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milim cuadr.*
				$V_0 = 66.280$	9.470		
$S_1 = -$ 54.635	7.805	$I_1 = 0$	0	$V_1 = 58.975$	8.425	$D_1 = 83.155$	11.880
$S_2 = -$ 93.660	13.380	$I_2 = 54.635$	7.805	$V_2 = 44.870$	6.410	$D_2 = 63.257$	9.037
$S_3 = -$ 117.075	16.725	$I_3 = 93.660$	13.380	$V_3 = 31.600$	4.514	$D_3 = 44.556$	6.365
$S_4 = -$ 124.880	17.840	$I_4 = 117.075$	16.725	$V_4 = 19.125$	2.732	$D_4 = 26.966$	3.852
$S_5 = -$ 124.880	17.840	$I_5 = 117.075$	16.725	$V_5 = 31.600$	4.514	$D_5 = 10.765$	1.538
$S_6 = -$ 117.075	16.725	$I_6 = 93.660$	13.380	$V_6 = 44.870$	6.410	»	»
$S_7 = -$ 93.660	13.380	$I_7 = 54.635$	7.805	$V_7 = 58.975$	8.425	»	»
$S_8 = -$ 54.635	7.805	$I_8 = 0$	0	$V_8 = 66.280$	9.470	»	»

149. CÁLCULO DEL DIAGRAMA *(b)*.—Para el cálculo de las cabezas, la carga uniformemente repartida por metro lineal en todo el tramo es la misma que hemos empleado al calcular las cabezas con el diagrama *(a)*. Recordaremos que los pesos que obran en el primero y segundo montante son 3.902,5 kg. y 11.707,5 kg. respectivamente.

La reacción del apoyo será

$$3 \times 15.610 + 11.707,5 + 3.902,5 = 62.440 \text{ kg.}$$

Calcularemos S_1', tomando la ecuación de los momentos de las fuerzas que actúan á la izquierda de V_1' con relación al extremo inferior de este montante. La ecuación será

$$S_1' \times 8 + 62.440 \times 4 - 3.902,5 \times 4 = 0$$

de donde

$$S_1' = - 29.269 \text{ kg.}$$

Se ve inmediatamente que

$$I_1' = 0.$$

Del mismo modo, tomando momentos con relación al extremo inferior del montante V_2', tendremos

$$S_2' \times 8 + 62.440 \times 12 - 3.902,5 \times 12 - 15.610 \times 8 = 0$$

De donde se deduce

$$S_2' = - 72.196 \text{ kg.}$$

Tendremos también

$$I_3' = 72.196 \text{ kg.}$$

Pero convendrá calcular directamente la tensión I_2' por razón de la forma especial que afecta la primera malla.

Para ello, tomaremos momentos con relación al extremo superior de V_1', y tendremos la ecuación

$$- I_2' \times 8 + 62.440 \times 4 - 3.905,5 \times 4 = 0$$

de donde

$$I_2' = 29.269 \text{ kg.}$$

Vemos que sigue verificándose la misma ley que en las demás

mallas, resultando este valor igual y contrario al de S_2'. Podía haberse previsto este resultado, observando que ambas tensiones se obtienen dividiendo por la altura de la viga el momento flector en el montante V_1'.

Para calcular S_3', el centro de momentos será la extremidad inferior del montante V_3' y la ecuación será

$$S_3' \times 8 + 62.440 \times 20 - 3.902{,}5 \times 20 - 15.610\ (16 + 8) = 0$$

la cual dará

$$S_3' = - 99.513 \text{ kg.}$$

Y se deduce de aquí

$$I_4' = 99.513 \text{ kg.}$$

S_4' se determinará por la ecuación de los momentos con relación al extremo inferior de V_4', á saber,

$$S_4' \times 8 + 62.440 \times 28 - 3.902{,}5 \times 28 - 15.610\ (24 + 16 + 8) = 0$$

de donde resulta

$$S_4' = - 111.220 \text{ kg.}$$

y, por lo tanto,

$$I_5' = 111.220 \text{ kg.}$$

Es inútil calcular S_5', que será igual á S_3'. En efecto, S_4' es el momento flector en V_4' dividido por la altura de la viga, y S_5', el momento flector en V_5' dividido por la misma altura; y ambos momentos son iguales á causa de la simetría de las cargas.

Luego

$$S_5' = S_4' = - 111.200 \text{ kg.}$$

A causa de la simetría podremos evitar el cálculo de las demás piezas de las cabezas, y escribir inmediatamente

$$\begin{aligned}
S_6' &= S_3' = - 99.513 \text{ kg.} \\
S_7' &= S_2' = - 72.196 \text{ »} \\
S_8' &= S_1' = - 29.269 \text{ »} \\
I_6' &= I_4' = 99.513 \text{ »} \\
I_7' &= I_3' = 72.196 \text{ »} \\
I_8' &= I_2' = 29.269 \text{ »} \\
I_9' &= I_1' = 0 \text{ »}
\end{aligned}$$

150. CÁLCULO DE LOS MONTANTES.—Seguiremos la misma marcha que al calcular los montantes del diagrama *(a)*, teniendo presentes las pequeñas variaciones que introduce la circunstancia de existir en el que nos ocupa dos medias mallas en los extremos.

Para calcular $V_0'^{máx}$, habremos de suponer todo el tramo descargado, y, por lo tanto, $V_0'^{máx}$ será la reacción del apoyo cuando obra sola la carga permanente, es decir,

$$V_0'^{máx} = -23.400 \text{ kg.}$$

lo mismo que en el diagrama *(a)*.

Para el cálculo de $V_0'^{mín}$, todo el tramo está cargado. A la longitud de 64 m. corresponde, según el cuadro *(b)*, la carga por metro lineal

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{16}{40}\,(6.200 - 4.800)\right] = 2.680 \text{ kg.}$$

La reacción correspondiente del apoyo será

$$\frac{2.680 \times 64}{4} = 42.880 \text{ kg.}$$

teniendo presente que á la viga simple *(b)* corresponde sólo la mitad de la carga total.

Luego

$$V_0'^{mín} = -23.400 - 42.880 = -66.280 \text{ kg.}$$

El esfuerzo correspondiente á V_1' por efecto de la carga permanente se deducirá de la ecuación

$$v_1'^{\pi} + 23.400 - \frac{5.850}{4} = 0$$

de donde resulta

$$v_1'^{\pi} = -21.938 \text{ kg.}$$

$v_1'^{máx}$ se determinará suponiendo cargado el nudo 1', ó sea una longitud de 2 m. La carga por metro lineal de viga es de 10.000 kg., y para el diagrama *(b)*, 5.000 kg.; resulta la reacción del apoyo

$$a_1'^{máx} = 5.000 \text{ kg.}$$

y $v_1'^{máx}$ se deducirá de la ecuación

$$v_1'^{máx} + 5.000 - 5.000 = 0$$

de donde resulta

$$v_1'^{máx} = 0.$$

Para determinar $v_1'^{mín}$, se suponen cargados los montantes V_1' á V_9', ó sea una longitud de 62 m. La carga por metro lineal es

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{18}{40}(6.200 - 4.800)\right] = 2.715 \text{ kg.}$$

En cada nudo obrará un peso de $4 \times 2.715 = 10.860$ kg., y en el montante V_8', $\frac{3}{4} \times 10.860 = 8.145$ kg. La reacción del apoyo será

$$a_1'^{mín} = \frac{10.860}{64}(60 + 52 + 44 + 36 + 28 + 20 + 12) +$$

$$+ 8.145 \times \frac{4}{64} = 43.222 \text{ kg.}$$

Luego

$$v_1'^{mín} = - 43.222 \text{ kg.}$$

Y, por lo tanto,

$$V_1'^{máx} = - 21.938 \text{ kg.}$$

$$V_1'^{mín} = - 21.938 - 43.222 = - 65.160 \text{ kg.}$$

Calcularemos ahora los esfuerzos que ha de sufrir el montante V_2'. Para la carga permanente, tendremos la ecuación

$$v_1'^{\pi} + 23.400 - 1.462,5 - 4.387,5 = 0$$

de donde resulta

$$v_2'^{\pi} = - 17.550 \text{ kg.}$$

Para determinar $v_2'^{máx}$, se han de suponer cargados los montantes V_0' y V_1', ó sea una longitud de 8 m. La carga por metro lineal es

$$\frac{1}{2}\left[10.000 + \frac{2}{5}(14.000 - 10.000)\right] = 5.800 \text{ kg.}$$

En el montante extremo obrará el peso 5.800 kg., y en el montante V_1', $3 \times 5.800 = 17.400$ kg.

La reacción del apoyo será

$$a_2'^{máx} = 5.800 + \frac{17.400}{64} \times 60 = 22.120 \text{ kg.}$$

y $v_1'^{máx}$ vendrá dado por la ecuación

$$v_2'^{máx} + 22.120 - 5.800 - 17.400 = 0$$

de donde resulta

$$v_2'^{máx} = + 1.080 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_2'^{mín}$, los montantes cargados serán los V_2' á V_9', ambos inclusive, lo que equivale á una longitud de 56 m.

La carga por metro lineal será

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{24}{40}(6.200 - 4.800)\right] = 2.820 \text{ kg.}$$

En los nudos obrará una carga de $4 \times 2.820 = 11.280$ kg., y en el penúltimo de la derecha, $\frac{3}{4} \times 11.280 = 8.460$ kg.

La reacción del apoyo será

$$a_2'^{mín} = \frac{11.280}{64}(52 + 44 + 36 + 28 + 20 + 12) + 8.460 \times \frac{4}{64} =$$

$$= \frac{11.280}{32}(26 + 22 + 18 + 14 + 10 + 6) + 8.460 \times \frac{1}{16} = 34.416 \text{ kg.}$$

Se deduce de aquí

$$v_2'^{mín} = - 34.416 \text{ kg.}$$

Y, por lo tanto,

$$V_2'^{máx} = - 17.550 + 1.080 = - 16.470 \text{ kg.}$$

$$V_2'^{mín} = - 17.550 - 34.416 = - 51.966 \text{ kg.}$$

Pasando al estudio de los esfuerzos que corresponden al montante

V_3', tendremos el relativo á la carga permanente por medio de la ecuación

$$v_3'^{\pi} + 23.400 - 1.462{,}5 - 4.387{,}5 - 5.850 = 0$$

de donde se saca

$$v_3'^{\pi} = -11.700 \text{ kg.}$$

$v_3'^{máx}$ se calculará suponiendo cargados los montantes V_0', V_1' y V_2'; corresponde una longitud de 16 m., y la carga por metro lineal será

$$\frac{1}{2}\left[7.600 + \frac{4}{5}(8.500 - 7.600)\right] = 4.160 \text{ kg.}$$

En el montante V_0' actuará el peso 4.160 kg.

En V_1', la carga será de $3 \times 4.160 = 12.480$ kg. y en V_2', $4 \times 4.160 = 16.640$ kg.

La reacción del apoyo correspondiente á esta carga, será

$$a_3'^{máx} = 4.160 + 12.480 \times \frac{60}{64} + 16.640 \times \frac{52}{64} = 29.380 \text{ kg.}$$

Se deducirá la ecuación en $v_3'^{máx}$, que es la siguiente:

$$v_3'^{max} + 29.380 - 4.160 - 12.480 - 16.640 = 0$$

de donde resulta

$$v_3'^{máx} = 3.900 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_3'^{min}$, se suponen cargados los montantes V_3' á V_9', longitud de 48 m. Corresponde por metro lineal la carga

$$\frac{1}{2}\left[4.800 + \frac{32}{40}(6.200 - 4.800)\right] = 2.910 \text{ kg.}$$

En cada uno de los montantes V_3' á V_8' actuará un peso de $4 \times 2.910 = 11.640$ kg. y en el V_8', $3 \times 2.910 = 8.730$ kg.

Se calcula la reacción del apoyo para esta carga,

$$a_3'^{min} = \frac{11.640}{64}(44 + 36 + 28 + 20 + 12) + 8.730 \times \frac{4}{64} = 26.028 \text{ kg.}$$

Se deduce de aquí

$$v_3'^{mín} = -\ 26.028 \text{ kg.}$$

Y, finalmente,

$$V_3'^{máx} = -\ 11.700 + \ 3.900 = -\ 7.800 \text{ kg.}$$

$$V_3'^{mín} = -\ 11.700 - 26.028 = -\ 37.728 \text{ kg.}$$

Calculemos los esfuerzos del montante V_4'. Para la parte que corresponde á la carga permanente, tendremos la ecuación

$$v_4'^{\pi} + 23.400 - 1.462{,}5 - 4.387{,}5 - 2 \times 5.850 = 0$$

de donde deduciremos

$$v_4'^{\pi} = -\ 5.850.$$

Para el cálculo de $v_4'^{máx}$, se suponen cargados los montantes V_0', V_1', V_2' y V_3', ó sea una longitud de 24 m. La carga por metro lineal correspondiente, es

$$\frac{1}{2}\left[6.200 + \frac{16}{20}\,(7.600 - 6.200)\right] = 3.660 \text{ kg.}$$

La carga en V_0' será 3.660 kg.

En V_1' actuará el peso $3 \times 3.660 = 10.980$ kg.

En V_2' y V_3', $4 \times 3.660 = 14.640$ kg.

La reacción del apoyo correspondiente á esta carga será

$$a_4'^{máx} = 3.660 + 10.980 \times \frac{60}{64} + \frac{14.640}{64}\,(52 + 44) = 35.886 \text{ kg.}$$

Escribiremos la ecuación en $v_4'^{máx}$, á saber,

$$v_4'^{máx} + 35.886 - 3.660 - 10.980 - 2 \times 14.640 = 0$$

y deduciremos

$$v_4'^{máx} = 8.034 \text{ kg.}$$

Se calculará $v_4'^{mín}$, suponiendo cargados los montantes V_4' á V_9', longitud 40 m. La carga por metro lineal es $\frac{1}{2} \times 6.200 = 3.100$ kg.

En los montantes V_4' á V_7' actuará un peso de $4 \times 3.100 = 12.400$ kg.

Y en el V_8', $3 \times 3.100 = 9.300$ kg.

Se deduce la reacción del apoyo

$$a_1'^{mín} = \frac{12.400}{64}(36 + 28 + 20 + 12) + 9.300 \times \frac{4}{64} = 19.205 \text{ kg.}$$

Y el valor de $v_4'^{mín}$ será

$$v_4'^{mín} = -19.205 \text{ kg.}$$

Luego tendremos

$$V_4'^{máx} = -5.850 + 8.034 = +2.184 \text{ kg.}$$
$$V_4'^{mín} = -5.850 - 19.205 = -25.055 \text{ kg.}$$

Vemos que el esfuerzo máximo es ya una tensión.

Estudiemos el montante V_5'. El esfuerzo correspondiente á la carga permanente vendrá dado por la ecuación

$$v_5'^{\pi} + 23.400 - 1.462{,}5 - 4.387{,}5 - 3 \times 5.850 = 0$$

Y será

$$v_5'^{\pi} = 0.$$

Para calcular $v_5'^{máx}$, se deben considerar cargados los montantes V_0' á V_4', ó sea una longitud de 32 m., á la cual corresponde, por metro lineal, una carga de

$$\frac{1}{2}\left[6.200 + \frac{8}{20}(7.600 - 6.200)\right] = 3.380 \text{ kg.}$$

En V_0' cargará un peso de 3.380 kg.

En V_1', $3 \times 3.380 = 10.140$ kg.

Y en los demás montantes, V_2', V_3' y V_4', $4 \times 3.380 = 13.520$ kg.

La reacción del apoyo será

$$a_5'^{máx} = 3.380 + 10.140 \times \frac{60}{64} + \frac{13.520}{64}(52 + 44 + 36) = 40.760 \text{ kg.}$$

La ecuación que determina $v_5'^{máx}$ se escribirá

$$v_5'^{máx} + 40.760 - 3.380 - 10.140 - 3 \times 13.520 = 0$$

de donde se deduce

$$v_5'^{máx} = 13.320 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_5'^{mín}$, los montantes cargados serán los V_5' á V_9', sea, 32 m. de longitud. Las cargas en los nudos son iguales á la anteriores, á saber, 13.520 kg. en los montantes V_5', V_6' y V_7'; 10.140 kg. en V_8'.

La reacción del apoyo será

$$a_5'^{mín} = \frac{13.520}{64}(28 + 20 + 12) + 10.140 \times \frac{4}{64} = -13.320 \text{ kg}$$

de donde resulta

$$v_5'^{mín} = -13.320 \text{ kg.}$$

Pasemos á calcular los esfuerzos de V_6'. La parte debida á la carga permanente vendrá dada por la ecuación

$$v_6'^{\pi} + 23.400 - 1.462,5 - 4.387,5 - 4 \times 5.850 = 0$$

de donde resulta

$$v_6'^{\pi} = 5.850$$

Para calcular $v_6'^{máx}$, los montantes cargados serán desde V_0' á V_5 y la longitud es de 40 m. Las cargas correspondientes sobre los diversos montantes han sido halladas anteriormente y serán 3.100 kg. en V_0', 9.300 en V_1' y 12.400 en los restantes. Tendremos la reacción del apoyo

$$a_6'^{máx} = 3.100 + \frac{9.300}{64} \times 60 + \frac{12.400}{64}(52 + 44 + 36 + 28) =$$
$$= 42.875 \text{ kg.}$$

Obtendremos $v_6'^{máx}$ por la ecuación

$$v_6'^{máx} + 42.875 - 3.100 - 9.300 - 4 \times 12.400 = 0$$

de donde resulta

$$v_6'^{máx} = 19.125 \text{ kg.}$$

Para la determinación de $v_6'^{mín}$, los montantes cargados serán V_6' á V_9', la longitud correspondiente es 24 m., y, según hemos visto, para esta longitud, la carga en un nudo es de 14.640 kg.; en el montante V_8' es 10.980 kg. La reacción del apoyo será

$$a'^{mín}_6 = \frac{14.640}{64}(20 + 12) + \frac{10.980}{64} \times 4 + 8.005 \text{ kg.}$$

y, por consiguiente,

$$v_6'^{mín} = -8.005 \text{ kg.}$$

Se deduce

$$V_6'^{máx} = 5.850 + 19.125 = 24.975 \text{ kg.}$$

$$V_6'^{mín} = 5.850 - 8.005 = -2.155 \text{ kg.}$$

Vemos que este montante sufre todavía compresiones, pero observando la disminución del valor absoluto de los esfuerzos mínimos en los últimos montantes calculados, es de suponer que la tensión mínima será ya positiva en el montante V_7'. Nos limitaremos á comprobarlo calculando $V_7'^{mín}$, puesto que $V_7'^{máx}$ será evidentemente positivo.

El esfuerzo debido á la carga permanente se deduce de la ecuación

$$v_7'^{\pi} + 23.400 - 1.462{,}5 - 4.387{,}5 - 5 \times 5.850 = 0$$

de donde se saca

$$v_7'^{\pi} = 11.700.$$

Por otra parte, suponiendo cargados los nudos V_7', V_8' y V_9', ó sea una longitud de 16 m., la carga en V_7' será 16.640 kg. y en V_8', 12.480.

La reacción del apoyo es

$$a_7'^{min} = \frac{16.640}{64} \times 12 + \frac{12.480}{64} \times 4 = 3.900 \text{ kg.}$$

de donde resulta

$$v_7'^{min} = -3.900 \text{ kg.}$$

Por lo tanto,

$$V_7'^{min} = 11.700 - 3.900 = 7.800 \text{ kg.}$$

Luego el montante V_7' sufre sólo tensiones y habrá de suprimirse en la viga definitiva, y, por consiguiente, no hay necesidad de continuar el cálculo de los montantes.

151. DIAGONALES.—Los valores de las tensiones máximas de las diagonales se deducen fácilmente de las mínimas de los montantes, como vemos á continuación. Se observará que el montante V_1' forma con la diagonal D_1' un ángulo, cuya tangente es $\frac{1}{2}$, que es de 26° 30'.

$$D_1'^{máx} = -\frac{V_1'^{min}}{\cos 26° 30'} = \frac{65.160}{0,896} = 72.723 \text{ kg.}$$

$$D_2'^{máx} = -\frac{V_2'^{min}}{\cos 45°} = 51.966 \times 1,41 = 73.272 \text{ kg.}$$

$$D_3'^{máx} = -\frac{V_3'^{min}}{\cos 45°} = 37.728 \times 1,41 = 53.196 \text{ kg.}$$

$$D_4'^{máx} = -\frac{V_4'^{min}}{\cos 45°} = 25.055 \times 1,41 = 35.328 \text{ kg.}$$

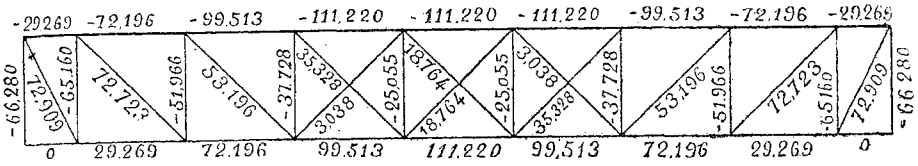
$$D_5'^{máx} = -\frac{V_5'^{min}}{\cos 45°} = 13.308 \times 1,41 = 18.764 \text{ kg.}$$

$$D_6'^{máx} = -\frac{V_6'^{min}}{\cos 45°} = 2.155 \times 1,41 = 3.038 \text{ kg.}$$

Una vez obtenidos todos los esfuerzos necesarios de las piezas del diagrama *(b)*, trazaremos el de las diagonales simétricas y obtendremos, por superposición con el *(b)*, conservando sólo los mon-

tantes comprimidos y las diagonales tendidas, el diagrama de la figura 121, en que se han indicado, como de ordinario, las tensiones

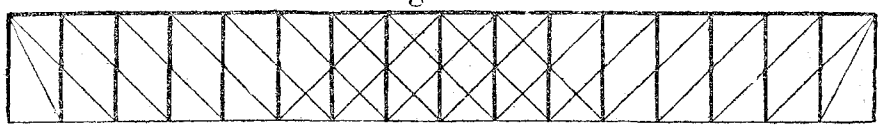
Fig. 121



y compresiones máximas. Todos estos resultados y las secciones teóricas se resumen en el cuadro de la página siguiente:

Ahora, superponiendo las figuras 120 y 121, obtendremos la viga de la figura 122.

Fig. 122



Nada hay que observar respecto á los montantes y á las diagonales, que no se superponen, salvo los montantes extremos, y, por lo tanto, cada una de estas piezas conserva la sección ya calculada.

Los montantes extremos se superponen, y el esfuerzo máximo que les corresponde es la suma de los parciales, ó sea

$$2 \times 66.280 = 132.560 \text{ kg.},$$

puesto que los dos esfuerzos parciales son iguales. A este esfuerzo de compresión deberá resistir la sección que se adopte para el montante.

En cuanto á las cabezas, observaremos que cada uno de los trozos comprendidos entre dos nudos de la viga definitiva (fig. 122), sufre los esfuerzos parciales correspondientes al mismo trozo en los diagramas de las figuras 120 y 121. Bastará sumar dichos esfuerzos parciales para obtener los definitivos que han de servir para determinar las secciones. Como se han determinado en los cuadros las

Esfuerzos y secciones teóricas de las piezas de la viga de la figura 121.

CABEZA SUPERIOR.		CABEZA INFERIOR.		MONTANTES.		DIAGONALES.	
Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Tensiones — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Compresiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*	Tensiones. — *Kilogramos.*	Secciones teóricas. — *Milím. cuad.*
				$V_0' = 66.280$	9.469		
$S_1' = 29.269$	4.181	$I_1' = 0$	0	$V_1' = 65.160$	9.309	$D_1' = 72.723$	10.389
$S_2' = 72.196$	10.314	$I_2' = 29.269$	4.181	$V_2' = 51.966$	7.424	$D_2' = 73.272$	10.468
$S_3' = 99.513$	14.216	$I_3' = 72.196$	10.314	$V_3' = 37.728$	5.390	$D_3' = 53.196$	7.600
$S_4' = 111.220$	15.889	$I_4' = 99.513$	14.216	$V_4' = 25.055$	3.579	$D_4' = 35.328$	5.047
$S_5' = 111.220$	15.889	$I_5' = 111.220$	15.889	$V_5' = 25.055$	3.579	$D_5' = 18.764$	2.681
$S_6' = 111.220$	15.889	$I_6' = 99.513$	14.216	$V_6' = 37.728$	5.390	$D_6' = 3.038$	434
$S_7' = 99.513$	14.216	$I_7' = 72.196$	10.314	$V_7' = 51.798$	7.424	»	»
$S_8' = 72.196$	10.314	$I_8' = 29.269$	4.181	$V_8' = 65.160$	9.309	»	»
$S_9' = 29.269$	4.181	$I_9' = 0$	0	$V_9' = 66.280$	9.469	»	»

secciones correspondientes á los esfuerzos parciales, pueden también hallarse las secciones definitivas en cada trozo sumando las parciales correspondientes en los diagramas de las figuras 120 y 121.

Hé aquí el resumen de los esfuerzos definitivos en los diversos trozos de las cabezas numerados en la figura.

Compresiones de la cabeza superior.

Trozos.	COMPRESIONES.
1 y 16	$S_1' + S_1 = 29.269 + 54.635 = 83.904$ kg.
2 y 15	$S_2' + S_1 = 72.196 + 54.635 = 126.831$ »
3 y 14	$S_2' + S_2 = 72.196 + 93.660 = 165.856$ »
4 y 13	$S_3' + S_2 = 99.513 + 93.660 = 193.173$ »
5 y 12	$S_3' + S_3 = 99.513 + 117.075 = 216.588$ »
6 y 11	$S_4' + S_3 = 111.220 + 117.075 = 228.295$ »
7 y 10	$S_4' + S_4 = 111.220 + 124.880 = 236.100$ »
8 y 9	$S_5' + S_4 = 111.220 + 124.880 = 236.100$ »

Tensiones de la cabeza inferior.

Trozos.	TENSIONES.
1 y 16	$I_1' + I_1 = 0$
2 y 15	$I_2' + I_1 = 29.269 + 0 = 29.269$ kg.
3 y 14	$I_2' + I_2 = 29.269 + 54.635 = 83.904$ »
4 y 13	$I_3' + I_2 = 72.196 + 54.635 = 126.831$ »
5 y 12	$I_3' + I_3 = 72.196 + 93.660 = 165.856$ »
6 y 11	$I_4' + I_3 = 99.513 + 93.660 = 193.173$ »
7 y 10	$I_4' + I_4 = 99.513 + 117.075 = 228.295$ »
8 y 9	$I_5' + I_4 = 111.220 + 117.075 = 228.295$ »

Conocemos, por consiguiente, los mayores esfuerzos que debe resistir cada una de las piezas que componen la viga que estudiamos y las secciones teóricas que deben adoptarse; es fácil adoptar las secciones prácticas que convienen, siguiendo la misma marcha que en los ejemplos anteriormente estudiados.

CAPÍTULO VIII.

VIGA DE MONTANTES Y CRUCES DE SAN ANDRÉS.

152. DESCOMPOSICIÓN DEL DIAGRAMA EN DOS SISTEMAS SIMPLES.— Consideremos el sistema simple *(a)* (fig. 123) compuesto de las cabezas, las verticales y las diagonales que bajan de izquierda á derecha, suponiendo que en los nudos superiores actúen la mitad de las car-

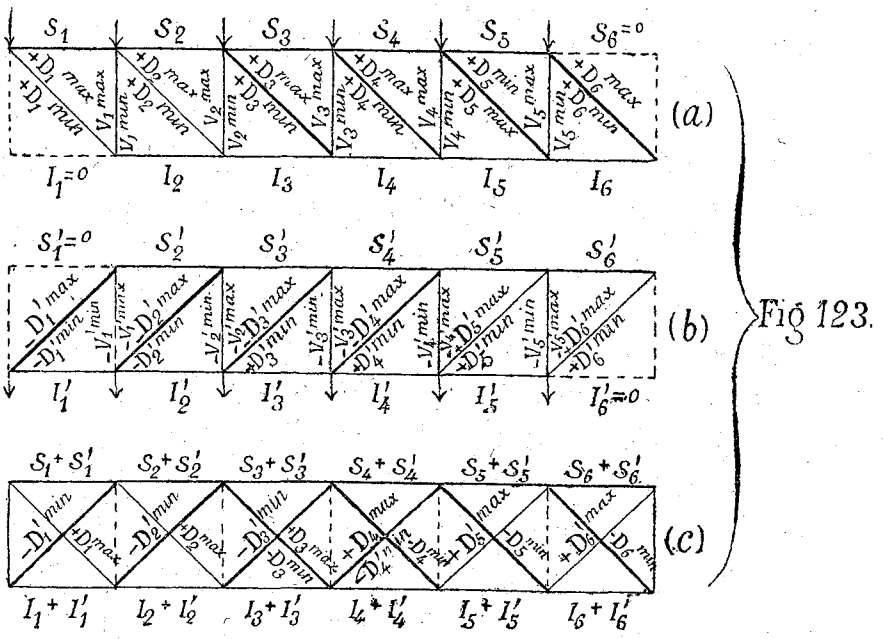


Fig 123.

gas que corresponden á la viga que se estudia. Imaginemos, además, el sistema simple del diagrama *(b)* de la misma figura, en el cual se incluyen las diagonales que no forman parte del diagrama *(a)*,

suponiendo aplicadas á los nudos inferiores las cargas que corresponden á esta viga, ó sea, la mitad de las cargas que ha de resistir la viga definitiva.

Superponiendo los diagramas *(a)* y *(b)*, obtendremos el *(c)*, en el cual conoceremos fácilmente los máximos esfuerzos que deben resistir sus diferentes piezas, deduciéndolos de las tensiones máximas y mínimas calculadas para dichos sistemas simples. A esto se reduce, en principio, el cálculo de una viga de montantes y cruces de San Andrés; pero conviene llamar la atención sobre algunas propiedades cuyo conocimiento permite abreviar mucho los cálculos y verificar comprobaciones.

153. Procedimiento para el cálculo de la viga.—El cálculo del diagrama *(a)* no ofrece ninguna novedad, siendo idéntico al correspondiente de la figura 114 que ya se ha estudiado detalladamente. En ella puede observarse que las diagonales correspondientes á mallas equidistantes del centro sufren tensiones iguales y de signo contrario, observación que puede servir para abreviar los cálculos, ó mejor, para comprobar los resultados; no sucede lo mismo con los montantes verticales simétricos, porque sus tensiones máxima y mínima no corresponden á cargas simétricas; así, si consideramos los montantes V_2 y V_4 [fig. 123 *(a)*], veremos que, para calcular $V_2^{máx}$, habremos de suponer cargados los dos primeros montantes, mientras que para calcular $V_4^{mín}$, deberemos suponer cargados los tres últimos; no pueden resultar, por consiguiente, valores numéricos iguales.

Una vez calculado el diagrama *(a)*, se puede deducir inmediatamente el diagrama *(b)* sin proceder á su cálculo detallado, teniendo presentes las siguientes observaciones. No puede obtenerse en este caso dicho diagrama trazando el simétrico de *(a)*, como se hizo en el caso de la figura 114, porque aquí hemos supuesto que la posición de las cargas no es la misma, aplicándose, en el diagrama *(b)*, en los nudos inferiores.

Pero es fácil ver las modificaciones que introduce esta circunstancia.

En primer lugar, se puede observar que los diversos trozos de las cabezas del diagrama *(b)* sufrirán los mismos esfuerzos que los que

ocupan una posición simétrica en *(a)*, es decir, que $S_2' = S_5$; $S_3' = S_4$; $I_2' = I_5$, etc. (1).

Lo mismo ocurrirá respecto á las diagonales, resultando que sus esfuerzos son iguales y de signo contrario á los de la malla correspondiente en *(a)*. Si consideramos las diagonales D_2 de *(a)* y D_2' de *(b)*, veremos que los nudos que se han de suponer cargados para calcular sus esfuerzos máximo y mínimo son los mismos, y que obtendremos, por consiguiente, iguales valores numéricos; pero serán de signos contrarios por pertenecer á diferentes sistemas de diagonales.

Si consideramos ahora dos montantes correspondientes en los dos diagramas, por ejemplo, V_2 y V_2', observaremos que las tensiones del primero se deducirán de las de la diagonal D_2 que concurre con él en el nudo descargado multiplicando éstas por el coseno del ángulo que forman con la vertical; las de V_2' se deducirán del mismo modo de las correspondientes á D_2', y, por consiguiente, los esfuerzos de los dos montantes serán iguales y de signo contrario.

En resumen, el diagrama *(b)* se deducirá del *(a)* copiando las tensiones de las barras que ocupan en éste una posición simétrica, excepto en los montantes, cuyas tensiones serán iguales y de signo contrario respecto á los que les correspondan en el diagrama *(a)*.

Al superponer los dos diagramas, los esfuerzos correspondientes á las cabezas se superponen y se suman; las diagonales quedan con los mismos esfuerzos calculados, puesto que no se superponen; y los montantes, que, como hemos visto, sufren esfuerzos iguales y de signo contrario para una misma carga en los sistemas simples, no sufrirán esfuerzo alguno en la viga *(c)*.

En efecto, es evidente que, para el equilibrio general del sistema *(c)*, los montantes son líneas superfluas; pero vamos á ver que

---

(1) Por ejemplo, comparemos el trozo de cabeza S_2' del diagrama *(b)* con el S_5 del *(a)*. Para su cálculo se han de suponer las mismas cargas en todos los nudos. Para el cálculo de S_2', se han de tomar los momentos con relación al nudo inferior de V_1', y, para el de S_5, con relación al extremo inferior de V_5. Luego la disposición de las cargas y la posición del centro de momentos es idéntica en ambos casos y obtendremos en los dos la misma ecuación.

El mismo razonamiento hace ver que S_2 no debe sufrir el mismo esfuerzo que S_2'; en efecto, para S_2 el centro de momentos es el extremo inferior del segundo montante en vez del primero.

para que se realice la hipótesis que hemos admitido respecto al modo de actuar las cargas, repartiéndose por igual entre los nudos superiores y los inferiores, es preciso que los montantes sufran un esfuerzo perfectamente determinado.

Consideremos, en primer lugar, la sobrecarga, suponiendo que el piso esté en la parte superior. Dicha sobrecarga se transmitirá por medio de la vigueta al nudo superior, y para que se verifique la hipótesis, es preciso que la mitad sea transmitida al nudo inferior por medio del montante.

Si se supone que el peso permanente se aplique también al nudo superior (y se aplica en su mayor parte estando el piso á la altura de la cabeza superior), también tendrá que transmitir el montante la mitad de esta carga al nudo inferior para que se realice la hipótesis.

En resumen, el montante deberá transmitir al nudo inferior la mitad de la carga total correspondiente á un nudo, resistiendo á ella por compresión. Todos los montantes tendrán la misma sección, deducida de dicha carga máxima.

Si el piso está en la parte inferior, el montante deberá transmitir al nudo superior la mitad del peso que le corresponde, obrando en este caso por tensión.

Si está á una altura intermedia, la parte del montante superior al piso transmitirá al nudo superior la mitad de la carga, obrando por tensión, y la parte inferior transmitirá la otra mitad al nudo inferior, obrando por compresión. El montante deberá tener una sección capaz de resistir á este último esfuerzo que será el más desfavorable, pero al determinarla de modo que no sea de temer la flexión, se deberá considerar como longitud sólo la parte comprimida, de modo que no será necesaria una sección tan grande como si el piso fuera superior y todo el montante estuviera comprimido.

La carga máxima que debe resistir un montante, es la mitad de la que corresponde á un nudo. Al determinarla en el ejemplo numérico veremos las diversas maneras de interpretar esta regla en la práctica.

154. Aplicación á un puente para ferrocarril de vía única de 32 m. de luz con el piso en la parte superior (fig. 124).—Sea la

altura de la viga de 4 m., igual á $\frac{1}{8}$ de la luz, y descompongamo la viga en 8 mallas cuadradas de 4 m. de lado.

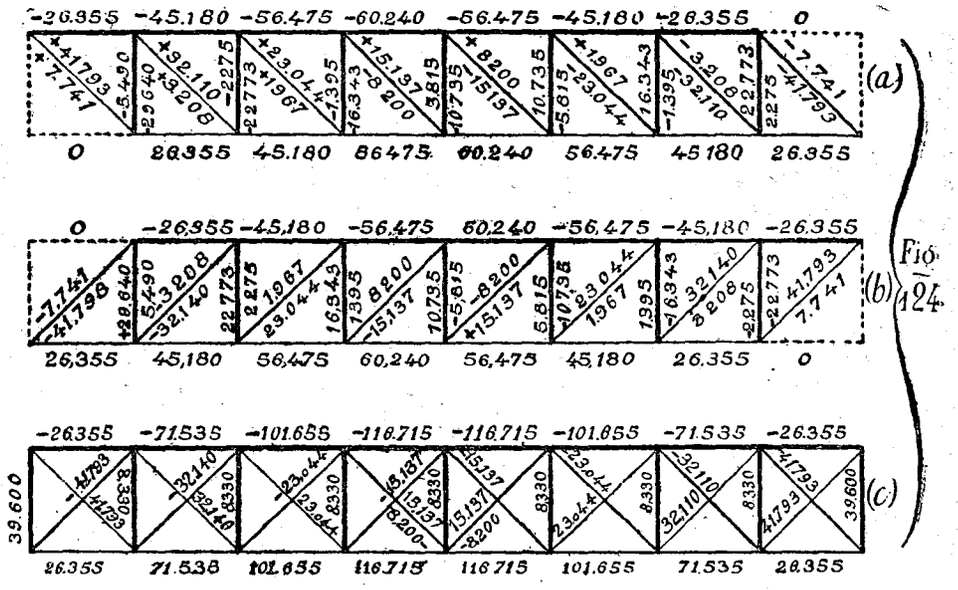


Fig. 124.

Evaluemos la carga permanente. El cuadro del núm. 93 da

Para 30 m.....	1.485 kg.	por metro lineal.
» 35 ».....	1.682 »	»

Para 32 m. de luz resultará, haciendo la interpolación,

$$1.485 + \frac{2}{5}(1.682 - 1.485) = 1.565 \text{ kg.}$$

A cada viga corresponderá por metro lineal la mitad, 782,5 kg.

A cada nudo, siendo su longitud 4 m., $4 \times 782{,}5 = 3.130$ kg.

Pero, como las cargas se han de distribuir por igual entre los dos diagramas simples *(a)* y *(b)* que componen la viga, corresponderá á cada nudo de los diagramas simples la mitad de esta carga, que es 1.565 kg., ó redondeando esta cifra para facilitar los cálculos, 1.570 kg.

A los nudos extremos corresponderá la mitad, 785 kg.

Evaluemos ahora la sobrecarga que ha de servir para el cálculo de las cabezas.

El cuadro *(a)* del núm. 95 da:

Para 20 m.....	6.500 kg.
» 40 »	5.600 »

Luego corresponderá por metro lineal, para la luz de 32 m.,

$$5.600 + \frac{8}{20}(6.500 - 5.600) = 5.960 \text{ kg.}$$

A una viga corresponde la mitad, 2.980 kg.

Y á un nudo del diagrama simple $\frac{4 \times 2.980}{2} = 5.960$ kg.

A los nudos extremos corresponde la mitad de este peso, 2.980 kg.

La carga total en un nudo, para el cálculo de las cabezas, se obtendrá sumando las anteriores, y será,

$$1.570 + 5.960 = 7.530 \text{ kg.}$$

Y en los nudos extremos la mitad, 3.765 kg.

La reacción del apoyo necesaria para el cálculo de las cabezas será,

$$\frac{8 \times 7.530}{2} = 30.120 \text{ kg.}$$

155. CÁLCULO DE LAS CABEZAS EN EL DIAGRAMA *(a)*.—Para calcular S_1, supondremos cortada la primera malla por un plano vertical, y escribiremos la ecuación de los momentos de las fuerzas que quedan á la izquierda de dicho plano con relación al nudo inferior del montante V_1, suponiendo cargados todos los nudos. La ecuación será

$$S_1 \times 4 + 30.120 \times 4 - 3.765 \times 4 = 0$$

de donde se deduce

$$S_1 = -26.355 \text{ kg.}$$

Y tendremos además

$$I_2 = -S_1 = 26.355 \text{ kg.}$$

S_2 se calculará tomando los momentos con relación á la extremidad inferior del montante V_2. La ecuación será

$$S_2 \times 4 + 30.120 \times 8 - 3.765 \times 8 - 7.530 \times 4 = 0$$

de donde se deduce

$$S_2 = -2\,(30.120 - 3.765) + 7.530 = -45.180 \text{ kg.}$$

Se deduce además el valor de I_3

$$I_3 = -S_2 = 45.180 \text{ kg.}$$

Tomando momentos con relación al extremo inferior del montante V_3, tendremos la ecuación

$$S_3 \times 4 + 30.120 \times 12 - 3.765 \times 12 - 7.530 \times 8 - 7.530 \times 4 = 0$$

que nos dará para S_3 el valor

$$S_3 = -3\,(30.120 - 3.765) + 7.530\,(2 + 1) = -56.475 \text{ kg.}$$

Y el valor de I_4 se deducirá inmediatamente por la relación conocida

$$I_4 = -S_3 = 56.475 \text{ kg.}$$

Se obtendrá S_4, tomando los momentos con relación al extremo inferior del montante V_4. La ecuación será

$$S_4 \times 4 + 30.120 \times 16 - 3.765 \times 16 - 7.530\,(12 + 8 + 4) = 0$$

de donde se deduce

$$S_4 = -4\,(30.120 - 3.765) + 7.530\,(3 + 2 + 1) = -60.240 \text{ kg.}$$

Tendremos inmediatamente el valor de I_5

$$I_5 = -S_4 = 60.240 \text{ kg.}$$

Para el cálculo de S_5, el centro de momentos será el extremo inferior del montante V_5. La ecuación será

$$S_5 \times 4 + (30.120 - 3.765) \times 20 - 7.530\,(16 + 12 + 8 + 4) = 0$$

de donde se saca

$$S_5 = -5\,(30.120 - 3.765) + 7.530\,(4 + 3 + 2 + 1) = -56.475 \text{ kg.}$$

Resulta también

$$I_6 = - S_5 = 56.475 \text{ kg.}$$

S_6 se calculará escribiendo la ecuación de los momentos con relación al extremo inferior del montante V_6, que será

$$S_6 \times 4 + (30.120 - 3.765) \times 24 - 7.530\ (20 + 16 + 12 + 8 + 4) = 0$$

de donde resulta

$$S_6 = - (30.120 - 3.765) \times 6 + 7.530\ (5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \\ = - 56.475 \text{ kg.}$$

Por consiguiente,

$$I_6 = - S_6 = 56.475 \text{ kg.}$$

Para calcular S_7, el centro de momentos será el extremo inferior de V_7, y la ecuación que dará S_7

$$S_7 \times 4 + (30.120 - 3.765) \times 28 - 7.530\ (24 + 20 + 16 + 12 + \\ + 8 + 4) = 0.$$

Resulta

$$S_7 = - (30.120 - 3.765) \times 7 + 7.530\ (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = \\ = - 26.355 \text{ kg.}$$

El valor de I_8 será

$$I_8 = - S_7 = 26.355 \text{ kg.}$$

Podríamos dispensarnos de calcular S_8, que, como sabemos, debe ser cero. Sin embargo, escribiremos la ecuación que determina su valor para comprobarlo; esta ecuación será

$$S_8 \times 4 + (30.120 - 3.765) \times 32 - 7.530\ (28 + 24 + 20 + 16 + \\ + 12 + 8 + 4) = 0.$$

De donde se deduce

$$S_8 = - 8\ (30.120 - 3.765) + 7.530\ (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 0.$$

156. Cálculo de los montantes.—Hemos visto que la carga permanente sobre cada nudo es 1.570 kg.; la reacción del apoyo corres-

pondiente á dicha carga, que deberá figurar en el cálculo de todos los montantes, será

$$a_\pi = \frac{8 \times 1.570}{2} = 6.280 \text{ kg.}$$

El valor v_1^π del esfuerzo correspondiente al montante por efecto de la carga permanente, se obtendrá por medio de la ecuación

$$v_1^\pi + 6.280 - 785 = 0$$

que dará

$$v_1^\pi = - 5.490 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_1^{máx}$, se ha de suponer cargado solamente el montante de apoyo. Esta carga queda equilibrada en el mismo montante por la reacción del apoyo, y el montante V_1 no tiene que desarrollar ningún esfuerzo, de modo que

$$v_1^{máx} = 0.$$

Para calcular $v_1^{mín}$, se supondrán cargados todos los montantes, excepto el del apoyo izquierdo, es decir, una longitud de 30 m.

La carga correspondiente por metro lineal será, según el cuadro *b*, $\frac{7.600 + 6.200}{2} = 6.900$ kg. para las dos vigas.

Al diagrama simple que estudiamos corresponderá $\frac{1}{4} \times 6.900$ y á un nudo del mismo $\frac{4}{4} \times 6.900 = 6.900$ kg.

Hallaremos la reacción del apoyo izquierdo $a_1^{mín}$ correspondiente á esta carga, tomando momentos con relación al apoyo derecho, y será

$$a_1^{mín} = \frac{6.900}{8} (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 24.150 \text{ kg.}$$

Y escribiendo la ecuación de equilibrio de las fuerzas verticales que actúan á la izquierda de V_1, tendremos

$$v_1^{mín} + 24.150 = 0$$

ó sea

$$v_1^{mín} = -24.150 \text{ kg.}$$

Luego

$$V_1^{máx} = -5.490 \text{ kg.}$$

$$V_1^{mín} = -5.490 - 24.150 = -29.640 \text{ kg.}$$

Por el mismo procedimiento calcularemos el montante V_2.

El esfuerzo debido á la carga permanente se deducirá de la ecuación

$$v_2^{\pi} + 6.280 - 785 - 1.570 = 0$$

Y será

$$v_2^{\pi} = -3.925 \text{ kg.}$$

Para el cálculo de $v_2^{máx}$, los montantes cargados serán el V_0 y V_1, ó sea una longitud de 6 m., á la que corresponde, según el cuadro *b*, por metro lineal del diagrama simple,

$$\frac{1}{4}\left[10.000 + \frac{4}{5}(14.000 - 10.000)\right] = 3.300 \text{ kg.}$$

En cada nudo actuará el peso $4 \times 3.300 = 13.200$ kg., y en el extremo, la mitad 6.600 kg.

La reacción del apoyo será

$$a_2^{máx} = 6.600 + \frac{7}{8} \times 13.200 = 18.150 \text{ kg.}$$

Luego la ecuación que da $v_2^{máx}$, será

$$v_2^{máx} + 18.150 - 6.600 - 13.200 = 0$$

de donde se saca

$$v_2^{máx} = +1.650 \text{ kg.}$$

Para determinar $v_2^{mín}$, la carga se debe extender á los montantes V_2 á V_8 ambos inclusive, ó sea una longitud de 26 m.; corresponde por metro lineal de viga simple, según el cuadro *b*,

$$\frac{1}{4}\left[6.200 + \frac{14}{20}\,(7.600 - 6.200)\right] = 1.795 \text{ kg.}$$

Y en un nudo actuará el peso $4 \times 1.795 = 7.180$ kg.

La reacción del apoyo es

$$a_2^{mín} = \frac{7.180}{8}\,(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 18.848 \text{ kg.}$$

De donde se deduce

$$v_2^{min} = - 18.848 \text{ kg.}$$

Luego

$$V_2^{máx} = - 3.925 + 1.650 = - 2.275 \text{ kg.}$$

$$V_2^{min} = - 3.925 - 18.848 = - 22.773 \text{ kg.}$$

Pasemos al montante V_3— v_3^{π} vendrá dado por la ecuación

$$v_3^{\pi} + 6.280 - 785 - 2 \times 1.570 = 0$$

de donde resulta

$$v_3^{\pi} = - 2.355 \text{ kg.}$$

$v_3^{máx}$ se calculará suponiendo cargados los montantes V_0, V_1 y V_2, ó sea una longitud de 10 m. Según el cuadro *b*, la carga por metro lineal es de 10.000 kg. Luego la carga por metro lineal, en la viga simple, será 2.500 kg., y en cada nudo, 10.000 kg. En los nudos extremos será 5.000 kg.

El valor de la reacción del apoyo es

$$a_3^{máx} = 5.000 + \frac{10.000}{8}\,(7 + 6) = 21.250 \text{ kg.}$$

La ecuación que determina $v_3^{máx}$ será

$$v_3^{máx} + 21.250 - 5.000 - 2 \times 10.000 = 0$$

Y el valor de $v_3^{máx}$,

$$v_3^{máx} = + 3.750 \text{ kg.}$$

$v_3^{mín}$ se determina suponiendo cargados los montantes de V_3 á V_8, longitud de 22 m. La carga por metro lineal de viga simple, deducida del cuadro *b*, será la siguiente:

$$\frac{1}{4}\left[6.200 + \frac{18}{20}(7.600 - 6.200)\right] = 1.865 \text{ kg.}$$

En un nudo obrará el peso $4 \times 1.865 = 7.460$ kg., y la reacción del apoyo será

$$a_3^{mín} = \frac{7.460}{8}(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 13.988 \text{ kg.}$$

De donde se deduce

$$v_3^{mín} = -13.988 \text{ kg.}$$

Los valores de $V_3^{máx}$ y $V_3^{mín}$ serán

$$V_3^{máx} = -2.355 + 3.750 = +1.395 \text{ kg.}$$
$$V_3^{mín} = -2.355 - 13.988 = -16.343 \text{ kg.}$$

Veamos los esfuerzos del montante V_4. El debido á la carga permanente se obtiene por la ecuación

$$v_4^{\pi} + 6.280 - 785 - 3 \times 1.570 = 0$$

de donde se saca $v_4^{\pi} = -785$ kg.

Para el cálculo de $v_4^{máx}$, se suponen cargados los montantes V_0 á V_3 que representan una longitud de 14 m. La carga por metro lineal de viga simple será, según el cuadro *b*,

$$\frac{1}{4}\left[8.500 + \frac{1}{5}(10.000 - 8.500)\right] = 2.200 \text{ kg.}$$

Corresponderá á un nudo el peso $4 \times 2.200 = 8.800$ kg. y á los nudos extremos 4.400. El valor de la reacción del apoyo es

$$a_4^{máx} = 4.400 + \frac{8.800}{8}(7 + 6 + 5) = 24.200 \text{ kg.}$$

Y $v_4^{máx}$ se obtendrá por medio de la ecuación

$$v_4^{máx} + 24.200 - 4.400 - 3 \times 8.800 = 0$$

de donde resulta

$$v_4^{máx} = + 6.600 \text{ kg.}$$

$v_4^{mín}$ se calcula suponiendo cargados los montantes V_4 á V_8, ó sea una longitud de 18 m. Por metro lineal de viga simple, resultará, según el cuadro *b*, la carga

$$\frac{1}{4}\left[7.600 + \frac{2}{5}\,(8.500 - 7.600)\right] = 1.990 \text{ kg.}$$

A cada nudo corresponderá $4 \times 1.990 = 7.960$ kg.

La reacción del apoyo será

$$a_4^{mín} = \frac{7.960}{8}\,(4 + 3 + 2 + 1) = 9.950 \text{ kg.}$$

De donde resulta

$$v_4^{mín} = - 9.950 \text{ kg.}$$

Y, por consiguiente,

$$V_4^{máx} = - 785 + 6.600 = \quad 5.815 \text{ kg.}$$
$$V_4^{mín} = - 785 - 9.950 = - 10.735 \text{ kg.}$$

Calculemos los esfuerzos del montante V_5. El debido al peso permanente se deducirá de la ecuación

$$v_5^{\pi} + 6.280 - 785 - 4 \times 1.570 = 0$$

Y será

$$v_5^{\pi} = 785 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_5^{máx}$, supondremos cargados los montantes V_0 á V_4, es decir, una longitud de 18 m. Corresponde á cada nudo de la viga simple, según acabamos de ver, un peso de 7.960 kg. y á los extremos 3.980. La reacción del apoyo será

$$a_5^{máx} = 3.980 + \frac{7.960}{8}(7 + 6 + 5 + 4) = 25.870 \text{ kg.}$$

$v_5^{máx}$ se deducirá de la ecuación

$$v_5^{máx} + 25.870 - 3.980 - 4 \times 7.960 = 0$$

de donde se deduce

$$v_5^{máx} = 9.950 \text{ kg.}$$

$v_5^{mín}$ se determina suponiendo cargados los montantes V_5 á V_8, ó sea una longitud de 14 m.; corresponde, según hemos visto, una carga de 8.800 kg., á cada nudo del diagrama simple; luego la reacción del apoyo será

$$a_5^{mín} = \frac{8.800}{8}(3 + 2 + 1) = 6.600 \text{ kg.}$$

Y el valor de $v_5^{mín}$ será

$$v_5^{mín} = -6.600 \text{ kg.}$$

Por consiguiente,

$$V_5^{máx} = 785 + 9.950 = \quad 10.735 \text{ kg.}$$
$$V_5^{mín} = 785 - 6.600 = - \quad 5.815 \text{ kg.}$$

Estudiemos el montante V_6. Se deducirá v_6^{π} de la ecuación

$$v_6^{\pi} + 6.280 - 785 - 5 \times 1.570 = 0$$

que dará

$$v_6^{\pi} = 2.355 \text{ kg.}$$

Para el cálculo de $v_6^{máx}$, se suponen cargados los montantes V_0 á V_5, á lo que corresponde una longitud de 22 m., y una carga, en cada nudo del diagrama simple, de 7.460 kg., según hemos calculado anteriormente; al nudo extremo corresponde la mitad, 3.730 kg.

La reacción del apoyo será

$$a_6^{máx} = 3.730 + \frac{7.460}{8}(7 + 6 + 5 + 4 + 3) = 27.043 \text{ kg.}$$

$v_6^{máx}$ se deducirá de la ecuación

$$v_6^{máx} + 27.043 - 3.730 - 5 \times 7.460 = 0$$

de donde se saca

$$v_6^{máx} = 13.988 \text{ kg.}$$

La parte de viga cargada para el cálculo de $v_6^{mín}$, comprende una longitud de 10 m. correspondiente á los tres montantes de la derecha. Sabemos que la carga en un nudo es de 10.000 kg., y, por lo tanto,

$$a_6^{mín} = \frac{10.000}{8} (2 + 1) = 3.750 \text{ kg.}$$

Luego

$$v_6^{mín} = - 3.750 \text{ kg.}$$

Y, por consiguiente,

$$V_6^{máx} = 2.355 + 13.988 = \quad 16.343 \text{ kg.}$$
$$V_6^{mín} = 2.355 - \quad 3.750 = - 1.395 \quad »$$

Finalmente, calcularemos los esfuerzos que debe resistir el montante V_7. El valor de v_7^{π} se deducirá de la ecuación

$$v_7^{\pi} + 6.280 - 785 - 6 \times 1.570 = 0$$

que dará

$$v_7^{\pi} = 3.925 \text{ kg.}$$

Para calcular $v_7^{máx}$, se suponen cargados los montantes V_0 á V_6; la longitud cargada de la viga es 26 m., la carga en cada nudo del diagrama simple 7.180 kg. y en el nudo extremo 3.590.

El valor de la reacción del apoyo es

$$a_7^{máx} = 3.590 + \frac{7.180}{8} (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2) = 27.823 \text{ kg.}$$

Se escribe la ecuación

$$v_7^{máx} + 27.823 - 3.590 - 6 \times 7.180 = 0$$

y se deduce de ella

$$v_7^{máx} = 18.848 \text{ kg.}$$

La longitud cargada, para calcular $v_7^{mín}$, será 6 m., y la carga en un nudo 13.200 kg. La reacción del apoyo es

$$a_7^{mín} = \frac{13.200}{8} = 1.650 \text{ kg.}$$

Y, por consiguiente,

$$v_7^{mín} = -1.650 \text{ kg.}$$

Se deduce de los valores anteriores

$$V_7^{máx} = 3.925 + 18.848 = 22.773 \text{ kg.}$$
$$V_7^{mín} = 3.925 - 1.650 = 2.275 \text{ »}$$

No podemos aplicar el mismo procedimiento al cálculo de V_8, puesto que éste recibe, además de la carga que le corresponde como á uno de los montantes de la viga, la reacción del apoyo.

157. Cálculo de las diagonales.—Los esfuerzos de las diagonales se deducen fácilmente de los correspondientes á los montantes que concurren con ellas en los nudos descargados, teniendo presente la regla explicada en el número 141.

Sus valores serán los siguientes:

$$D_1^{máx} = -\frac{V_1^{mín}}{\cos 45^\circ} = 29.640 \times 1{,}41 = 41.793 \text{ kg.}$$

$$D_1^{mín} = -\frac{V_1^{máx}}{\cos 45^\circ} = 5.490 \times 1{,}41 = 7.741 \text{ »}$$

$$D_2^{máx} = -\frac{V_2^{mín}}{\cos 45^\circ} = 22.773 \times 1{,}41 = 32.110 \text{ »}$$

$$D_2^{mín} = -\frac{V_2^{máx}}{\cos 45^\circ} = 2.275 \times 1{,}41 = 3.208 \text{ »}$$

$$D_3^{máx} = -\frac{V_3^{mín}}{\cos 45^\circ} = 16.343 \times 1{,}41 = 23.044 \text{ »}$$

$$D_3^{min} = -\frac{V_3^{máx}}{\cos 45^\circ} = -\ 1.395 \times 1{,}41 = -\ 1.967 \text{ kg.}$$

$$D_4^{máx} = -\frac{V_4^{min}}{\cos 45^\circ} = \quad 10.735 \times 1{,}41 = \quad 15.137 \text{ »}$$

$$D_4^{min} = -\frac{V_4^{máx}}{\cos 45^\circ} = -\ 5.815 \times 1{,}41 = -\ 8.200 \text{ »}$$

$$D_5^{máx} = -\frac{V_5^{min}}{\cos 45^\circ} = \quad 5.815 \times 1{,}41 = \quad 8.200 \text{ »}$$

$$D_5^{min} = -\frac{V_5^{máx}}{\cos 45^\circ} = -10.735 \times 1{,}41 = -15.137 \text{ »}$$

$$D_6^{máx} = -\frac{V_6^{min}}{\cos 45^\circ} = \quad 1.395 \times 1{,}41 = \quad 1.967 \text{ »}$$

$$D_6^{min} = -\frac{V_6^{máx}}{\cos 45^\circ} = -16.343 \times 1{,}41 = -23.044 \text{ »}$$

$$D_7^{máx} = -\frac{V_7^{min}}{\cos 45^\circ} = -\ 2.275 \times 1{,}41 = -\ 3.208 \text{ »}$$

$$D_7^{min} = -\frac{V_7^{máx}}{\cos 45^\circ} = -22.794 \times 1{,}41 = -32.110 \text{ »}$$

Se observará que las diagonales que corresponden á mallas equidistantes del centro de la viga, sufren esfuerzos iguales y de signo contrario, como debía suceder, invirtiéndose, como es consiguiente, las denominaciones de máximo y mínimo aplicadas á las cifras iguales en valor absoluto. Esta observación nos permite escribir inmediatamente los esfuerzos máximo y mínimo de la diagonal D_8, sin necesidad de conocer los del montante V_8.

Estos esfuerzos serán:

$$D_8^{máx} = -\ 7.741 \text{ kg.}$$
$$D_8^{min} = -41.793 \text{ »}$$

A continuación resumimos en un cuadro todos los esfuerzos correspondientes al diagrama *(a)*, que figuran también acotados en dicho diagrama, como se hace generalmente, para presentarlos con claridad:

Esfuerzos correspondientes al diagrama *(a)*.

Cabeza superior. — *Kilogramos.*	Cabeza inferior. — *Kilogramos.*	Montantes.	Valores máximos. — *Kilogramos.*	Valores mínimos. — *Kilogramos.*	Diagonales.	Valores máximos. — *Kilogramos.*	Valores mínimos. — *Kilogramos.*
$S_1 = -26.355$	$I_1 = 0$	V_1	— 5.490	— 29.640	D_1	41.793	7.741
$S_2 = -45.180$	$I_2 = 26.355$	V_2	— 2.275	— 22.773	D_2	32.110	3.208
$S_3 = -56.475$	$I_3 = 45.180$	V_3	— 1.395	— 16.343	D_3	23.044	1.967
$S_4 = -60.240$	$I_4 = 56.475$	V_4	+ 5.815	— 10.735	D_4	15.137	— 8.200
$S_5 = -56.475$	$I_5 = 60.240$	V_5	+ 10.735	— 5.815	D_5	8.200	— 15.137
$S_6 = -45.180$	$I_6 = 56.475$	V_6	+ 16.343	+ 1.395	D_6	— 1.967	— 23.044
$S_7 = -26.355$	$I_7 = 45.180$	V_7	+ 22.773	+ 2.275	D_7	— 3.208	— 32.110
$S_8 = 0$	$I_8 = 26.355$				D_8	— 7.741	— 41.793

158. Diagrama *(b)* y viga definitiva.—Conocidos los esfuerzos de las diversas piezas del diagrama *(a)*, fácilmente deduciremos los correspondientes al diagrama *(b)*, teniendo presentes las observaciones hechas más arriba.

Podremos escribir inmediatamente los valores de los esfuerzos de las cabezas, tomando para cada trozo el inscrito en su simétrico en el diagrama *(a)*. Para conocer las tensiones de las diagonales, podrá seguirse la misma regla, ó bien, escribir las de la diagonal de la malla correspondiente en el diagrama *(a)*, cambiando los signos.

Finalmente, en cada montante se inscribirán las mismas cifras que en el correspondiente del diagrama *(a)*, cambiando los signos.

De este modo formaremos el diagrama *(b)*, en el cual aparecen los valores de las tensiones que corresponden á cada una de sus piezas.

Superpongamos ahora los diagramas *(a)* y *(b)*; los esfuerzos de los trozos correspondientes de las cabezas se sumarán, y darán los esfuerzos del trozo correspondiente en el diagrama *(c)*.

Así, por ejemplo, en la tercera malla, la cabeza superior deberá resistir la suma de los esfuerzos — 56.475 y — 45.180, ó sea — 101.655.

Del mismo modo se obtendrán los esfuerzos de los demás trozos de la cabeza superior y los de la inferior.

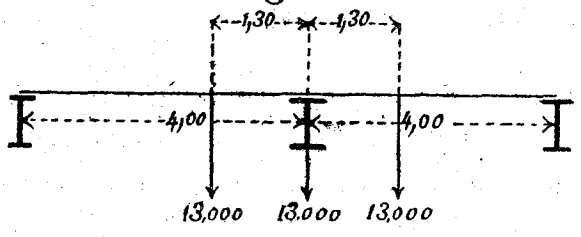
Las diagonales se conservan todas en el diagrama *(c)*, y su sección se determina con arreglo al esfuerzo más desfavorable. En las barras que sufren sólo esfuerzos de compresión, ó sólo de tensión, éste será la mayor compresión ó la mayor tensión á que esté sometida. Así, la diagonal de la tercera malla, que proviene del diagrama *(b)*, se determinará de modo que resista una compresión de 23.044 kg. La opuesta de la misma malla, que proviene del diagrama *(a)*, deberá poder resistir una tensión cuyo valor numérico es también 23.044 kg.

En cuanto á las barras que concurren en el nudo inferior del centro de la viga, se ve que pueden sufrir esfuerzos de signo contrario. Deben resistir á una tensión de 15.137 kg., y también á una compresión de 8.200, que, aunque inferior en valor absoluto, podrá exigir mayor sección que aquélla para evitar la flexión de la barra.

Conviene que la forma de la sección sea perfilada, y deberá fijarse de modo que los dos esfuerzos puedan ser resistidos en condiciones de seguridad.

Veamos qué sección habrá que dar á los montantes. Hemos dicho que cada montante debe transmitir la mitad de las cargas que le corresponden. Consideremos, en primer lugar, la carga móvil. La más desfavorable será el peso de una locomotora; admitamos como tipo una locomotora de tres ejes motores de 13 t., distantes entre sí 1,30 m.; la posición en que la vigueta y, por consiguiente, el nudo en que se apoya, reciben mayor carga, es la representada en la figura 125, en que la rueda intermedia insiste sobre la vigueta. De la rueda intermedia se transmitirá al nudo de la viga la mitad del peso del eje correspondiente, 6.500 kg. Además, por el intermedio del larguero se transmitirá á la vigueta y al nudo una parte del peso de cada una de las otras dos ruedas de la máquina. Llamemos x á esta parte, y tomando momentos con relación á la vigueta inmediata, tendremos

Fig 125



$$x = \frac{6.500\ (4 - 1{,}30)}{4} = 4.387{,}5.$$

Las dos ruedas extremas transmitirán al nudo el peso

$$2 \times 4.387{,}5 = 8.775 \text{ kg.}$$

Y el peso total que insiste sobre el nudo será

$$6.500 + 8.775 = 15.275 \text{ kg.}$$

El montante deberá transmitir al nudo inferior la mitad de esta carga, ó sea 7.637 kg.

Observemos ahora que, estando el piso en la parte superior, carga sobre el nudo superior una parte mayor del peso permanente que en el nudo inferior. Podría admitirse que el peso de la viga, por

razón de su simetría respecto á un eje horizontal, se repartiese por igual entre el nudo superior y el inferior; pero, como el piso es más pesado que el arriostramiento de la parte inferior, el montante debería transmitir al nudo inferior la parte necesaria para que ambos quedasen igualmente cargados. Una vez estudiados el piso y el arriostramiento, se podría conocer con bastante aproximación la parte que debe resistir el montante.

Supongamos que cargue sobre el nudo superior un peso doble que sobre el inferior. Para igualar ambas cargas, el montante deberá transmitir la sexta parte del peso concentrado en un nudo, ó sea

$$\frac{3.140}{6} = 523 \text{ kg.}$$

Por consiguiente, la compresión de un montante será

$$7.637 + 523 = 8.160 \text{ kg.}$$

Algunos autores, como Chicchi, toman simplemente para compresión del montante la mitad de la suma de la carga permanente y de la carga móvil correspondientes á un nudo; esta última se calcula con la carga por metro lineal correspondiente al esfuerzo cortante (cuadro *b*), suponiendo cargado todo el tramo.

La carga permanente correspondiente á un nudo es 3.140 kg.

En el cuadro *b* corresponde á la longitud de 32 m. una carga por metro lineal de 3.380 kg., y en cada nudo, $4 \times 3.380 = 13.520$ kg.

Luego la compresión del montante será, según esta interpretación,

$$\frac{1}{2}(3.140 + 13.520) = 8.330 \text{ kg.}$$

Se ve que ambas interpretaciones conducirán á secciones prácticamente iguales, al componer la sección del montante con hierros perfilados usuales.

La compresión de los montantes extremos se obtendrá calculando la reacción del apoyo cuando está cargado todo el tramo con la carga más desfavorable, que es la dada por el cuadro *b*, siendo la longitud de 32 m. Dicha carga es, por metro lineal,

$$\frac{1}{2}\left[6.200 + \frac{8}{20}(7.600 - 6.200)\right] = 3.380 \text{ kg.}$$

Y la reacción correspondiente del apoyo es

$$\frac{3.380 \times 32}{2} = 27.040 \text{ kg.}$$

La reacción del apoyo correspondiente á la carga permanente, es

$$\frac{785 \times 32}{2} = 12.560 \text{ kg.}$$

Luego la reacción total será

$$12.560 + 27.040 = 39.600 \text{ kg.}$$

Este será el esfuerzo máximo de compresión que deberán resistir los montantes extremos.

Es fácil ver que si el piso estuviera situado á la altura de las cabezas inferiores, este esfuerzo debería disminuirse en la carga que corresponde á los nudos extremos.

Conocemos ya todos los esfuerzos de las piezas que forman la viga, y sus secciones se determinarían por los procedimientos antes expuestos. Dichos esfuerzos se hallan inscritos en el diagrama *(c)* de la figura 124.

CAPÍTULO IX.

VIGAS PARABÓLICAS.

159. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA VIGA PARABÓLICA.—Entre los diversos sistemas de vigas cuyas cabezas son curvas, una de las más usadas es la viga parabólica, conocida de muchos Ingenieros por su nombre inglés, *bow-string*.

Posee esta viga propiedades muy notables, que vamos á dar á conocer, porque permiten calcular rápidamente y con mucha facilidad las tensiones y compresiones de las cabezas.

Sabemos que en una viga de luz l, apoyada por sus extremos y cargada de un peso p por metro lineal, el momento flector M, correspondiente á la abscisa x, viene dado por la ecuación

$$M = \frac{1}{2} p x (l - x).$$

Esta ecuación representa una parábola que pasa por los puntos de apoyo, y cuyo eje vertical coincide con la sección del centro de la viga.

Supongamos que la cabeza superior tenga la forma parabólica definida por la ecuación

$$y = A x (l - x)$$

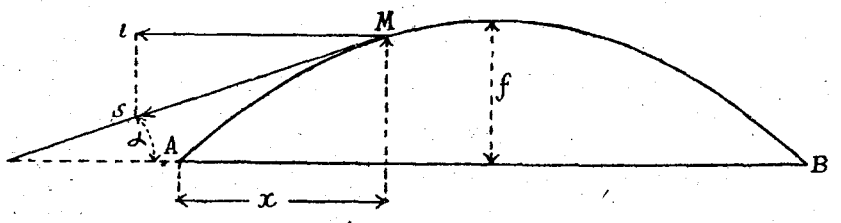
cuyas ordenadas son proporcionales á los momentos M, para abscisas iguales.

La cabeza inferior es rectilínea y horizontal, y admitimos que las cargas sigan obrando sobre ambas cabezas como si estuvieran

repartidas uniformemente en la proyección horizontal de la viga (fig. 126).

Podemos definir la forma de la parábola fijando la flecha f, ó sea

Fig 126.



la altura de la viga en el centro que, como en todas las vigas de grandes mallas, está comprendida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$ de la luz. En efecto, si sustituimos en vez de x, en la ecuación anterior, la mitad de la luz, $\frac{l}{2}$, la ordenada tomará el valor f, de modo que tendremos

$$f = A\ \frac{l^2}{4}$$

de donde resulta

$$A = \frac{4f}{l^2}$$

y la ecuación de la parábola se convierte en

$$y = \frac{4f}{l^2} \times x\ (l - x) \qquad [1]$$

en la cual todo es conocido, una vez fijado el valor de f.

Vamos á ver que, en un punto cualquiera situado á la distancia x del apoyo A, la tensión de la cabeza inferior ó la componente horizontal de la compresión de la cabeza superior, tiene un valor constante independiente de x.

Sabemos, en efecto, que el momento flector puede representarse por un par cuyas fuerzas son horizontales, y cuya altura es la de la viga; luego el valor de una de las fuerzas de este par, que es precisamente la tensión de la cabeza inferior ó la componente horizontal

de la compresión de la cabeza superior, será $\frac{M}{y}$, ó sea, llamando I á la fuerza buscada

$$I = \frac{M}{y} = \frac{1}{8}\,\frac{p\,l^2}{f} \quad (1)$$

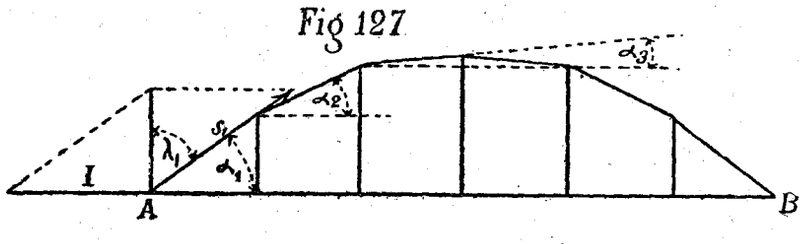
Se ve que en esta expresión no figura x, y que, por lo tanto, I tiene el mismo valor en todas las secciones de la viga.

Fácilmente se deduce el valor de la compresión S de la cabeza superior en un punto cualquiera M. Dicha compresión ha de ser tangente á la parábola, y su proyección horizontal es I. Si llamamos α al ángulo que la tangente forma con el eje de las x, el triángulo $i\,M\,s$ dará

$$S = \frac{I}{\cos\alpha} = \frac{p\,l^2}{8\,f\cos\alpha}.$$

En la práctica, la cabeza superior es generalmente un polígono inscrito en la parábola, y los pesos que actúan en el piso, situado á la altura de la cabeza inferior, se transmiten á los vértices de la superior por medio de piezas verticales equidistantes que obran por tensión. Cada una de ellas transmitirá el peso correspondiente á los dos semitramos contiguos, y, por consiguiente, sus secciones deberán ser iguales (fig. 127). En estas condiciones, el sistema se asemeja

Fig 127



mucho á un puente colgado, sin más diferencia que la sustitución del cable por un arco rígido de la misma forma, y se ve que no se

---

(1) Si en esta fórmula se hace $\frac{l}{2} = l'$, se obtiene la expresión conocida

$$I = \frac{p\,l'^2}{2\,f}$$

que representa la proyección horizontal constante de la tensión de un cable parabólico en las condiciones en que se hallan los cables de los puentes colgados, ó bien el empuje horizontal de un arco parabólico cargado de pesos uniformemente repartidos según su proyección horizontal.

necesitan diagonales, puesto que el equilibrio del sistema existe sin ellas. Veremos que las diagonales trabajan, cuando actúan sobre el tramo cargas parciales.

Las condiciones teóricas examinadas anteriormente se modifican algo en el sistema que estudiamos. En efecto, en cada uno de los trozos rectilíneos la cabeza superior sufre un esfuerzo constante, puesto que el ángulo con la horizontal no varía de un punto á otro, como cuando era curva.

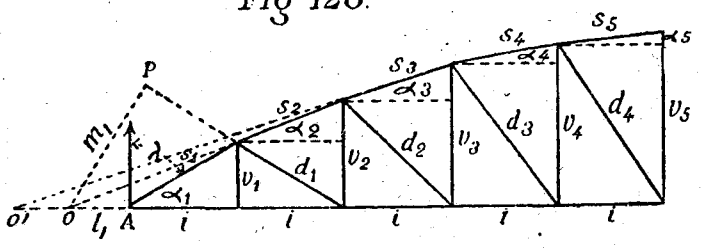
La tensión de la cabeza inferior sigue siendo constante en toda la viga. Para comprenderlo, basta observar que en las articulaciones inferiores sólo obra una fuerza vertical, y, por lo tanto, los dos trozos de la cabeza inferior que concurren en una cualquiera de ellas deben estar en equilibrio.

En cuanto á su valor, se modifica ligeramente, pero es fácil calcularlo directamente.

Conservaremos las notaciones empleadas en los capítulos anteriores y llamaremos S_1, S_2, S_3... á los esfuerzos de las piezas que componen la cabeza superior, I (sin sub-índice, puesto que es constante) el esfuerzo de la cabeza inferior, y V (también sin sub-índice por la misma razón) al esfuerzo correspondiente á las verticales.

Designaremos por las minúsculas correspondientes las longitudes de las diversas piezas, y por α_1, α_2, α_3... los ángulos que forman con la horizontal los trozos 1.°, 2.°, 3.°... de la cabeza superior (fig. 128).

Fig 128.



Las longitudes de las diversas piezas se calculan del modo siguiente. Conoceremos, desde luego, la magnitud i correspondiente á la cabeza inferior. Las longitudes v_1, v_2, v_3... de las verticales se hallarán sustituyendo en la ecuación [1] de la parábola i, $2i$, $3i$... en vez de x, de modo que tendremos

$$x = i \qquad v_1 = \frac{4f^2}{l^2} i\,(l - i)$$

$$x = 2i \qquad v_2 = \frac{8f^2}{l^2} i\,(l - 2i)$$

$$x = 3i \qquad v_3 = \frac{12f^2}{l^2} i\,(l - 3i)$$

. . . . . .

Para calcular la longitud de los trozos de la cabeza superior, bastará trazar una horizontal por el punto más bajo de cada uno de ellos, y se obtendrá un triángulo rectángulo en que el cateto horizontal es i, y el vertical la diferencia entre dos verticales consecutivas. Pueden obtenerse inmediatamente las tangentes de los ángulos α_1, α_2, α_3... que dichos trozos forman con la vertical.

Estas tangentes serán,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_1}{i}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{i}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{v_3 - v_2}{i}$$

. . . . . .

Una vez conocidas las tangentes se podrán determinar los ángulos y sus cosenos por medio de las tablas trigonométricas naturales, lo cual es más breve y más sencillo que el empleo de la fórmula conocida de Trigonometría, y se tendrá

$$s_1 = \frac{i}{\cos \alpha_1}$$

$$s_2 = \frac{i}{\cos \alpha_2}$$

. . . . .

Para calcular el valor de I, basta considerar el equilibrio en el apoyo izquierdo. Siendo A la reacción del apoyo, se descompondrá

entre las dos cabezas, y el triángulo rectángulo formado por las tres fuerzas, dará, llamando λ al ángulo de S_1 con la vertical (fig. 127),

$$I = A \operatorname{tg} \lambda$$

El valor de A, estando cargada la viga á razón de p kg. por metro lineal, será

$$A = \frac{1}{2} p l$$

y, por consiguiente,

$$I = \frac{1}{2} p l \operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{2} p l \frac{i}{v_1}.$$

Conocido el valor de I, se deducirán las compresiones de las piezas de la cabeza superior S_1, S_2, S_3... observando que su proyección horizontal es I; tendremos

$$S_1 = \frac{I}{\cos \alpha_1} = \frac{p l i}{2 v_1 \cos \alpha_1}$$

$$S_2 = \frac{I}{\cos \alpha_2} = \frac{p l i}{2 v_1 \cos \alpha_2} \qquad [3]$$

$$S_3 = \frac{I}{\cos \alpha_3} = \frac{p l i}{2 v_1 \cos \alpha_3}$$

. . . . . .

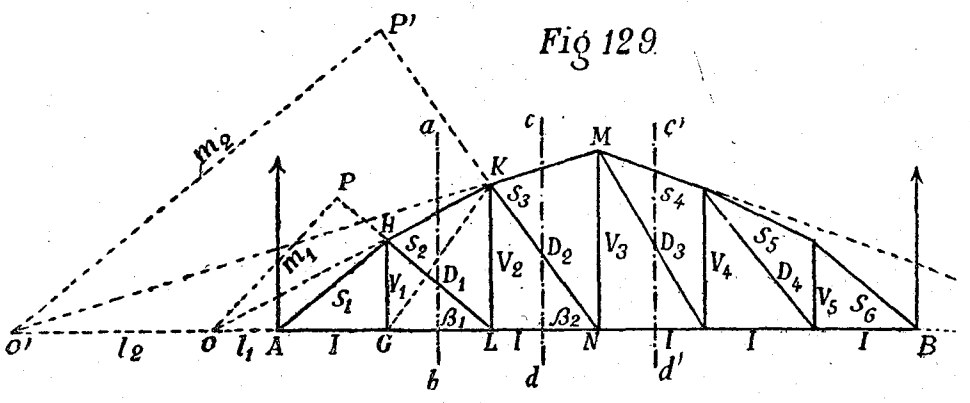
Como sabemos que las cabezas sufren los esfuerzos máximos cuando está cargado todo el tramo, las fórmulas que preceden servirán para calcular sus secciones, aunque, como sucede en los puentes, la viga puede estar sometida á cargas parciales. El valor de p será la suma, por metro lineal, de la carga permanente y de la accidental correspondientes al caso en que está cargado todo el tramo.

Pueden también calcularse los esfuerzos de las cabezas por el procedimiento general de los momentos ó método de Ritter, pero es más breve y más sencillo en la práctica el que hemos indicado.

160. Diagonales y verticales.—Pasemos á estudiar los esfuerzos que han de desarrollar las diagonales, y consideremos el sistema

de las que descienden de izquierda á derecha D_1, D_2, D_3 y D_4 de la figura 129. Como las diagonales no trabajan bajo la acción de la

Fig 129



carga permanente, bastará estudiar el efecto que producen en ellas las sobrecargas que corresponden á los esfuerzos máximo y mínimo.

Para determinar el esfuerzo máximo que corresponde á la diagonal D_1, habremos de suponer cargados los montantes V_2, V_3, V_4 y V_5 situados á la derecha del plano $a\,b$ que corta á las tres barras S_2, D_1, I. Deberemos escribir la ecuación de equilibrio de los momentos de las fuerzas que actúan á la izquierda de $a\,b$ con relación al punto O, en que se cortan las barras S_2 é I. Para poder escribir esta ecuación, necesitamos conocer los brazos de palanca $OP = m_1$ y $OA = l_1$ córrespondientes á las dos fuerzas que intervienen en ella, á saber, la tensión $D_1^{máx}$ que buscamos y la reacción $A_{máx}$ del apoyo.

Para calcular l_1, nos valdremos de los triángulos semejantes OHG, OKL que dan

$$\frac{OG}{GH} = \frac{OL}{KL} \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{l_1 + i}{v_1} = \frac{l_1 + 2i}{v_2}$$

de donde se deduce

$$v_2\, l_1 + v_2\, i = v_1\, l_1 + 2\, v_1\, i$$

y, por lo tanto,

$$l_1 = \frac{i\,(2\,v_1 - v_2)}{v_2 - v_1}.$$

m_1 se deducirá de la consideración del triángulo OPL, que da

$$m_1 = OL \times \text{sen } OLP = (l_1 + 2i) \text{ sen } \varepsilon_1.$$

La tangente del ángulo β_1 es $\frac{v_1}{i}$, y puede calcularse inmediatamente. Podría deducirse el seno por medio de la fórmula conocida de Trigonometría, pero es más sencillo y suficientemente exacto valerse de una tabla de líneas trigonométricas naturales en que se busca la tangente que más se aproxima á la calculada, y se toma el seno correspondiente al mismo ángulo, empleando la interpolación si fuese necesario.

Una vez conocidos m_1 y l_1, se calculará $A_1^{máx}$, reacción del apoyo correspondiente á la carga que estudiamos, y se deducirá $D_1^{máx}$ de la ecuación de los momentos con relación á O, que será

$$D_1^{máx} \times m_1 = A_1^{máx} \times l_1$$

de donde se saca

$$D_1^{máx} = A_1^{máx} \times \frac{l_1}{m_1}.$$

Para calcular $D_1^{mín}$, supondremos cargado el montante V_1. Es inútil considerar la carga en A, que queda directamente destruída por el apoyo.

Los brazos de palanca son los mismos que en el caso anterior, y además el del peso P aplicado en V_1, que es $l_1 + i$.

El valor de la reacción del apoyo se obtendrá escribiendo la ecuación de los momentos con relación al apoyo B; llamándole $A_1^{mín}$, y tomando momentos respecto á O, tendremos

$$D_1^{mín} \times m_1 - A_1^{mín} \times l_1 + P(l_1 + i) = 0$$

de donde se deducirá el valor de $D_1^{mín}$

$$D_1^{mín} = \frac{l_1}{m_1}(A_1^{mín} - P) - \frac{i}{m_1} P.$$

Del mismo modo se calcularán $D_2^{máx}$ y $D_2^{mín}$. Los brazos de pa-

lanca $O'P' = m_2$ y $O'A = l_2$ se deducirán de idénticas consideraciones que las que han servido para determinar m_1 y l_1. Así, para calcular l_2, consideraremos los triángulos semejantes $O'KL$, $O'MN$, y tendremos

$$\frac{O'L}{KL} = \frac{O'N}{MN}.$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\frac{l_2 + 2i}{v_2} = \frac{l_2 + 3i}{v_3}$$

de donde se deduce

$$v_3 l_2 + 2 v_3 i = v_2 l_2 + 3 v_2 i$$

y, por lo tanto,

$$l_2 = \frac{i(3 v_2 - 2 v_3)}{v_3 - v_2}.$$

El valor de m_2 se deducirá del triángulo rectángulo $O'P'N$, y será

$$m_2 = O'N \operatorname{sen} P'NO' = (l_2 + 3i) \operatorname{sen} \beta_2$$

sen β_2 se determinará como en el caso anterior, siendo conocida tg β_2, que es igual $\frac{v_2}{i}$, como se ve en el triángulo rectángulo KLN.

Conocidos los brazos de palanca, se calculará $D_2^{máx}$, suponiendo cargados los montantes V_3, V_4 y V_5. Se determinará la reacción $A_2^{máx}$ del apoyo A, correspondiente á esta carga, y se escribirá la ecuación de los momentos, alrededor de O', de $D_2^{máx}$ y $A_2^{máx}$, únicas fuerzas que obran á la izquierda del plano cd que corta á la viga.

Por el mismo procedimiento se determina $D_2^{mín}$, suponiendo cargados los montantes V_1 y V_2 situados á la izquierda del plano cd.

Al calcular $D_3^{máx}$ y $D_3^{mín}$, cortando la viga por el plano $c'd'$, se observa que el centro de momentos, que es la intersección de los lados S_4 é I está situado á la derecha de la viga; su distancia al punto B es igual á la ya calculada l_2, á causa de la simetría.

En este caso es más fácil el cálculo considerando las fuerzas que obran á la derecha del plano $c'\,d'$, y la misma observación se tendrá en cuenta para el cálculo de todas las diagonales situadas en la mitad de la derecha de la viga.

Al verificar los cálculos numéricos, se observa que el esfuerzo máximo y el mínimo correspondientes á una misma diagonal son siempre iguales y de signo contrario.

Se puede hacer que las diagonales trabajen únicamente por tensión, empleando, además de las diagonales indicadas en la figura, sus simétricas. En efecto, si consideramos la diagonal D_1, veremos que cuando la carga se extiende á los montantes situados á la derecha, esta diagonal sufrirá la tensión máxima que le corresponde. Cuando la carga obra á la izquierda, dicha diagonal experimentará una compresión igual y de signo contrario; pero es fácil ver que si añadimos la diagonal $K\,G$, ésta sufrirá bajo la acción de dicha carga la misma tensión que la D_4, cuando esta última trabaja al máximo. Por lo tanto, se puede constituir la diagonal D_1 con hierros planos incapaces de resistir por compresión, á condición de añadir la diagonal $K\,G$ simétrica de D_4, la cual á su vez tampoco sufrirá más que esfuerzos de extensión.

Lo mismo puede decirse respecto á la diagonal D_2. Puede constituirse de modo que sólo resista á la tensión máxima, colocando la otra diagonal $M\,L$ capaz de resistir al esfuerzo que desarrollaría en D_2 la máxima compresión, para lo cual $M\,L$ se hallará en las mismas condiciones que D_3 y deberá tener la misma sección que esta última.

En resumen, bastará calcular las secciones de las diagonales D_1, D_2, D_3, D_4 con arreglo á las tensiones máximas que les corresponden, y reproducirlas luego simétricamente partiendo del apoyo de la derecha.

Examinemos ahora los esfuerzos que deberán resistir los montantes. En primer lugar, cada montante resistirá, obrando por tensión, el peso permanente que se puede suponer concentrado en la articulación inferior.

De las cargas accidentales tendrá que resistir la parte que corresponde á cada articulación cuando está cargado todo el tramo, y también los esfuerzos máximos y mínimos debidos á las cargas par-

ciales. Habremos de elegir entre estos últimos aquel que sumado algebraicamente con el producido por la carga permanente dé el esfuerzo más desfavorable.

Debemos observar ante todo que, habiendo suprimido las diagonales comprimidas, los montantes no podrán desarrollar esfuerzos de tensión bajo la acción de las cargas parciales. Si consideramos, por ejemplo, el nudo K, veremos inmediatamente que si la diagonal D_2 sufre una tensión, no podrá existir el equilibrio estando sometido á tensión al mismo tiempo el montante V_2. Se deduce de aquí que sólo debemos considerar las cargas que producen en los montantes las máximas compresiones, ó sea los valores V_1^{min}, V_2^{min}, V_3^{min} .....

Al sumar estas compresiones con la tensión producida por la carga permanente, obtendremos generalmente tensiones inferiores á esta última, pues las compresiones debidas á la sobrecarga parcial son ordinariamente pequeñas, y, por consiguiente, el esfuerzo más desfavorable que obra sobre un montante es el que ya hemos determinado al considerar la viga cargada en toda su longitud, es decir, la suma de las cargas permanente y accidental que corresponden á una articulación. La sección será pues la misma en todos los montantes, y éstos sólo trabajarán por tensión. Pero, como deben transmitir también las pequeñas compresiones debidas á las sobrecargas parciales, aunque estas compresiones quedan siempre dominadas por la tensión que produce el peso permanente, se acostumbra en la práctica disponer los montantes con secciones capaces de trabajar por compresión. La sección es frecuentemente una doble **T**, de alma llena si lo exige el esfuerzo, ó de celosía si bastan las cabezas para resistir al esfuerzo que le corresponde.

Pasemos ya á estudiar detalladamente un ejemplo numérico.

161. Puente parabólico de 50 m. de luz para carretera, con 6 m. de ancho.—Empezaremos por determinar la forma de la viga y las dimensiones de todas sus piezas (figuras 128 y 130). Admitiremos que la altura de la viga en el centro sea de 7 m., de modo que en la ecuación de la parábola será $f = 7$ y $l = 50$. Dicha ecuación [1] se convertirá en

$$y = \frac{4 \times 7}{50^2} x\,(l - x) = 0{,}0112\, x\,(50 - x).$$

Adoptaremos como distancia entre los montantes, 5 m., y sustituyendo en vez de x los valores 5, 10, 15, 20 y 25 tendremos

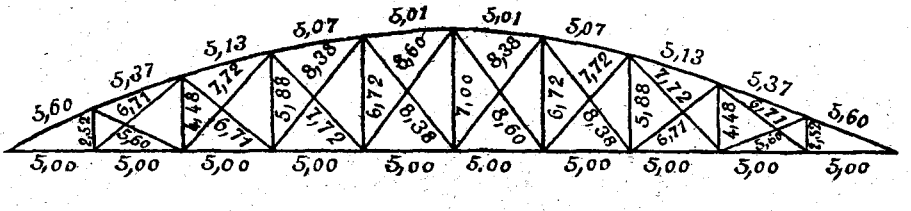
$$v_1 = 0{,}0112 \times 5\ (50 - 5) = 2{,}52 \text{ m.}$$
$$v_2 = 0{,}0112 \times 10\ (50 - 10) = 4{,}48\ »$$
$$v_3 = 0{,}0112 \times 15\ (50 - 15) = 5{,}88\ »$$
$$v_4 = 0{,}0112 \times 20\ (50 - 20) = 6{,}72\ »$$
$$v_5 = 0{,}0112 \times 25\ (50 - 25) = 7{,}00\ »$$

y en virtud de la simetría de la figura respecto á la vertical v_5,

$$v_6 = v_4 = 6{,}72 \text{ m.}$$
$$v_7 = v_3 = 5{,}88\ »$$
$$v_8 = v_2 = 4{,}48\ »$$
$$v_9 = v_1 = 2{,}52\ »$$

Para calcular las longitudes de los trozos de la cabeza superior, consideraremos los triángulos rectángulos obtenidos trazando la horizontal por el punto más bajo de cada uno. Calcularemos direc-

Fig 130.



tamente las tangentes de los ángulos α_1, α_2..., que forman con la horizontal, las tablas trigonométricas nos darán los cosenos correspondientes, y dividiendo por ellos el cateto horizontal $i = 5$ m., tendremos los valores de s_1, s_2... Se obtendrá así,

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{2{,}52}{5{,}00} = 0{,}5040;\ \cos \alpha_1 = 0{,}8929;\ s_1 = \frac{5}{0{,}8929} = 5{,}60 \text{ m.}$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{4{,}48 - 2{,}52}{5{,}00} = 0{,}3920;\ \cos \alpha_2 = 0{,}9311;\ s_2 = \frac{5}{0{,}9311} = 5{,}37\ »$$

$$\text{tg } \alpha_3 = \frac{5{,}88 - 4{,}48}{5{,}00} = 0{,}2800;\ \cos \alpha_3 = 0{,}9746;\ s_3 = \frac{5}{0{,}9746} = 5{,}13\ »$$

$$\text{tg } \alpha_4 = \frac{6{,}72 - 5{,}88}{5{,}00} = 0{,}1880;\ \cos \alpha_4 = 0{,}9861;\ s_4 = \frac{5}{0{,}9861} = 5{,}07\ »$$

$$\text{tg } \alpha_5 = \frac{7 - 6{,}72}{5{,}00} = 0{,}0560:\ \cos \alpha_5 = 0{,}9920;\ s_5 = \frac{5}{0{,}9920} = 5{,}01\ »$$

En virtud de la simetría de la figura tendremos

$$s_6 = s_5 = 5{,}01 \text{ m.}$$
$$s_7 = s_4 = 5{,}07 \text{ »}$$
$$s_8 = s_3 = 5{,}13 \text{ »}$$
$$s_9 = s_2 = 5{,}37 \text{ »}$$
$$s_{10} = s_1 = 5{,}60 \text{ »}$$

Las longitudes de las diagonales pueden calcularse por el mismo procedimiento aplicado á los triángulos rectángulos que forman con las verticales y los trozos de la cabeza inferior. Vamos á deducirlas del teorema de Pitágoras, para que el lector pueda juzgar por sí mismo las ventajas del procedimiento anterior.

Tendremos

$$d_1 = \sqrt{v_1^2 + i^2} = \sqrt{2{,}52^2 + 5^2} = 5{,}60 \text{ m.}$$
$$d_2 = \sqrt{v_2^2 + i^2} = \sqrt{4{,}48^2 + 5^2} = 6{,}71 \text{ »}$$
$$d_3 = \sqrt{v_3^2 + i^2} = \sqrt{5{,}88^2 + 5^2} = 7{,}72 \text{ »}$$
$$d_4 = \sqrt{v_4^2 + i^2} = \sqrt{6{,}72^2 + 5^2} = 8{,}38 \text{ »}$$
$$d_5 = \sqrt{v_5^2 + i^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8{,}60 \text{ »}$$
$$d_6 = \sqrt{v_6^2 + i^2} = \sqrt{6{,}72^2 + 5^2} = 8{,}38 \text{ »}$$
$$d_7 = \sqrt{v_7^2 + i^2} = \sqrt{5{,}88^2 + 5^2} = 7{,}72 \text{ »}$$
$$d_8 = \sqrt{v_8^2 + i^2} = \sqrt{4{,}48^2 + 5^2} = 6{,}71 \text{ »}$$

Puede observarse que las diagonales d_6, d_7 y d_8 son respectivamente iguales á las d_4, d_3 y d_2, lo que evita repetir el cálculo numérico.

Las longitudes de las diagonales que bajan de derecha á izquierda son respectivamente iguales á las de sus simétricas ya calculadas, y, por consiguiente, conocemos las longitudes de todas las piezas que forman la viga. Las longitudes calculadas están acotadas en la figura 130.

Vamos ahora á calcular los esfuerzos más desfavorables que les corresponden, empezando por las cabezas.

162. CÁLCULO DE LAS CABEZAS.—El peso por metro lineal de viga

se compondrá del peso permanente y de la sobrecarga. El primero comprende el peso de la parte metálica, y se deduce del cuadro del núm. 93, que da 356 kg. por metro superficial de planta. Teniendo presente que, sobre un metro lineal de viga, carga la mitad del ancho del puente, ó sea 3 m. superficiales, dicho peso será $3 \times 356 =$ 1.068 kg.

El peso del afirmado y de la capa de tierra se obtiene aproximadamente asignando un espesor medio de 0,35 m., y un peso de 1.800 kg. al metro cúbico de la capa de tierra y del firme como término medio, de modo que será $0{,}35 \times 3 \times 1.800 = 1.890$ kg.

La sobrecarga, á razón de 300 kg. por m.², será $3 \times 300 = 900$ kg. De modo que el peso correspondiente á 1 m. lineal de viga se obtendrá del modo siguiente:

Peso de la parte metálica, 3×356	=	1.068 kg.
Peso del afirmado, $0{,}35 \times 3 \times 1.800$	=	1.890 »
Carga permanente.....		2.958 »
Sobrecarga, 3×300.....		900 »
Carga total por metro lineal.....		3.858 »

Para facilitar las operaciones tomaremos 3.860 kg.
Calcularemos la reacción del apoyo que será

$$A = \frac{1}{2} \times 3.860 \times 50 = 96.500 \text{ kg.}$$

Hallaremos la tensión I correspondiente á todos los trozos de la cabeza inferior, descomponiendo A en las dos direcciones s_1 é I, y llamando λ al ángulo de s_1 con la vertical, tendremos

$$I = 96.500 \times \operatorname{tg} \lambda$$

Pero se ve en la figura que

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{i}{v_1} = \frac{5}{2{,}52}$$

luego

$$I = 96.500 \times \frac{5}{2{,}52} = 191.468 \text{ kg. (1).}$$

Conociendo I, que es la proyección horizontal de las compresiones de los diversos trozos de la cabeza superior, obtendremos dichas compresiones dividiendo por los cosenos de los ángulos que forman con la horizontal.

Llamando α_1, α_2, α_3... á los ángulos correspondientes á S_1, S_2, S_3.. tendremos

$$\cos \alpha_1 = \frac{i}{s_1}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{i}{s_2}$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{i}{s_3}.$$

. . . . .

---

(1) Si calculamos I suponiendo que el arco es exactamente parabólico en vez de ser poligonal, y que las cargas se reparten en este arco proporcionalmente á su proyección horizontal en vez de concentrarse en las articulaciones, encontraremos, aplicando la primera fórmula que hemos hallado,

$$I = \frac{p\,l^2}{8\,f} = \frac{3.860 \times \overline{50}^2}{7 \times 8} = 172.321 \text{ kg.}$$

El valor hallado en el texto se puede poner bajo la forma

$$I = \frac{1}{2} \times 3.860 \times 50 \times \frac{5{,}00}{2{,}52} = 191.468 \text{ kg.}$$

El factor $\frac{1}{2} \times 3.860 \times 50$ es común á ambas compresiones y está multiplicado en la primera por $\frac{50}{28}$, y en la segunda por $\frac{500}{252} = \frac{50}{25}$ muy aproximadamente. $\frac{50}{25}$ es la tangente del ángulo que forma la cuerda s_1 del arco parabólico con la vertical, y $\frac{50}{28}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente á la parábola en el apoyo con la vertical. En efecto, según una propiedad de la parábola, dicha tangente corta á la ordenada v_3 á una distancia $2f = 14$ de la cabeza inferior, y su tangente es, por lo tanto, $\frac{25}{14} = \frac{50}{28}$. Tal es la razón de la diferencia que se observa entre los dos valores. Es más exacto el segundo, porque las hipótesis en que se funda se acercan más á la verdad, toda vez que el arco se construye en general de forma poligonal, y los pesos obran sobre él concentrados en las articulaciones.

Luego los valores de S_1, S_2, S_3... de las compresiones que buscamos, serán

$$S_1 = \frac{I}{\cos \alpha_1} = I \times \frac{s_1}{i} = 191.468 \times \frac{5,60}{5,00} = 214.444 \text{ kg.}$$

$$S_2 = \frac{I}{\cos \alpha_2} = I \times \frac{s_2}{i} = 191.468 \times \frac{5,37}{5,00} = 205.640 \text{ »}$$

$$S_3 = \frac{I}{\cos \alpha_3} = I \times \frac{s_3}{i} = 191.468 \times \frac{5,13}{5,00} = 196.448 \text{ »}$$

$$S_4 = \frac{I}{\cos \alpha_4} = I \times \frac{s_4}{i} = 191.468 \times \frac{5,07}{5,00} = 194.149 \text{ »}$$

$$S_5 = \frac{I}{\cos \alpha_5} = I \times \frac{s_5}{i} = 191.468 \times \frac{5,01}{5,00} = 191.851 \text{ »}$$

Ahora, á causa de la simetría, tendremos

$$S_6 = S_5 = 191.851 \text{ kg.}$$
$$S_7 = S_4 = 194.149 \text{ »}$$
$$S_8 = S_3 = 196.448 \text{ »}$$
$$S_9 = S_2 = 205.640 \text{ »}$$
$$S_{10} = S_1 = 214.444 \text{ »}$$

Conocemos, por lo tanto, los esfuerzos correspondientes á las cabezas, y es ya fácil determinar las secciones. Se observa que la variación de las compresiones en la cabeza superior es pequeña relativamente á los valores absolutos de las mismas, y en la práctica se adopta generalmente una sección constante para facilitar la construcción.

163. CÁLCULO DE LAS DIAGONALES.—Las diagonales sólo trabajan bajo la acción de las sobrecargas parciales. Debemos, pues, considerar, en cada una de ellas, las que producen la tensión máxima y la tensión mínima, y siendo la sobrecarga de 900 kg. por metro lineal de viga, habrá que contar en cada articulación $5 \times 900 =$ 4.500 kg.

Empecemos por calcular los brazos de palanca que necesitamos conocer para establecer las ecuaciones de los momentos, es decir,

las distancias al apoyo de la viga de los puntos de encuentro de las cabezas correspondientes á cada malla, que hemos designado con la letra l afectada del mismo sub-índice que la diagonal que se considera; y la distancia del centro de momentos á la diagonal, que hemos designado por la letra m afectada del mismo sub-índice.

Para calcular l_1, consideraremos los triángulos rectángulos semejantes formados por la horizontal del apoyo, los dos montantes v_1 y v_2, y el lado s_2 prolongado hasta o. Dichos triángulos dan la proporción

$$\frac{l_1 + 2i}{v_2} = \frac{l_1 + i}{v_1},$$

de donde se saca

$$l_1 = \frac{i\,(v_2 - 2v_1)}{v_1 - v_2}$$

y sustituyendo los valores numéricos de v_1, v_2, é i

$$l_1 = \frac{5\,(4{,}48 - 2 \times 2{,}52)}{2{,}52 - 4{,}48} = 1{,}43 \text{ m.}$$

El triángulo rectángulo formado por m_1, d_1 y la horizontal dará, llamando β_1 al ángulo formado por d_1 con la horizontal,

$$m_1 = (l_1 + 2i) \operatorname{sen} \beta = 11{,}43 \operatorname{sen} \beta_1$$

pero vemos en la figura que

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{v_1}{i} = \frac{2{,}52}{5{,}00} = 0{,}504$$

Acudiendo á la tabla de las líneas trigonométricas naturales, vemos que al ángulo cuya tangente es 0,504 corresponde el seno 0,45, luego

$$m_1 = 11{,}43 \times 0{,}45 = 5{,}14 \text{ m.}$$

Del mismo modo calcularemos l_2 y m_2. Los triángulos semejantes nos darán

$$\frac{l_2 + 3i}{v_3} = \frac{l_2 + 2i}{v_2},$$

de donde se saca

$$l_2 = \frac{i\,(2\,v_3 - 3\,v_2)}{v_2 - v_3};$$

y sustituyendo valores numéricos

$$l_2 = \frac{5\,(2 \times 5{,}88 - 3 \times 4{,}48)}{4{,}48 - 5{,}88} = 6{,}00 \text{ m.}$$

Tendremos luego,

$$m_2 = (l_2 + 3\,i) \text{ sen } \beta_2 = 21 \times \text{sen } \beta_2$$

$$\text{tg } \beta_2 = \frac{v_2}{i} = \frac{4{,}48}{5{,}00} = 0{,}896.$$

Se deduce de las tablas de líneas trigonométricas sen $\beta_2 = 0{,}667$. Y, por lo tanto,

$$m_2 = 21 \times 0{,}667 = 14 \text{ m.}$$

Calculemos l_3 y m_3. Tendremos la proporción

$$\frac{l_3 + 4\,i}{v_4} = \frac{l_2 + 3\,i}{v_3};$$

de donde se saca

$$l_3 = \frac{i\,(3\,v_4 - 4\,v_3)}{v_3 - v_4} = \frac{5\,(3 \times 6{,}72 - 4 \times 5{,}88)}{5{,}88 - 6{,}72} = 20 \text{ m.}$$

El valor de m_3 será

$$m_3 = (l_3 + 4\,i) \text{ sen } \beta_3 = 40 \text{ sen } \beta_3.$$

Además

$$\text{tg } \beta_3 = \frac{v_3}{i} = \frac{5{,}88}{5{,}00} = 1{,}176,$$

luego, tomando en las tablas el seno de β_3, que es 0,762,

$$m_3 = 40 \times 0{,}762 = 30{,}48 \text{ m.}$$

Pasemos á calcular l_4 y m_4. Los triángulos semejantes darán

$$\frac{l_4 + 5i}{v_5} = \frac{l_4 + 4i}{v_4},$$

de donde se deduce

$$l_4 = \frac{i\,(4\,v_5 - 5\,v_4)}{v_4 - v_5} = \frac{5\,(4 \times 7 - 5 \times 6{,}72)}{6{,}72 - 7} = 100\text{ m}.$$

El valor de m_4 será

$$m_4 = (l_4 + 5\,i)\ \text{sen}\ \beta_4 = 125\ \text{sen}\ \beta_4.$$

Además tendremos

$$\text{tg}\ \beta_4 = \frac{v_4}{i} = \frac{6{,}72}{5{,}00} = 1{,}344.$$

De donde se deduce, según las tablas,

$$m_4 = 125 \times 0{,}80 = 100\text{ m}.$$

Todos los demás valores de l y m son iguales á los calculados, en virtud de la simetría, y al calcular las diagonales restantes á partir de la d_5 inclusive, todos los razonamientos se han de referir al apoyo de la derecha, por las razones que hemos indicado anteriormente.

Podemos ya calcular las tensiones máxima y mínima de las diagonales.

$D_1^{máx}$ se obtendrá suponiendo cargados los montantes v_2 á v_9. La reacción del apoyo $a_1^{máx}$, correspondiente á esta carga, es

$$a_1^{máx} = \frac{4{,}500}{10}\,(8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 16.200\text{ kg}.$$

Suponiendo cortada la viga por un plano vertical entre los montantes v_1 y v_2, las fuerzas que obran á la izquierda de la sección son $D_1^{máx}$ y $a_1^{máx}$, y la ecuación de los momentos será

$$D_1^{máx} \times m_1 = a_1^{máx} \times l_1$$

de donde se deduce

$$D_1^{máx} = \frac{a_1^{máx} \times l_1}{m_1} = \frac{16.200 \times 1{,}43}{5{,}14} = 4.506\text{ kg}.$$

Para calcular D_1^{min}, se supone cargado el montante v_1. Es inútil considerar la carga sobre el nudo del apoyo, que queda directamente destruída por la reacción del mismo. Prescindiendo de esta parte, la reacción del apoyo que ha de intervenir en la ecuación es

$$a_1^{min} = 4.500 \times \frac{9}{10} = 4.050 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos de las fuerzas que obran á la izquierda del plano secante será

$$D_1^{min} \times m_1 - a_1^{min} \times l_1 - 4.500\,(l_1 + i) = 0,$$

de donde se deduce

$$D_1^{min} = -4.506 \text{ kg.}$$

Se observa que es igual y de signo contrario á $D_1^{máx}$.

Para calcular $D_2^{máx}$, se suponen cargados los montantes v_3 á v_9.

La reacción del apoyo es

$$a_2^{máx} = \frac{4.500}{10}\,(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 12.600 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos será

$$D_2^{máx} \times m_2 = a_2^{máx} \times l_2.$$

Se deduce

$$D_2^{máx} = \frac{a_2^{máx} \times l_2}{m_2} = \frac{12.600 \times 6}{14} = 5.400 \text{ kg.}$$

D_2^{min} se calculará suponiendo cargados los montantes v_1 y v_2. La reacción del apoyo es

$$a_2^{min} = \frac{4.500}{10}\,(9 + 8) = 7.650 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos se escribirá

$$D_2^{min} \times m_2 - a_2^{min} \times l_2 + 4.500\,(l_2 + i) + 4.500\,(l_2 + 2i) = 0.$$

Haciendo las sustituciones, y efectuando los cálculos numéricos, resulta

$$D_2^{mín} = -5.400 \text{ kg.}$$

Vemos que también es igual y de signo contrario á $D_2^{máx}$. Esta es una ley general en las vigas parabólicas, y permite calcular solamente uno de los esfuerzos para cada diagonal. En general calcularemos el máximo para las diagonales de la mitad de la izquierda, porque conduce á una ecuación de momentos que sólo tiene dos términos, y es más breve el cálculo numérico. Para las diagonales de la mitad de la derecha conviene, por el contrario, calcular el valor mínimo, puesto que habiendo de considerar las fuerzas situadas á la derecha de la sección, la ecuación que contendrá sólo dos términos será la que corresponde al valor mínimo.

Se obtendrá $D_3^{máx}$, suponiendo cargados los montantes v_4 á v_9.

La reacción $a_3^{máx}$, del apoyo, será

$$a_3^{máx} = \frac{4.500}{10}(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 9.450 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos es

$$D_3^{máx} \times m_3 = a_3^{máx} \times l_3,$$

de donde se deduce

$$D_3^{máx} = \frac{a_3^{máx} \times l_3}{m_3} = \frac{9.450 \times 20}{30,48} = 6.233 \text{ kg.}$$

Podemos escribir inmediatamente

$$D_3^{mín} = -6.233 \text{ kg.}$$

Los montantes cargados para calcular $D_4^{máx}$, serán los v_5 á v_9.

La reacción del apoyo es

$$a_4^{máx} = \frac{4.500}{10}(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 6.750 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos es

$$D_4^{máx} \times m_4 = a_4^{máx} \times l_4$$

$$D_4^{máx} = \frac{a_4^{máx} \times l_4}{m_4} = \frac{6.750 \times 100}{100} = 6.750 \text{ kg.}$$

Se deduce además

$$D_4^{mín} = -6.750 \text{ kg.}$$

Al calcular D_5, vemos que el centro de momentos está situado á la derecha de la viga, y por las razones ya indicadas, deberemos determinar la reacción $b_5^{mín}$ del apoyo derecho y calcular $D_5^{mín}$, considerando, para establecer la ecuación de los momentos, las fuerzas situadas á la derecha del plano secante, que será un plano vertical comprendido entre los montantes v_5 y v_6.

Los montantes cargados serán, por consiguiente, los situados á la izquierda, es decir, de v_1 á v_5.

La reacción del apoyo de la derecha se obtendrá tomando los momentos con relación al apoyo de la izquierda, y será

$$b_5^{mín} = \frac{4.500}{10}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 6.750 \text{ kg.}$$

Además sabemos que

$$l_5 = l_4 = 100 \text{ m.}$$
$$m_5 = m_4 = 100 \text{ »}$$

Luego la ecuación de los momentos será (obsérvese el sentido en que las fuerzas tienden á hacer girar á sus puntos de aplicación)

$$D_5^{mín} \times m_5 = -b_5^{mín} \times l_5$$

de donde se deduce

$$D_5^{mín} = -\frac{b_5^{mín} \times l_5}{m_5} = -\frac{6.750 \times 100}{100} = -6.750 \text{ kg.}$$

y además,

$$D_5^{máx} = 6.750 \text{ kg.}$$

Calcularemos ahora, D_6^{min}, suponiendo cargados los montantes v_1 á v_6. La reacción del apoyo de la derecha será

$$b_6^{min} = \frac{4.500}{10}\ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 9.450 \text{ kg.}$$

Los brazos de palanca son

$$l_6 = l_3 = 20 \quad \text{m.}$$
$$m_6 = m_3 = 30{,}48 \ \text{»}$$

La ecuación de los momentos será

$$D_6^{min} \times m_6 = - b_3^{min} \times l_6$$

de donde se saca

$$D_6^{min} = - \frac{b_3^{min} \times l_6}{m_6} = - \frac{9.450 \times 20}{30{,}48} = - 6.233 \text{ kg.}$$

y, por consiguiente,

$$D_6^{máx} = 6.233 \text{ kg.}$$

Para calcular D_7^{min}, se suponen cargados los montantes v_1 á v_7. La reacción del apoyo derecho, para esta carga, será

$$b_7^{min} = \frac{4.500}{10}\ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 12.600 \text{ kg.}$$

Los brazos de palanca son

$$l_7 = l_2 = 6{,}00 \text{ m.}$$
$$m_7 = m_2 = 14{,}00 \ \text{»}$$

La ecuación de los momentos es

$$D_7^{min} \times m_7 = - b_7^{min} \times l_7$$

luego

$$D_7^{min} = - \frac{b_7^{min} \times l_7}{m_7} = - \frac{12.600 \times 6}{14} = - 5.400 \text{ kg.}$$

y además

$$D_7^{máx} = 5.400 \text{ kg.}$$

D_8^{min} se calculará suponiendo cargados los montantes v_1 á v_8. La reacción del apoyo es

$$b_8^{min} = \frac{4.500}{10}(1+2+3+4+5+6+7+8) = 16.200 \text{ kg.}$$

Los brazos de palanca son

$$l_8 = l_1 = 1{,}43 \text{ m.}$$
$$m_8 = m_1 = 5{,}14 \text{ »}$$

La ecuación de los momentos es

$$D_8^{min} \times m_8 = - b_8^{min} \times l_8$$

de donde se deduce

$$D_8^{min} = - \frac{b_8^{min} \times l_8}{m_8} = - \frac{16.200 \times 1{,}43}{5{,}14} = - 4.506 \text{ kg.}$$

y, por lo tanto,

$$D_8^{máx} = 4.506 \text{ kg.}$$

Las secciones de las diagonales se formarán con dos chapas planas y se calcularán con arreglo á las tensiones máximas que se han determinado. Deberán entrar también en la composición de las vigas las diagonales del sistema opuesto, es decir, las que bajan de derecha á izquierda, y á cada una de ellas le corresponderá la misma sección que á su simétrica, que ha sido calculada directamente.

164. Montantes.—Réstanos únicamente determinar la sección de los montantes verticales.

Suponiendo que todo el peso permanente actúe en las articulaciones inferiores, corresponderá á cada una un peso de

$$5 \times 2.958 = 14.790 \text{ kg.,}$$

y ésta será la tensión permanente que sufre cada montante, cuando no está cargado el puente.

En rigor, este valor es exagerado; puede admitirse, como lo hemos hecho al tratar de las vigas rectas de montantes y cruces de San Andrés, que este peso se reparte entre la articulación superior

y la inferior de cada montante, correspondiendo á la primera la mitad del peso de la viga y el peso del arriostramiento superior, y á la segunda la otra mitad del peso de la viga, el piso metálico y el afirmado. El peso correspondiente á la articulación inferior sería en este caso la tensión del montante. Pero, como esta repartición es enteramente hipotética, admitiremos el límite superior que alcanzaría en el caso en que todo el peso gravitara sobre la articulación inferior, ó sea los 14.790 kg. hallados. Hemos visto que de la sobrecarga, corresponde á cada nudo un peso de $5 \times 900 = 4.500$ kg.

La tensión total de un montante será, por lo tanto,

$$14.790 + 4.500 = 19.290 \text{ kg.}$$

Debemos examinar, sin embargo, los esfuerzos que desarrollan en los montantes las cargas parciales, para ver si pueden ser más desfavorables que los que acabamos de determinar.

Según hemos indicado anteriormente, basta determinar los esfuerzos de compresión, puesto que no pudiendo las cargas parciales desarrollar compresiones en las diagonales, no podrán tampoco dar lugar á tensiones en las verticales, por ser imposible el equilibrio en tales condiciones; por consiguiente, bastará calcular los esfuerzos mínimos correspondientes á los montantes.

Para determinar V_1^{min}, deberemos suponer cortado este montante por un plano paralelo á la diagonal d_1, y el centro de momentos será el apoyo izquierdo, punto de intersección de s_1 con la cabeza inferior. Los montantes cargados serán los situados á la derecha del plano secante, es decir, de v_2 á v_9.

La reacción a_1^{min} del apoyo será

$$a_1^{min} = \frac{4.500}{10}(8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 16.200 \text{ kg.}$$

Pero, como el brazo de palanca de esta fuerza es cero, tendremos

$$V_1^{min} = 0$$

Se calculará V_2^{min}, considerando cargados los montantes V_3 á V_9. La reacción del apoyo será

$$a_2^{min} = \frac{4.500}{10}(7+6+5+4+3+2+1) = 12.600 \text{ kg.}$$

Es fácil ver, cortando el montante V_2 por un plano paralelo á d_2, que el centro de momentos estará á la distancia l_1 á la izquierda del apoyo, es decir, que será el mismo que nos sirvió para el cálculo de la diagonal d_1.

Según eso, la ecuación de los momentos será

$$-V_2^{min} \times (l_1 + 2i) - a_2^{min} \times l_1 = 0$$

de donde se deduce

$$V_2^{min} = -\frac{a_2^{min} \times l_1}{l_1 + 2i} = -\frac{12.600 \times 1{,}43}{11{,}43} = -1.576 \text{ kg.}$$

V_3^{min} se obtendrá suponiendo cargados los montantes V_4 á V_9. La reacción del apoyo es

$$a_3^{min} = \frac{4.500}{10}(6+5+4+3+2+1) = 9.450 \text{ kg.}$$

El centro de momentos estará á la distancia l_2 del apoyo izquierdo, y la ecuación de los momentos será

$$-V_3^{min} \times (l_2 + 3i) - a_3^{min} \times l_2 = 0$$

de donde se saca

$$V_3^{min} = -\frac{a_3^{min} \times l_2}{l_2 + 3i} = -\frac{9.450 \times 6}{21} = -2.700 \text{ kg.}$$

Para calcular V_4^{min}, supondremos cargados los montantes V_5 á V_9. El centro de momentos está á la distancia l_3 del apoyo izquierdo. La reacción del apoyo es

$$a_4^{min} = \frac{4.500}{10}(5+4+3+2+1) = 6.750 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos es

$$-V_4^{min} \times (l_3 + 4i) - a_4^{min} \times l_3 = 0$$

de donde se deduce

$$V_4^{min} = - \frac{a_4^{min} \times l_3}{l_3 + 4\,i} = - \frac{6.750 \times 20}{40} = - 3.375 \text{ kg.}$$

V_5^{min} se calculará suponiendo cargados los montantes V_6 á V_9. La reacción del apoyo es

$$a_5^{min} = \frac{4.500}{10} (4 + 3 + 2 + 1) = 4.500 \text{ kg.}$$

La distancia del centro de momentos al apoyo izquierdo es $l_4 = 100$.

La ecuación será

$$- V_5^{min} \times (l_4 + 5\,i) - a_5^{min} \times l_4 = 0$$

de donde se deduce

$$V_5^{min} = - \frac{a_5^{min} \times l_4}{l_4 + 5\,i} = - \frac{4.500 \times 100}{125} = - 3.600 \text{ kg.}$$

Calcularemos V_6^{min}, suponiendo cargados los montantes v_7, v_8 y v_9.

Ahora el centro de momentos está á la derecha de la viga y á la distancia $l_5 = 100$ m. del apoyo derecho. Estableceremos la ecuación entre las fuerzas que quedan á la derecha del plano secante.

La reacción del apoyo derecho es

$$b_6^{min} = \frac{4.500}{10} (7 + 8 + 9) = 10.800 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos, teniendo presente que ahora deben figurar las cargas de los montantes, será

$$- V_6^{min} \times (l_5 + 4\,i) + b_6^{min} \times l_5 - 4.500 \times (l_5 + i) - 4.500 \times \times (l_5 + 2\,i) - 4.500 \times (l_5 + 3\,i) = 0$$

ó haciendo las sustituciones numéricas

$$- V_6^{min} \times 120 + 10.800 \times 100 - 4.500 \times 330 = 0$$

de donde se deduce

$$V_6^{min} = -3.375 \text{ kg.}$$

Para calcular V_7^{min}, se supondrán cargados los montantes v_8 y v_9. El centro de momentos está á la derecha de la viga y á la distancia $l_6 = 20$ m. del apoyo. La reacción del apoyo derecho es

$$b_7^{min} = \frac{4.500}{10}(8 + 9) = 7.650 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos será

$$-V_7^{min} \times (l_6 + 3i) + b_7^{min} \times l_6 - 4.500 \times (l_6 + i) - 4.500 \times \times (l_6 + 2i) = 0$$

Y después de las sustituciones numéricas,

$$-V_7^{min} \times 35 + 7.650 \times 20 - 4.500 \times 55 = 0$$

Se deduce

$$V_7^{min} = -2.700 \text{ kg.}$$

Finalmente, obtendremos V_8^{min}, considerando cargado el montante v_9. El centro de momentos está á la derecha del apoyo derecho y á la distancia $l_7 = 6$ m.; la reacción del apoyo será

$$b_8^{min} = \frac{4.500}{10} \times 9 = 4.050 \text{ kg.}$$

La ecuación de los momentos es

$$-V_8^{min} \times (l_7 + 2i) + b_8^{min} \times l_7 - 4.500 \times (l_7 + i) = 0$$

ó haciendo las sustituciones,

$$-V_8^{min} \times 16 + 4.050 \times 6 - 4.500 \times 11 = 0$$

de donde se deduce

$$V_8^{min} = -1.576 \text{ kg.}$$

Conocidos los esfuerzos que producen en los montantes las cargas

parciales más desfavorables, obtendremos los totales que deberán resistir cuando actúen estas cargas, sumándolos algebráicamente con el debido á la carga permanente, ó sea V^{π}. De modo que dichos esfuerzos serán

$$V_1 = V_\pi + V_1^{min} = 14.790 \text{ kg.}$$

$$V_2 = V_\pi + V_2^{min} = 14.790 - 1.576 = + 13.214 \text{ kg.}$$

$$V_3 = V_\pi + V_3^{min} = 14.790 - 2.700 = + 12.090 \text{ »}$$

$$V_4 = V_\pi + V_4^{min} = 14.790 - 3.375 = + 11.415 \text{ »}$$

$$V_5 = V_\pi + V_5^{min} = 14.790 - 3.600 = + 11.190 \text{ »}$$

$$V_6 = V_\pi + V_6^{min} = 14.790 - 3.375 = + 11.415 \text{ »}$$

$$V_7 = V_\pi + V_7^{min} = 14.790 - 2.700 = + 11.090 \text{ »}$$

$$V_8 = V_\pi + V_8^{min} = 14.790 - 1.576 = + 13.214 \text{ »}$$

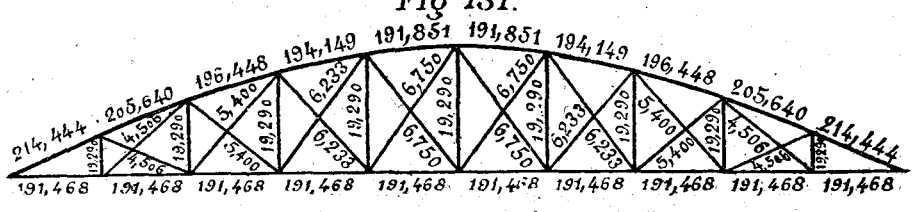
$$V_9 = V_\pi + V_9^{min} = 14.790$$

Se ve que todos estos esfuerzos son de tensión, é inferiores al ya calculado para el caso en que todo el tramo está cargado, que, como hemos visto, es 19.290 kg.

En definitiva, éste es el esfuerzo más desfavorable que podrán tener que resistir los montantes, y con arreglo á él se determina su sección.

Los esfuerzos más desfavorables calculados para todas las piezas de la viga se hallan resumidos en el siguiente cuadro, y en la figura 131. Las longitudes de las piezas se pueden ver en la figura 130.

Fig 131.



Esfuerzos de las piezas de la viga.

Cabeza superior. Compresiones. — *Kilogramos.*	Cabeza inferior. Tensiones. — *Kilogramos.*	Diagonales. Tensiones. — *Kilogramos.*	Montantes. Tensiones. — *Kilogramos.*
$S_1 = 214.444$	$I_1 = 191.468$	$D_1 = 4.506$	$V_1 = 19.290$
$S_2 = 205.670$	$I_2 = 191.468$	$D_2 = 5.400$	$V_2 = 19.290$
$S_3 = 196.448$	$I_3 = 191.468$	$D_3 = 6.233$	$V_3 = 19.290$
$S_4 = 194.149$	$I_4 = 191.468$	$D_4 = 6.750$	$V_4 = 19.290$
$S_5 = 191.851$	$I_5 = 191.468$	$D_5 = 6.750$	$V_5 = 19.290$
$S_6 = 191.851$	$I_6 = 191.468$	$D_6 = 6.233$	$V_6 = 19.290$
$S_7 = 194.149$	$I_7 = 191.468$	$D_7 = 5.400$	$V_7 = 19.290$
$S_8 = 196.448$	$I_8 = 191.468$	$D_8 = 4.506$	$V_8 = 19.290$
$S_9 = 205.670$	$I_9 = 191.468$	»	$V_9 = 19.290$
$S_{10} = 214.444$	$I_{10} = 191.468$	»	»

CAPÍTULO X.

APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS AL CÁLCULO DE LAS VIGAS DE GRANDES MALLAS.

---

165. VIGAS RECTAS.—Hemos visto en los capítulos anteriores que el cálculo de todos los sistemas de celosía de grandes mallas con cabezas rectas se reduce siempre al de uno de los diagramas simples *(a)* de las figuras 132 y 133, ó de los dos, como sucede en la viga

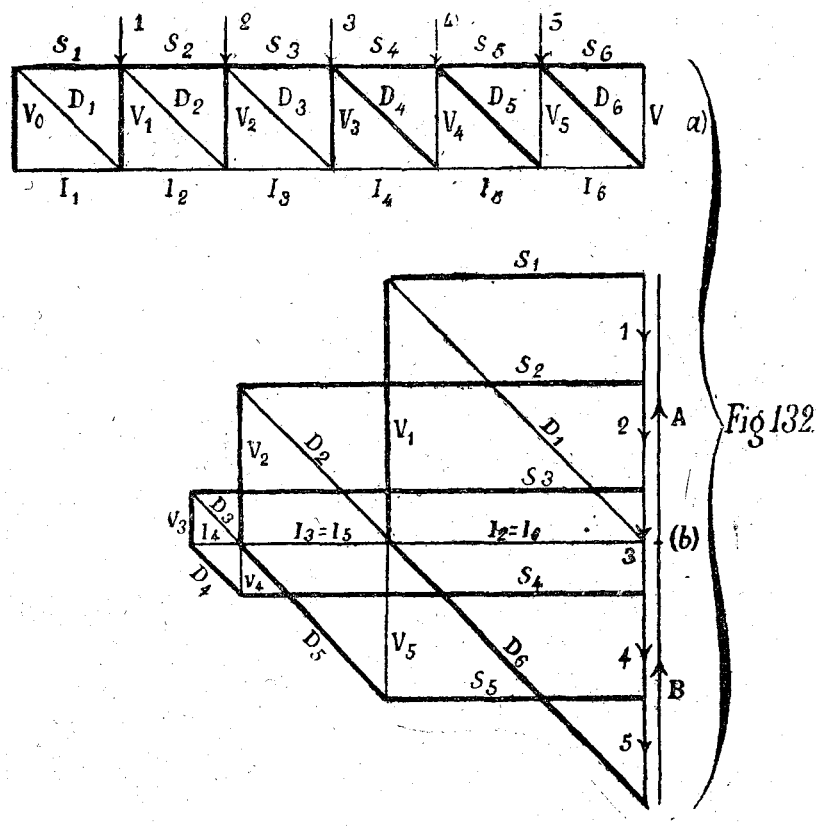


Fig 132

de montantes y cruces de San Andrés. Por consiguiente, bastará, para poder aplicar los procedimientos gráficos al cálculo de las vigas

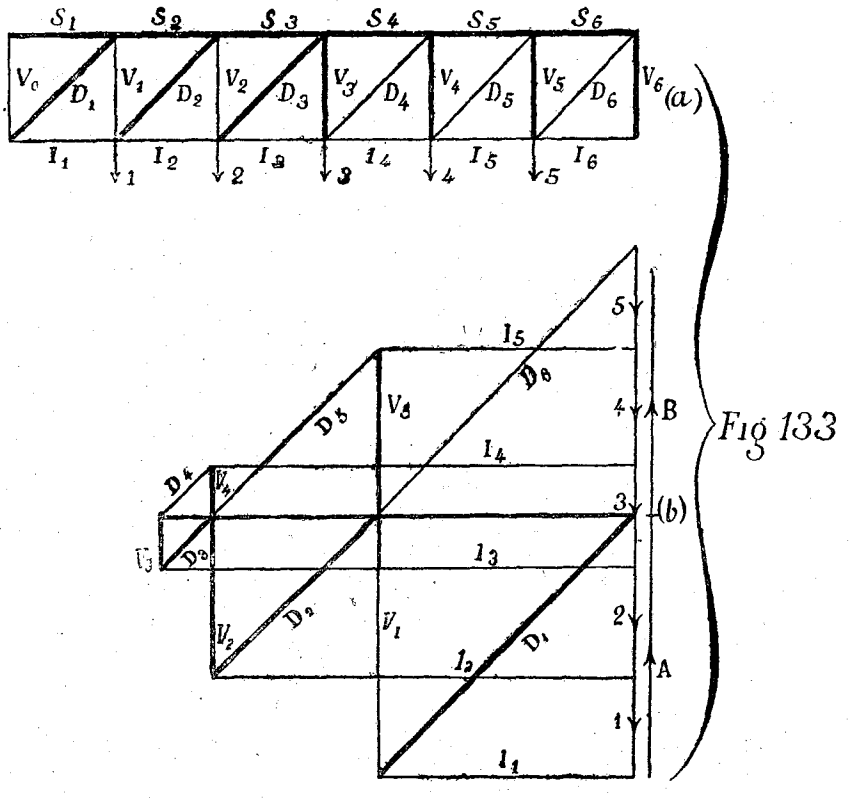


Fig 133

rectas de grandes mallas, estudiar dichos sistemas simples en las condiciones que se han definido oportunamente respecto á las cargas.

166. Cálculo de las cabezas.—Para calcular las cabezas, debemos suponer aplicada la sobrecarga á todo el tramo. Admitamos, para fijar las ideas, que el piso esté situado á la altura de las cabezas superiores, y se aplique, lo mismo que el peso permanente, en las articulaciones de dicha cabeza.

Sobre todas ellas obrarán pesos iguales que representamos en la figura 132, y llamaremos 1, 2, 3, 4 y 5. Prescindimos de los correspondientes á los apoyos, que no intervienen en el equilibrio general del sistema, puesto que este equilibrio subsistirá aunque supongamos trasladado el apoyo al extremo superior de V_0 y al inferior del V_6, suprimiendo dichos montantes y las piezas I_1 y S_6. Claro está que si la viga hubiera de apoyarse por su parte inferior, dichos mon-

tantes deberían resistir la reacción del apoyo correspondiente al caso en que está cargada toda la viga, y para determinar esta reacción, habría que tener en cuenta las cargas correspondientes á los nudos extremos.

Según esto, podemos determinar los esfuerzos de las cabezas de la viga aplicando la construcción de las figuras recíprocas estudiada en el capítulo IV de la primera parte. Vamos á seguir en todos sus detalles dicha construcción, que está representada en *(b)* (fig. 132).

Se empieza por trazar el polígono de las fuerzas, llevando á continuación unas de otras las 1, 2, 3, 4 y 5, que en este caso quedan en una misma vertical, como se ve á la derecha de la figura.

Cierran el polígono las reacciones B y A dirigidas hacia arriba, é iguales entre sí, á causa de la simetría de las cargas respecto á la vertical del punto medio de la viga.

En el extremo superior de V_0 (que consideramos como punto de apoyo de la viga) obran las tres fuerzas siguientes: la reacción A del apoyo y las tensiones D_1 y S_1 que concurren en dicho punto. Como A es conocida, bastará para determinar S_1 y D_1, trazar por el extremo superior de A una paralela á S_1, y por el inferior, otra paralela á D_1; se obtiene así el triángulo que se observa en la figura *(b)*, el cual da á conocer S_1 y D_1. Para saber el sentido en que obran, basta recorrer el triángulo partiendo de la parte inferior de la vertical. Esta fuerza está dirigida hacia arriba; luego la S_1 se dirige hacia la izquierda y *empuja* al punto de apoyo, y la D_1 se dirige hacia abajo *tirando* de su punto de aplicación. Es decir, que S_1 es una compresión, y D_1 una tensión.

Pasemos á considerar el equilibrio en el nudo inferior del montante V_1. Prescindiendo de la barra I_1 que, como hemos visto, es superflua, obran en él la fuerza conocida D_1 y las desconocidas V_1 é I_2. Trazaremos en la figura *(b)* las paralelas correspondientes, V_1 por el extremo superior, é I_2 por el inferior de dicha fuerza D_1; obtendremos así el triángulo rectángulo que se ve en la figura, el cual determina V_1 é I_2, y para ver el sentido en que obran, recorreremos el triángulo partiendo del extremo inferior de D_1, puesto que dicha diagonal tira hacia el apoyo á su punto de aplicación; luego

V_1 obra hacia abajo *oprimiendo* á la articulación, é I_2 hacia la izquierda. V_1 es una compresión, é I_2 una tensión.

La articulación inmediata, cuyo equilibrio podemos estudiar, es la superior de V_1. En ella son conocidas las fuerzas V_1, S_1 y 1, y desconocidas las S_2 y D_2. En la figura *(b)*, las tres primeras se presentan á continuación una de otra con el sentido que les corresponde, y en el mismo orden en que se presentan en la figura *(a)* partiendo de V_1, y girando hacia la izquierda. Para obtener S_2 y D_2, basta trazar la paralela á la barra S_2 por el extremo inferior del peso 1, y la paralela á D_2 por el inferior de V_1. Recorriendo el polígono obtenido en el orden V_1, S_1, 1, S_2, D_2, se ve que S_2 es una compresión, y D_2 una tensión.

En el nudo inferior de V_2, conocemos I_2 y D_2, y podremos determinar las V_2 é I_3 trazando la paralela al montante por el extremo superior de D_2, y la paralela á la cabeza inferior por el origen de I_2. El polígono parte del origen de la reacción A, y consta de los lados I_2, D_2, V_2, I_3, terminando este último en el origen de la reacción A. Se ve que V_2 es una compresión, é I_3 una tensión.

Pasamos á estudiar el equilibrio en el nudo superior de V_2, en el cual son conocidas las fuerzas V_2, S_2 y 2, y se deben determinar las S_3 y D_3. Se seguirá, en la figura *(b)*, el contorno poligonal correspondiente en el orden en que hemos enumerado las fuerzas, y se dirigirá por el extremo inferior de 2 la paralela á S_3, y por el origen de V_2 la paralela á D_3. Recorriendo este polígono, empezando por el origen de V_2, se verá que S_3 es una compresión y D_3 una tensión.

En el nudo inferior de V_3, conocemos I_3 y D_3; por el extremo superior de ésta trazaremos la vertical V_3 (en la figura *b)*, y por el origen de I_3 la horizontal I_4 hasta encontrar á la vertical V_3. El polígono cerrado que se obtiene se recorre partiendo de I_3, y será I_3, D_3, V_3, I_4, lo cual hacer ver que V_3 es una compresión y D_3 una tensión.

En el extremo superior de V_3 son conocidas las fuerzas V_3, S_3 y 3. En el polígono correspondiente de la figura *(b)*, trazaremos por el extremo del peso 3 la S_4 horizontal, y por el origen de V_3, la paralela á la diagonal hasta encontrar á la anterior, de modo que obtenemos S_4 y D_4. Recorriendo el polígono V_3, S_3, 3, S_4, D_4, vemos que esta

última fuerza empuja á la articulación, y es, por consiguiente, una compresión, lo mismo que S_4.

En el nudo inferior de V_4, son conocidas I_4 y D_4; buscando estas fuerzas en la figura *(b)*, completaremos el polígono por medio de la vertical V_4 y la horizontal I_5 que vemos que coincide con I_3. Recorriendo el polígono en el sentido I_4, D_4, V_4, I_5, vemos que V_4 tira de la articulación hacia arriba y es una tensión, lo mismo que I_5 que tira hacia la derecha.

En el nudo superior de V_4, son conocidas las fuerzas V_4, S_4 y 4. Halladas las correspondientes en la figura *(b)*, y trazadas por el extremo del polígono abierto que forman la paralela á S_5, y por el origen la paralela á D_5, tendremos, en la misma figura, el polígono cerrado V_4, S_4, 4, S_5, D_5, que determina estas dos últimas fuerzas, y hace ver que ambas son compresiones.

En el nudo inferior de V_5, conocemos I_5 y D_5; buscando estas dos fuerzas en la figura *b*, y completando el polígono por medio de la vertical V_5 y la horizontal I_6 (que coincide con I_2), tendremos determinadas estas dos fuerzas. Se ve que ambas son tensiones.

Finalmente, en el extremo superior de V_5 son conocidas V_5, S_5 y 5. Si, por el extremo de esta última en la figura *(b)*, trazamos la paralela á D_6, vemos que esta recta pasa por el origen de V_5 y cierra por sí sola el polígono, siendo nula, por lo tanto, la fuerza horizontal de la barra S_6, que, en efecto, es una línea superflua como ya sabíamos.

La consideración del diagrama que acabamos de estudiar es suficiente, como sabemos, para conocer los esfuerzos de las cabezas en las vigas rectas con diagonales estiradas y montantes comprimidos, ya sean simples, ya dobles.

En las de montantes y cruces de San Andrés hace falta, además, conocer las del sistema simple de la figura 133, diagrama *(a)*, en el cual los pesos están aplicados á las articulaciones inferiores. La construcción de los esfuerzos por el método de las figuras recíprocas se ve en el diagrama *(b)* de la misma figura 133.

Para poder agrupar convenientemente las fuerzas, se ha trazado el polígono funicular poniendo la fuerza 1 en la parte inferior, y contándolas en sentido inverso que en el caso anterior, aunque conser-

vando su sentido. De este modo la reacción A se encuentra en la parte inferior de la figura, y la B (del apoyo derecho) en la parte superior. Se observará que las pieza V_0 y S_1 son inútiles para el equilibrio y pueden considerarse suprimidas, suponiendo que la viga se apoya en el nudo inferior, al cual se aplica la reacción A. Según eso, D_1 é I_1 se hallarán trazando por el extremo de A la paralela á la diagonal, y por el origen la paralela á la cabeza inferior, como se ve en el diagrama *(b)*. Se ve que D_1 es una compresión é I_1 una tensión.

En el nudo superior del montante V_1, se conoce la fuerza D_1, y se obtienen las V_1 y S_2 trazando, en *(b)*, por los extremos de D_1 la horizontal S_2 y la vertical V_1; resulta que la primera es una compresión y la segunda una tensión.

Se pasará después á considerar el nudo inferior del mismo montante V_1, después el superior de V_2, y luego el inferior de este mismo, y así sucesivamente, cerrando siempre los polígonos correspondientes en la figura *(b)* por medio de las paralelas á las barras cuyos esfuerzos se desconocen. Después de las explicaciones detalladas del caso anterior, fácilmente podrá el lector seguir todas las construcciones de la figura. En la mitad de la izquierda de la viga resultan comprimidas las diagonales y tendidas las verticales; y en la mitad de la derecha, por el contrario, las diagonales están extendidas y las verticales comprimidas.

Al considerar el último nudo, el inferior del montante V_5, se observa que el polígono se cierra con sólo trazar la paralela á la diagonal D_6, resultando nula la horizontal I_6, lo mismo que hemos observado respecto á S_6 en el caso estudiado anteriormente.

Veamos ahora cómo se utilizan los resultados de las construcciones que preceden para conocer los esfuerzos que han de servir para calcular las secciones de las cabezas. Para ello hay que tener presentes las modificaciones que se han de introducir al deducir del diagrama estudiado la composición definitiva de la viga, modificaciones que se han indicado al tratar especialmente de cada sistema. Así, si se trata de un sistema simple de montantes comprimidos y diagonales estiradas, sabemos que se suprimen todas las diagonales que sólo sufren compresiones y los montantes que sólo sufren tensiones, reemplazándolas por las del sistema opuesto que estarán

sujetas sólo á tensiones y compresiones respectivamente. Modificada así la viga, resulta simétrica respecto al montante central y las tensiones de las cabezas en las piezas simétricas serán iguales, de modo que sólo se utilizarán las compresiones S_1, S_2 y S_3, y las S_6, S_5 y S_4 serán respectivamente iguales á las anteriores. Lo mismo puede decirse respecto á las cabezas inferiores.

Si la viga ha de ser de celosía doble de montantes comprimidos y diagonales estiradas, habrá que estudiar el segundo de los sistemas simples en que aquél se descompone, es decir, el formado por los montantes intermedios y las diagonales correspondientes. Este diagrama se obtiene siguiendo exactamente la marcha indicada respecto al *(b)* de la figura 132, sin que haya otra modificación que la diferente inclinación de las diagonales primera y última. Modificado este diagrama del mismo modo que el anterior, y tomando en la mitad derecha de la viga las tensiones de las cabezas iguales á sus simétricas, se superpondrán ambos diagramas modificados, y los esfuerzos de cada trozo se obtendrán sumando los correspondientes á los dos trozos superpuestos.

Si la viga es de montantes comprimidos y cruces de San Andrés, se estudiarán los diagramas *(a)* de las figuras 132 y 133 suponiendo las cargas repartidas entre ambos, y al superponerlos, se obtendrán las tensiones de las cabezas sumando las que corresponden en dichos diagramas á los trozos que resultan superpuestos.

Si la posición del piso no es la que se ha supuesto, se tendrán presentes las indicaciones hechas en el núm. 153 respecto á los puntos de aplicación de las cargas. La construcción de la figura recíproca exigirá pequeñas variaciones, de las que es fácil darse cuenta.

167. CÁLCULO DE LOS MONTANTES Y DIAGONALES.—Los esfuerzos correspondientes á los montantes y á las diagonales constan de dos partes; una debida á la carga permanente y otra producida por la sobrecarga parcial más desfavorable.

La primera se deduce fácilmente de la figura construída para el cálculo de las cabezas.

En efecto, esta figura se ha dibujado suponiendo que en cada articulación obre el peso $\pi + P$, suma de la carga permanente y de la carga accidental; para determinar las tensiones de los montantes

y de las diagonales debidas á la carga permanente, deberíamos repetir la misma figura suponiendo aplicado en cada articulación el peso π solamente. Por consiguiente, obtendríamos una figura semejante á la *(b)*, en la que todos los lados quedarían reducidos en la relación $\frac{\pi}{\pi + P}$. Luego, no es necesario volver á dibujar el diagrama; y bastará medir en la figura *(b)* el esfuerzo buscado con la misma escala de fuerzas que ha servido para dibujarla, y multiplicar el resultado por $\frac{\pi}{\pi + P}$.

Si la viga se ha de modificar de modo que sólo entren en su composición diagonales estiradas y montantes comprimidos, bastará considerar las piezas de la mitad de la izquierda, puesto que las simétricas sufrirán tensiones iguales.

Veamos ahora cómo se pueden obtener gráficamente los esfuerzos máximos y mínimos de los montantes y diagonales debidos á las sobrecargas parciales.

Observaremos que el sistema de los pesos 1, 2, 3, 4, 5 (que ahora se reducen al peso P debido á la carga accidental) corresponde al esfuerzo máximo de la diagonal D_1, y al mínimo del montante V_1.

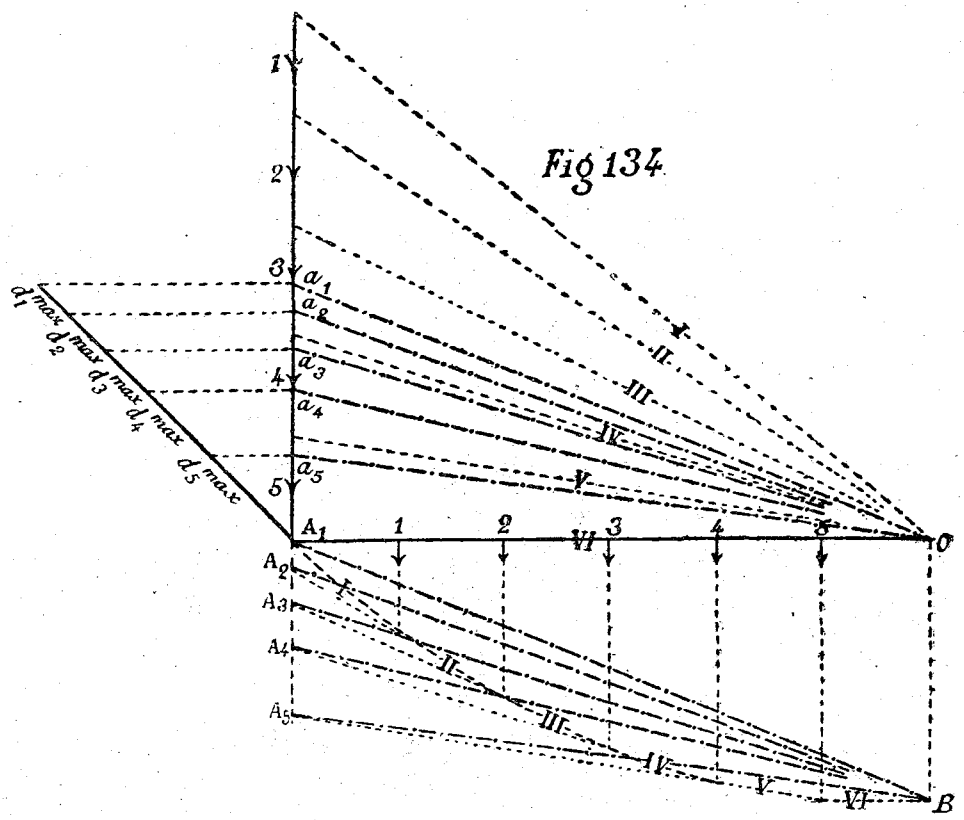
Si suprimimos la fuerza 1, queda el sistema 2, 3, 4, 5 que desarrollará la tensión máxima en D_2, y la mínima en V_2.

Suprimidas las fuerzas 1 y 2, queda el sistema 3, 4, 5, al que corresponde el esfuerzo máximo de D_3 y el mínimo de V_3, y así sucesivamente.

Por lo tanto, si queremos determinar V_1^{min}, bastará cortar esta barra por una paralela á la diagonal, y determinar la reacción A_1 del apoyo izquierdo correspondiente al sistema 1, 2, 3, 4, 5. Como esta fuerza es la única que queda á la izquierda del plano secante, V_1^{min} será igual y de sentido opuesto á A_1.

Para determinar v_2^{min}, se hallará del mismo modo la reacción del apoyo correspondiente al sistema 2, 3, 4, 5, y así sucesivamente. Conociendo los valores mínimos de los montantes, los máximos de las diagonales contiguas se hallarán construyendo triángulos rectángulos, cuyos catetos verticales son los valores v^{min} hallados, y cuyas hipotenusas son paralelas á las diagonales.

Hé aquí cómo pueden disponerse las construcciones gráficas (fig. 134). Adoptada una escala para las distancias y otra para las



fuerzas, representaremos, sobre la horizontal $A_1\ O$, la viga, indicando en ella la posición de las cargas 1, 2, 3, 4, 5.

Sobre la vertical de A_1 llevaremos, de arriba hacia abajo, las fuerzas 1, 2, 3, 4, 5. Tomaremos como polo el punto O y trazaremos los radios vectores I, II, III, IV, V y VI.

Trazaremos el polígono funicular correspondiente partiendo de A_1. Hemos dicho que, para hallar v_1^{min}, tenemos que determinar la reacción del apoyo en A_1. Por lo tanto, nos bastará aplicar la construcción explicada en el núm. 39, trazando la línea $A_1\ B$ de cierre del polígono funicular, y dirigiéndole desde O una paralela hasta que encuentre á la vertical de A_1. La magnitud $A_1\ a_1$ es el valor de v_1^{min}.

Para encontrar v_2^{min}, hay que suprimir el peso 1. Prolongaremos el lado II del polígono funicular hasta que encuentre á la vertical de A_1, y obtendremos el correspondiente al sistema 2, 3, 4, 5, cuya

línea de cierre es $A_2 B$. La paralela $O a_2$, trazada desde el polo, determina la magnitud $A_1 a_2$, que es el valor buscado de $v_2^{mín}$.

Del mismo modo prolongaremos los lados III, IV y V del polígono funicular, y obtendremos las líneas de cierre $A_3 B$, $A_4 B$, $A_5 B$, cuyas paralelas desde O determinarán sobre la vertical de A_1 los valores de $v_3^{mín}$, $v_4^{mín}$ y $v_5^{mín}$.

Una vez conocidos los esfuerzos mínimos de las verticales, se obtendrán los máximos de las diagonales contiguas (que concurren con las verticales correspondientes en el nudo descargado, que es el inferior) trazando la serie de triángulos rectángulos que se ve á la izquierda de la figura.

Para calcular los esfuerzos máximos de las verticales y mínimos de las diagonales, observaremos que las cargas son las complementarias de las anteriores; así, $v_3^{máx}$ corresponderá al caso en que obre sobre la viga el sistema de pesos 1, 2, y no será otra cosa que la reacción B_3 del apoyo derecho. Conocido $v_3^{máx}$, se deducirá $d_3^{mín}$ por medio de la construcción del triángulo rectángulo, lo mismo que en el caso anterior.

Lo mismo puede decirse de los demás montantes y diagonales.

La figura se dispone del modo siguiente (fig. 135). Sobre el extremo A_1 de la derecha de la viga se levanta una perpendicular, y se llevan sobre ella, partiendo del punto A', las fuerzas 1, 2, 3, 4, 5. Desde O', como polo, se trazan los radios vectores I, II, III, IV, V y VI y, partiendo del punto O, el polígono funicular correspondiente que se ve en la parte superior de la figura.

Prolongando el lado V de este polígono hasta el punto A_5, en que corta á la vertical de A_1, tendremos el polígono funicular correspondiente al sistema de fuerzas 1, 2, 3, 4 que determina $v_5^{máx}$. Su línea de cierre es $O A_5$, y, trazando una paralela á ella por O', tendremos la magnitud $A' a'$, que es precisamente $v_5^{máx}$.

Prolongando el lado IV del polígono funicular hasta A_4, obtendremos la línea de cierre $O A_4$ correspondiente á la carga 1, 2, 3 que produce $v_4^{máx}$; la paralela á $O A_4$, trazada desde O', determina sobre la vertical de la derecha la magnitud $O' a''$, igual á $v_4^{máx}$, y del mismo modo se determinarán todas las demás verticales, como puede observarse en la figura.

Los triángulos rectángulos que se ven á la derecha de la misma sirven para determinar los esfuerzos mínimos de las diagonales $d_1^{mín}$, $d_2^{mín}$, $d_3^{mín}$, etc.

Conocemos, por lo tanto, los esfuerzos producidos en los montan-

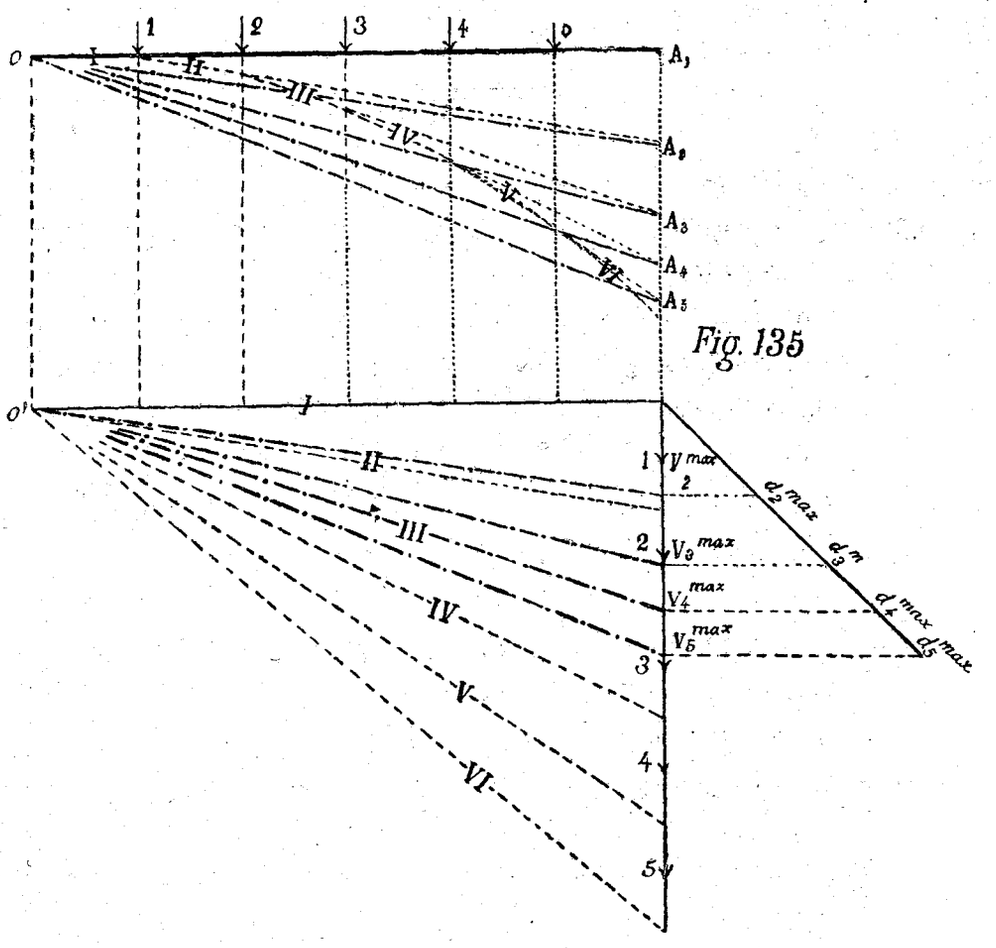


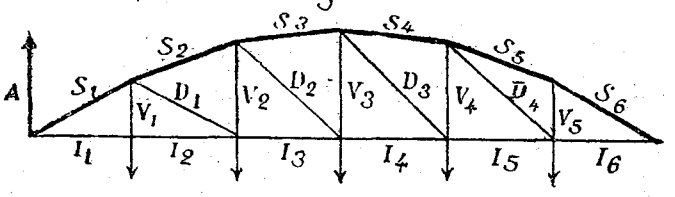
Fig. 135

tes y en las diagonales por la carga permanente, y los máximos y mínimos que corresponden á cada una de estas piezas por efecto de la sobrecarga. Es fácil, por consiguiente, llegar á determinar los esfuerzos más desfavorables á que queda expuesta cada una de estas piezas siguiendo las indicaciones expuestas en los capítulos anteriores, y el problema de la determinación de los esfuerzos más desfavorables de las piezas de una viga recta de grandes mallas queda completamente resuelto por medio de las construcciones gráficas que preceden.

168. Viga parabólica. — Determinación de los esfuerzos co-

RRESPONDIENTES Á LAS CABEZAS.—Consideremos la viga parabólica de la figura 136, acerca de cuyo trazado nada tenemos que añadir á lo dicho en el capítulo precedente.

Fig 136.

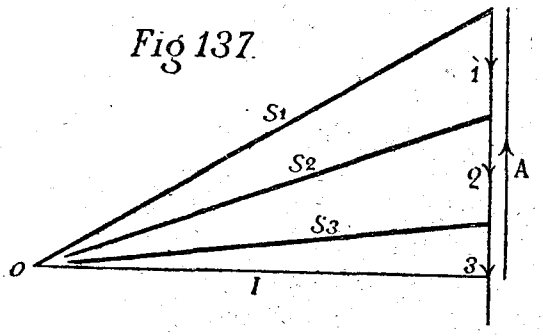


Recordando las propiedades de estas vigas, que allí se han expuesto, se llega á una construcción gráfica sencillísima, que permite determinar los esfuerzos correspondientes á las cabezas.

En efecto, hemos visto que la tensión de la cabeza inferior es constante, y la compresión de cada trozo de la cabeza superior tiene por proyección horizontal aquella tensión.

Según eso, bastará trazar (fig. 137) á continuación unas de otras, las cargas correspondientes á los diversos nudos 1, 2, 3... y obtener la reacción A del apoyo. Considerando el equilibrio en el nudo del apoyo (fig. 136), vemos que las tensiones S_1 é I_1 han de ser tales que hagan equilibrio á A, y, por consiguiente, bastará trazar en la figura 137 una paralela á S_1 por el extremo superior de A, y una horizontal por el inferior, para obtener S_1 é I_1. Siendo iguales á I_1 todas las tensiones horizontales, y siendo además la proyección horizontal de todas las compresiones S_2, S_3..., bastará trazar paralelas á estas rectas para obtener dichas compresiones.

Fig 137.



Basta dibujar la mitad de la figura, puesto que es evidentemente simétrica respecto á la horizontal que pasa por o, y, por consiguiente, S_4, S_5 y S_6, son respectivamente iguales á S_3, S_2 y S_1.

Los esfuerzos de las cabezas son ya conocidos. Los de los montantes son, como sabemos, iguales en todos ellos al peso aplicado en la articulación inferior, es decir, á la suma del peso permanente y de la sobrecarga que corresponde á una malla.

169. CÁLCULO DE LAS DIAGONALES.—Hemos visto que las diagonales sólo trabajan bajo la acción de cargas parciales, y como se emplean los dos sistemas, basta que cada una resista á la tensión más desfavorable, es decir, que deberemos determinar únicamente los valores $d_1^{máx}$, $d_2^{máx}$, $d_3^{máx}$ y $d_4^{máx}$. Para calcular $d_1^{máx}$, la carga que obra sobre la viga es el sistema 2, 3, 4, 5. Para $d_2^{máx}$, el sistema 3, 4, 5, y así sucesivamente.

Podemos determinar, como lo hemos hecho anteriormente, las reacciones de los apoyos correspondientes á estas diversas cargas, y una vez conocidas, es fácil ir estudiando el equilibrio de los diversos nudos, partiendo del apoyo izquierdo, hasta llegar al que dé el valor de la tensión de la diagonal considerada.

En la figura 138 se han llevado sobre la vertical a_1 del apoyo

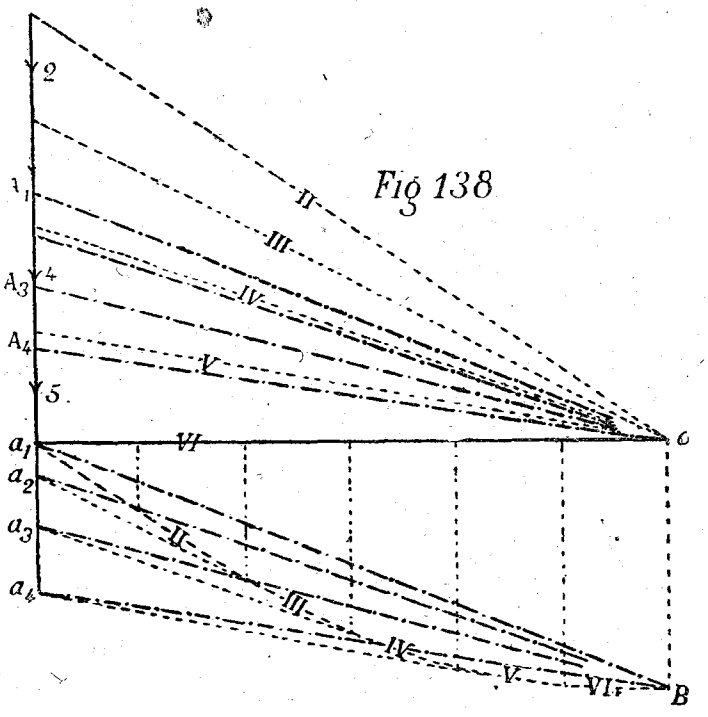


Fig 138

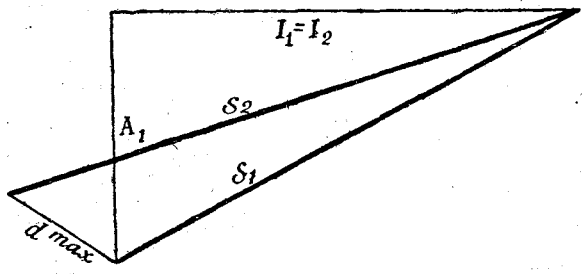
izquierdo de la viga los pesos 2, 3, 4 y 5, prescindiendo del 1 que no forma parte de ninguno de los sistemas que debemos considerar. Se ha trazado, como en los casos anteriores, el polígono funicular correspondiente al polo o; se han considerado luego los polígonos funiculares de los sistemas de pesos 2, 3, 4, 5, correspondiente á $v_1^{máx}$, 3, 4, 5, correspondiente á $v_2^{máx}$, etc..., y, trazando desde o las

paralelas á las líneas de cierre de dichos polígonos, se han obtenido las correspondientes reacciones del apoyo izquierdo A_1, A_2, A_3 y A_4.

Ahora, para determinar d_1, bastará estudiar el equilibrio en los nudos del apoyo y de los extremos de v_1, partiendo del valor A_1 de la reacción del apoyo, única fuerza exterior que obra en los nudos que necesitamos considerar.

Al efecto, en la figura 139 se traza por el extremo superior de A_1 una horizontal y por el inferior una paralela á S_1, y obtendremos las fuerzas correspondientes á estas dos barras.

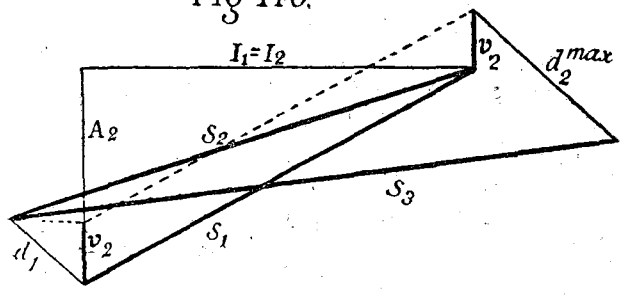
Fig 139.



Pasando al nudo inferior de v_1, vemos que el equilibrio se establece entre las barras horizontales I_1 é I_2 sin que intervenga ninguna fuerza vertical, y, por consiguiente, se tiene $v_1 = 0$. En el nudo superior de v_1 conocemos S_1, y como v_1 es nulo, obtendremos S_2 y $d_1^{máx}$ trazando las paralelas á estas dos rectas, como se ve en la figura.

Para determinar $d_2^{máx}$, haremos el mismo estudio partiendo del valor A_2 de la reacción del apoyo y continuándolo hasta llegar al nudo superior de v_2, figura 140.

Fig 140.



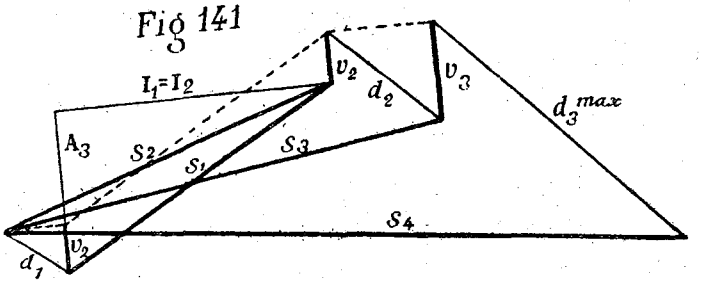
Hasta llegar al nudo superior de v_1 obtendremos una figura semejante á la anterior, la cual puede servir de guía para evitar confusiones. Observaremos luego que, en el nudo inferior de v_2, las barras horizontales se hacen equilibrio, y, por consiguiente, v_2 es la proyección de d_1, y es una compresión.

En el nudo superior conocemos S_2 y v_2; por consiguiente, basta llevar esta última fuerza á continuación de S_2, trazar por el extremo

de v_2 una paralela á la diagonal d_2, y por el origen de S_2 una paralela á S_3; así obtendremos $d_2^{máx}$.

Para determinar $d_3^{máx}$, trazaremos del mismo modo la figura 141,

Fig 141

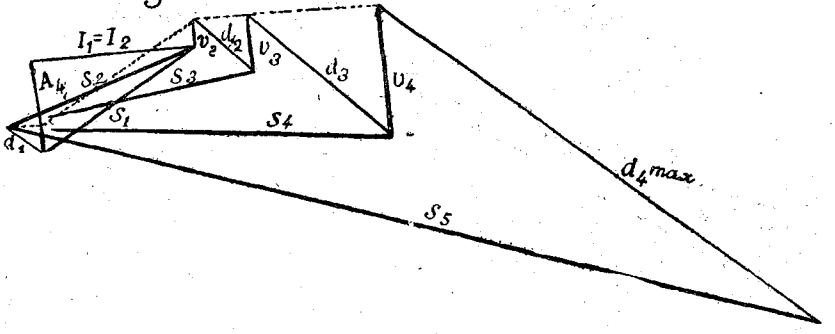


partiendo de la reacción del apoyo A_3. La figura será semejante á la anterior hasta llegar al nudo superior de v_2.

Pasando á estudiar el nudo inferior de v_3, veremos, como en el caso anterior, que v_3 es la proyección vertical de d_2, y es una compresión. Conocemos ahora en el nudo superior las fuerzas S_3 y V_3, y nos basta completar el polígono por medio de las paralelas á d_3 y S_4 para obtener el polígono cerrado S_3, v_3, $d_3^{máx}$, S_4 que nos da á conocer el valor buscado $d_3^{máx}$.

Finalmente, para determinar $d_4^{máx}$, trazaremos la figura 142, par-

Fig 142



tiendo de la reacción del apoyo A_4. Obtendremos una figura semejante á la anterior hasta llegar al nudo superior del montante v_3. La consideración del nudo inferior de v_4 nos hace ver que v_4 es una compresión igual á la proyección vertical de d_3. En el nudo superior de v_4, conocemos las fuerzas S_4 y v_4 que se presentan una á continuación de la otra en la figura 142, y con el sentido que les corres-

ponde. Se completará el polígono por medio de las paralelas á d_4 y á S_3, y obtendremos el polígono S_4, v_4, $d_4^{máx}$, S_3 que nos da el valor buscado.

Conocemos, por lo tanto, las tensiones más desfavorables de todas las diagonales; se trazarán las del sistema opuesto que deberán resistir las mismas tensiones que sus simétricas.

Al determinar las tensiones máximas de las diagonales hemos encontrado en las figuras 139, 140, 141 y 142, los valores v_2, v_3 y v_4, que no son otra cosa que las tensiones mínimas ó las compresiones más desfavorables que pueden tener que resistir los montantes bajo la acción de las sobrecargas parciales.

Estos esfuerzos se deberán sumar algebráicamente con la tensión producida en un montante por la carga permanente, y comparar el esfuerzo resultante con la tensión que resulta de sumar la carga permanente y la sobrecarga que obra en cada articulación inferior.

Como hemos visto ya, ordinariamente es éste el esfuerzo más desfavorable que deben resistir los montantes; pero es fácil hacer la comprobación, teniendo los valores de las compresiones producidas por las cargas parciales.

Es recomendable, cuando se trata de un proyecto de puente metálico de alguna importancia, efectuar los cálculos de resistencia por los dos procedimientos gráfico y analítico, con lo cual puede decirse que se hacen imposibles los errores materiales, en que tan fácil es caer cuando se tiene que ejecutar una larga serie de operaciones numéricas.

PARTE CUARTA.

VIGAS DE VARIOS TRAMOS.

CAPÍTULO I.

GENERALIDADES ACERCA DE LAS VIGAS DE VARIOS TRAMOS.

---

170. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.—Hasta ahora hemos considerado únicamente vigas que insistían por sus extremos en dos apoyos, y, en este caso, nos ha sido fácil determinar las reacciones de aquéllos, una vez conocida la disposición de las cargas, habiéndonos bastado, para ello, aplicar las ecuaciones del equilibrio que suministra la Estática.

Pero si la viga se apoya en más de dos puntos, aquellos teoremas no bastan para determinar las reacciones de los apoyos. En efecto, en este caso, las reacciones desconocidas son tres ó más, y la Estática sólo da dos ecuaciones, á saber, la de las proyecciones sobre una vertical, cuya suma algebráica debe ser cero, y la de los momentos alrededor de un punto cualquiera del plano, cuya suma algebráica debe ser también cero. Y desde el momento que hay tres fuerzas indeterminadas, aquellas dos ecuaciones pueden ser satisfechas por una infinidad de sistemas de fuerzas aplicadas á los tres apoyos; en en otros términos, el problema es indeterminado.

La siguiente consideración lo hará ver claramente. Consideremos una viga apoyada únicamente por sus extremos, y en equilibrio bajo la acción de ciertas cargas. La fibra neutra tomará una forma curva, cóncava hacia arriba, y si suponemos que las cargas son

simétricas respecto á la sección media de la viga, en esta sección se hallará la flecha máxima ó la mayor distancia de la fibra neutra deformada á la primitiva representada por la horizontal que une los puntos de apoyo.

Supongamos que coloquemos en el punto medio un nuevo apoyo; si está suficientemente bajo para que no se modifique la flecha, el equilibrio de la viga no se alterará; pero elevemos el apoyo ejerciendo una presión de abajo hacia arriba, y la flecha irá disminuyendo hasta anularse; si seguimos aumentando el valor de este esfuerzo, la curva de la fibra neutra llegará á rebasar la horizontal de los apoyos y aumentará la flecha hacia arriba hasta que la viga llegue á levantarse, ó si se impide este movimiento, á romperse bajo la acción de este esfuerzo.

Todos los valores por que ha pasado la reacción del apoyo intermedio, entre cero y el que ha determinado la rotura de la viga, han permitido el equilibrio, satisfaciendo siempre á las dos ecuaciones antes citadas.

Con mayor razón existe la indeterminación que señalamos cuando, en vez de uno sólo, hay varios apoyos intermedios, y la viga queda dividida en tres ó más tramos.

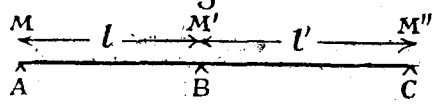
Se han ideado diversos procedimientos de cálculo para salvar esta dificultad. El que se ha adoptado en la práctica consiste en determinar, no las reacciones sobre los apoyos, sino los momentos flectores. Veremos que, una vez conocidos los momentos flectores sobre los apoyos, es fácil deducir los momentos flectores y los esfuerzos cortantes correspondientes á un punto cualquiera de la viga.

171. Teorema de los tres momentos. — Para calcular los momentos flectores sobre los apoyos, se aplica el teorema llamado de los *tres momentos*. Este teorema se reduce á una relación algebráica entre los momentos flectores en tres apoyos consecutivos. Daremos esta relación sin demostrarla, porque para establecerla se necesita acudir á consideraciones relativas á la deformación de la viga, y al empleo del cálculo infinitesimal.

Consideremos dos tramos consecutivos apoyados en los puntos A, B, C (fig. 143). Sean M, M' y M'' los momentos flectores en dichos puntos, l y l' las longitudes de los tramos, p y p' las cargas

por metro lineal uniformemente repartidas en ellos y extendidas á los tramos completos, es decir, de modo que la carga p por metro lineal se aplica á toda la longitud l del tramo AB, y la p' á la longitud l' del tramo BC.

Fig 143



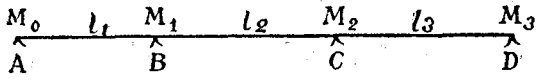
La ecuación ó teorema de los tres momentos establece que entre estas diversas cantidades se verifica la relación

$$l\,M + 2\,(l + l')\,M' + l'\,M'' = \frac{1}{4}\,(p\,l^3 + p'\,l'^3). \qquad [1]$$

Vamos á ver cómo la aplicación de esta ecuación permite calcular todos los momentos flectores sobre los apoyos, cualquiera que sea el número de tramos.

Consideremos en primer lugar, una viga de tres tramos (fig. 144). Llamemos l_1, l_2, l_3 á las luces de estos tramos, p_1, p_2, p_3 á las cargas correspondientes por metro lineal, M_0, M_1, M_2 y M_3 á los momentos flectores en los apoyos A, B, C y D.

Fig 144



Observaremos, ante todo, que los momentos flectores en los apoyos extremos M_0 y M_3 son nulos. Suponemos que la viga está simplemente apoyada sin empotramiento en dichos apoyos A y B; basta recordar la definición del momento flector para comprender que es cero en el punto A, toda vez que á su izquierda no existe ninguna fuerza, y, terminando en él la viga, los brazos de palanca son también nulos. Otro tanto puede decirse del apoyo extremo de la derecha D, si se consideran para calcular los momentos las fuerzas situadas á la derecha; como no existe ninguna, su momento debe ser cero.

Quedan, pues, por determinar los momentos M_1 y M_2. Apliquemos, para ello, la ecuación [1] al primero y segundo tramo, y luego al segundo y tercero.

Teniendo en cuenta la observación que precede, haremos $M_0 = M_3 = 0$, y obtendremos las dos ecuaciones

$$2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = \frac{1}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3)$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 = \frac{1}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3)$$

Todas las cantidades que entran en estas dos ecuaciones, excepto M_1 y M_2, son conocidas; tenemos, por lo tanto, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de primer grado que se resuelve fácilmente por los procedimientos del Álgebra elemental.

Consideremos una viga de cuatro tramos; conservemos las notaciones anteriores para los tres primeros, y llamemos p_4 á la carga por metro lineal en el cuarto, l_4 á su luz y M_4 al momento sobre el apoyo extremo de la derecha; ahora los momentos nulos serán M_0 y M_4, y, aplicando, como en el caso anterior, la ecuación [1] á los grupos de tramos 1.° y 2.°, 2.° y 3.°, y además al 3.° y 4.°, tendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = \frac{1}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3)$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = \frac{1}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3)$$

$$l_3 M_2 + 2(l_3 + l_4) M_3 = \frac{1}{4}(p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3)$$

las cuales determinan los momentos desconocidos M_1, M_2 y M_3 sobre los apoyos intermedios.

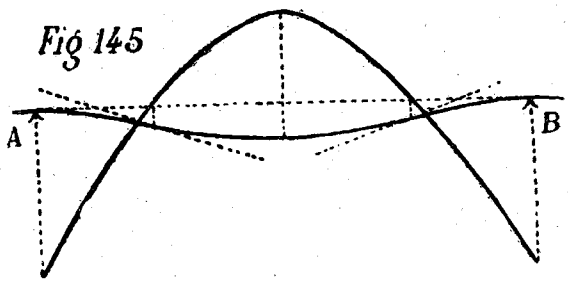
En general, en una viga de n tramos de longitudes $l_1, l_2, l_3 \ldots, l_n$, cargados de pesos $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$, kilogramos por metro lineal, hay $n + 1$ apoyos, en los cuales los momentos flectores serán $M_0, M_1, M_2 \ldots, M_n$. El primero y el último, M_0 y M_n, son nulos, y los $n - 1$ restantes, $M_1, M_2 \ldots, M_{n-1}$, vendrán determinados por las $n - 1$ ecuaciones que se obtienen aplicando el teorema de los tres momentos á los grupos de dos tramos, 1.° y 2.°; 2.° y 3.°... hasta el $n - 1$ y n.

172. Determinación del momento flector en un punto de un tramo cualquiera.—Observaremos, en primer lugar, que los momentos flectores sobre los apoyos son todos negativos. Para recono-

cer el signo del momento flector, puede darse una regla muy sencilla, que consiste en examinar la forma que tiende á tomar la fibra neutra después de la deformación. Cuando en una región de la viga dicha curva vuelve su concavidad hacia arriba, como sucede en una viga apoyada por sus extremos, el momento flector es positivo; cuando, por el contrario, la concavidad está hacia abajo, el momento es negativo.

Ahora, si consideramos (fig. 145) la forma de la figura neutra deformada en un tramo cualquiera de una viga continua, es fácil ver intuitivamente que dicha curva presentará una parte con la concavidad hacia arriba en la región central del tramo, y otra con la concavidad hacia abajo, en las inmediaciones de los apoyos, toda vez que en estos puntos la viga no puede descender; y como, por otra parte, la curva ha de ser continua sin presentar puntos angulosos, estas porciones se reunen tangencialmente produciendo un punto de inflexión en el punto en que la curva cesa de presentar su concavidad hacia abajo y empieza á volverla hacia arriba. En la primera región, la inmediata al apoyo, los momentos flectores son negativos, y en la segunda positivos. La curva de momentos afecta la forma general indicada en la figura, y el momento es cero en el punto de inflexión.

Fig 145



Debemos, por lo tanto, considerar como negativos todos los momentos flectores sobre los apoyos, calculados por medio del teorema de los tres momentos.

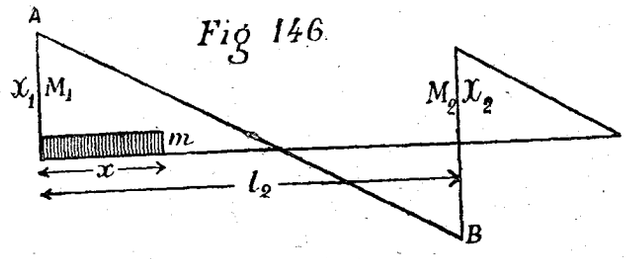
Vamos á deducir la expresión del momento flector en un punto cualquiera m de un tramo, por ejemplo, el segundo; llamaremos x á la abscisa de la sección considerada con relación al apoyo izquierdo del tramo correspondiente (fig. 146).

En el apoyo obrará el momento $-M_1$, conocido ya por la aplicación del teorema de los tres momentos, y la reacción X_1 dirigida de abajo hacia arriba, la cual es desconocida; además en la longitud x

del tramo, situada á la izquierda de la sección, obra un peso p_2 por metro lineal.

El momento negativo M_1 que se ejerce sobre el apoyo se transmite íntegro á la sección considerada; en efecto, sabemos que podemos sustituirlo por un par cuyas fuerzas sean horizontales y estén aplicadas á las cabezas de las vigas; en esta forma se ve que dichas fuerzas se trasladan en su propia dirección hasta la sección considerada, y dan lugar en ella á un momento negativo igual á $-M_1$.

Fig 146.



La fuerza X_1 da lugar á un momento $X_1 x$, que será positivo, puesto que tiende á producir alrededor del punto m un giro en el sentido de las agujas de un reloj.

Y el peso $p_2 x$ cuya resultante está aplicada á la mitad de la distancia x, y tiene por brazo de palanca $\frac{x}{2}$, da lugar á un momento $-\frac{p_2 x^2}{2}$, negativo, puesto que el giro que produce es de sentido contrario al correspondiente á X_1.

De modo que el momento flector M_x, en la sección considerada, será

$$M_x = -M_1 - \frac{p_2 x^2}{2} + X_1 x.$$

Esta expresión contiene la cantidad desconocida X_1. Para eliminarla, observaremos que, si sustituimos en ella x por l_2, debemos obtener el valor del momento en el apoyo derecho, es decir $-M_2$. Tenemos, pues,

$$-M_2 = -M_1 - \frac{p_2 l_2^2}{2} + X_1 l_2.$$

De donde sacaremos el valor de X_1, que será,

$$X_1 = \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l_2}. \qquad [2]$$

Encontramos así el valor del esfuerzo cortante sobre el apoyo que no habíamos podido determinar directamente.

Sustituyendo este valor en la expresión de M_x, tendremos,

$$M_x = -M_1 - \frac{p_2 x^2}{2} + \left(\frac{p_2 l_2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l_2}\right) x =$$

$$-M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l_2} x + \frac{p_2 x}{2}(l_2 - x). \qquad [3]$$

Tal es el valor del momento flector en un punto cualquiera del segundo tramo, y de él se puede deducir el correspondiente á un tramo cualquiera con sólo cambiar los sub-índices.

Para deducir la expresión correspondiente al tercer tramo bastará aumentar en una unidad los sub-índices, en dos para tener la que corresponde al cuarto tramo, y así sucesivamente.

De modo que la fórmula correspondiente al tramo de orden k, será

$$M_x = -M_{k-1} - \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} x + \frac{p_k x}{2}(l_k - x). \qquad [4]$$

Esta fórmula es importantísima para las aplicaciones que hemos de estudiar á continuación.

Vamos á estudiar la expresión [3] con el objeto de deducir un método práctico y sencillo que permita dibujar la curva de los momentos con rapidez y exactitud.

173. Trazado de la curva de los momentos flectores en un tramo.—Representemos por z los dos primeros términos de la fórmula [3], por y el último, de modo que

$$z = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l_2} x$$

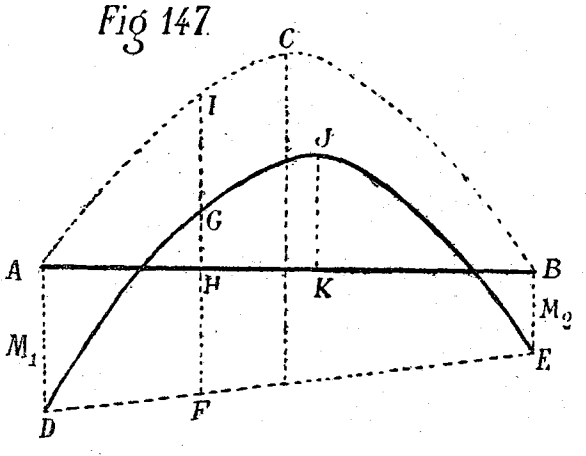
$$y = \frac{p_2 x}{2}(l_2 - x).$$

La fórmula [3] se convierte en

$$M_x = z + y.$$

Se puede observar que el valor de y no es otra cosa que la curva de momentos en el caso en que el tramo estuviera simplemente apoyado por sus extremos, como puede verse comparando este valor con el hallado en el núm. 21, fórmula [2]. La curva que representa el valor de y es la parábola $A\,C\,B$ que se trazará como se dijo en el caso citado (fig. 147).

Fig 147



En cuanto al valor de z, se ve fácilmente que se puede representar por una recta, puesto que crece proporcionalmente á x.

Si hacemos $x = 0$, obtenemos

$$z = -M_1.$$

Y si hacemos $x = l_2$

$$z = -M_2.$$

Luego z es, en cada punto del tramo, la ordenada de la recta $D\,E$ que une los extremos de las ordenadas $-M_1$ y $-M_2$ llevadas sobre los apoyos. Se observará que z es negativo, y, por consiguiente, para obtener el valor de M_x en un punto cualquiera bastará, teniendo trazadas la recta $D\,E$ y la curva $A\,C\,B$, restar de la ordenada de esta última la correspondiente de z. Así, en el punto H, la ordenada $H\,G$ que representa M_x es igual á $H\,I = y$ menos $F\,H = z$, ó lo que es lo mismo, $F\,G = H\,I = y$, lo cual nos dice que para trazar la curva M_x basta tomar las ordenadas y á partir de la recta $D\,E$.

Fácilmente se demuestra que la curva $D\,J\,E$, cuyas ordenadas son los valores de M_x, no es otra cosa que la misma parábola $A\,C\,B$ que se ha trasladado hasta pasar por los puntos D y E, conservando su

eje paralelo al de su posición primitiva (1). Según eso, bastará trazar la curva $A\,C\,B$ (teniendo cuidado de prolongarla más allá de los extremos A y B del tramo), recortar una plantilla y trasladarla hasta que dos de los puntos de su contorno pasen por D y E, pero haciendo que el eje se conserve vertical. Se habrá trazado dicho eje en la plantilla, y por consiguiente se podrá marcar el punto J, vértice de la parábola (punto en que el eje corta á la curva). La ordenada $K\,J$ de este punto es el momento máximo, y bastará proyectar el punto J sobre la fibra neutra, en K, para conocer la abscisa $x = A\,K$ á la cual corresponde el momento máximo. También se puede calcular dicha abscisa por la fórmula

$$x = -\frac{M_2 - M_1}{p_2\,l_2} + \frac{l_2}{2}; \qquad (2)$$

---

(1) Para demostrarlo, traslademos el origen de coordenadas para referir las dos parábolas á su eje y á la tangente en el vértice, de modo que sus ecuaciones afecten la forma $x^2 = 2\,\alpha\,y$.

La ecuación de la primera parábola es

$$y = \frac{p_2}{2}\,x\,(l - x).$$

Sustituyendo en vez de x, $x + h$, y en vez de y, $y + k$, tendremos

$$y = -\frac{p_2}{2}\,x^2 + \frac{p_2}{2}\,(l - 2\,h)\,x + \frac{p_2}{2}\,h\,(l - h) - k.$$

Si anulamos el coeficiente de x y el término constante, disponiendo de las indeterminadas h y k, tendremos la ecuación

$$y = -\frac{p_2}{2}\,x^2 \qquad \text{ó bien} \qquad x^2 = -\frac{2}{p_2}\,y.$$

La otra parábola tiene por ecuación

$$M_x = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l_2}\,x + \frac{p_2}{2}\,x\,(l - x).$$

Haciendo la misma transformación de coordenadas, obtendremos

$$M_x = -\frac{p_2}{2}\,x^2 + \left(\frac{p_2}{2}\,l - p_2\,h - \frac{M_2 - M_1}{l_2}\right)x + \frac{p_2}{2}\,h\,(l - h) - M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l_2}\,h - k.$$

Anulando el coeficiente de x y el término constante, tenemos

$$M_x = -\frac{p_2}{2}\,x^2 \qquad \text{ó bien} \qquad x^2 = -\frac{2}{p_2}\,M_x.$$

Luego el parámetro α es el mismo en ambos casos, y obtenemos la misma parábola.

Como, por otra parte, hemos trasladado los ejes coordenados paralelamente á sí mismos, los ejes de las parábolas continúan siendo paralelos.

(2) El valor de x que hace máximo el momento M_x, se halla igualando á cero la derivada de M_x

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = -\frac{M_2 - M_1}{l_2} + \frac{p_2\,l_2}{2} - p_2\,x = 0,$$

de donde se saca

$$x = -\frac{M_2 - M_1}{p_2\,l_2} + \frac{l_2}{2}.$$

sustituyendo este valor en la expresión [3] y haciendo las reducciones, obtendremos

$$M_{máx} = -\frac{M_2 + M_1}{2} + \frac{(M_2 - M_1)^2}{2\,p_2\,l_2^2} + \frac{p_2\,l_2^2}{8}.$$

El procedimiento que acabamos de indicar para dibujar la curva de los momentos flectores es rápido y sencillo, y conviene especialmente en el caso en que haya que dibujar muchas curvas, como sucede cuando es considerable el número de tramos.

174. Determinación de los esfuerzos cortantes.—Hemos visto ya cuál es el valor del esfuerzo cortante sobre el segundo apoyo, fórmula [2]. Del mismo modo deduciríamos su valor en un apoyo cualquiera K, que sería

$$X_{k-1} = \frac{p_k\,l_k}{2} - \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k}. \qquad [5]$$

Para hallar el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de un tramo, que seguiremos suponiendo sea el segundo, observaremos que á la izquierda de la sección considerada, cuya abscisa es x (fig. 146), obra además del esfuerzo cortante en el apoyo, X_1, el peso $p_2 x$ dirigido en sentido contrario al de X_1; luego el esfuerzo cortante en dicha sección es

$$X_x = X_1 - p_2 x,$$

ó sustituyendo en vez de X_1 su valor [2]

$$X_x = \frac{p_2\,l_2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l_2} - p_2 x. \qquad [6] \qquad (1)$$

Del mismo modo veríamos que, en el tramo k, el esfuerzo cortante en un punto cualquiera á la distancia x del apoyo izquierdo de dicho tramo sería

---

(1) Puede observarse, derivando con relación á x la expresión [3], que X_x es la derivada de M_x; $\frac{d\,M_x}{d\,x} = X_x$.

$$X_x = \frac{p_k\, l_k}{2} - \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k} - p_k\, x. \qquad [7]$$

Estas fórmulas permiten calcular el esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la viga. Si se llevan los valores X_x, como ordenadas, en los puntos correspondientes á los valores de x que han servido para calcular aquellos, se ve que, creciendo X_x proporcionalmente á x, vendrá representado por una línea recta. Basta, por consiguiente, calcular dos de sus puntos, los correspondientes á los apoyos, por ejemplo, para poder trazaral. Así, si en la fórmula [6] hacemos $x = 0$, tendremos

$$X_1 = \frac{p_2\, l_2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l_2}.$$

Si hacemos $x = l_2$, resultará

$$X_2 = -\frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{p_2\, l_2}{2},$$

valor negativo.

Si llevamos sobre perpendiculares al eje de la viga en los apoyos estos valores, obtendremos la recta $A\,B$ (fig. 146) que representa los esfuerzos cortantes en el segundo tramo. Si queremos calcular la abscisa del punto en que el esfuerzo cortante es nulo, bastará igualar á cero la expresión [6] y despejar x. Tendremos

$$\frac{p_2\, l_2}{2} - \frac{M_2 - M_1}{2} - p_2\, x = 0,$$

de donde se saca

$$x = -\frac{M_2 - M_1}{2\, p_2} + \frac{l_2}{2}.$$

Se observará que este valor es el mismo que corresponde al momento flector máximo; esta es una ley general; el momento flector máximo (1) corresponde siempre á un punto en que el esfuerzo cortante es nulo.

---

(1) Se entiende, cuando el momento flector es máximo en el sentido preciso de la definición del máximo que se da en el cálculo diferencial. En los apoyos hay un máximo del momento

También observaremos que, si trazamos la recta que representa los esfuerzos cortantes en el tercer tramo, el esfuerzo cortante pasa bruscamente de negativo á positivo al considerar dos secciones muy próximas al apoyo, pero situadas á distinto lado del mismo, como se ve en la figura. La reacción del apoyo no es otra cosa que una fuerza aislada aplicada de abajo arriba, y por lo tanto, al pasar de un lado al otro de dicha fuerza debemos encontrar esta discontinuidad en la curva de los esfuerzos cortantes, lo mismo que sucede en las vigas apoyadas por sus extremos y sometidas á cargas aisladas, cuando se consideran dos secciones á distinto lado de una de estas fuerzas.

Las fórmulas que preceden permiten trazar las curvas de los esfuerzos cortantes en todos los tramos, pero solamente en el caso en que se supongan los tramos cargados en toda su extensión con cargas uniformemente repartidas. Ya hemos visto, al tratar de los tramos independientes, que no son éstas las que desarrollan los máximos esfuerzos cortantes, sino ciertas cargas extendidas solamente á una parte del tramo. En realidad, lo mismo sucede en las vigas de tramos continuos, pero la consideración de tales cargas complica mucho los cálculos; por otra parte, casi todos los puentes existentes han sido calculados por el procedimiento que indicamos, si bien generalmente se ha completado con algunas reglas empíricas que es bueno tener en cuenta para suplir la deficiencia de los esfuerzos cortantes calculados. Así es que ordinariamente se han calculado las barras de las celosías con coeficientes de resistencia algo menores que los admitidos para el cálculo de las cabezas, sometiéndolas, por ejemplo, á una presión ó tensión máxima de 5 kg. por milímetro cuadrado, cuando en las cabezas se admite 6 ó 6,5.

Además, muchos constructores recomiendan que en la región central, en que son muy pequeños los esfuerzos cortantes, no se reduz-

---

flector, y, sin embargo, el esfuerzo cortante no es cero. Pero esto consiste en que ese máximo del momento flector proviene de la intersección de dos ramas de curvas diferentes, y no es un verdadero máximo de una función

Es fácil comprender la razón de esta ley. Al máximo del momento flector corresponde el valor cero de su derivada, la cual es, al mismo tiempo, el esfuerzo cortante.

can las secciones de las barras á menos de la cuarta parte de las que corresponden á las mayores.

Bueno es también admitir, cuando las luces son pequeñas, una carga mayor por metro lineal para calcular los esfuerzos cortantes, que la que se emplea para el cálculo de los momentos flectores. Pueden adoptarse sin inconveniente las de los cuadros de los números 95 y 96, por más que hayan sido determinadas para el caso de los tramos independientes.

Teniendo en cuenta estas reglas prácticas, no hay inconveniente en admitir el método de cálculo que adoptamos, que aún está muy generalizado en la práctica á pesar de que existen otros procedimientos más exactos.

175. Hipótesis relativas á las cargas.—Puede parecer á primera vista que el caso más desfavorable en una viga de varios tramos es aquel en que se suponen cargados todos ellos. Pero esto está muy lejos de ser cierto, y veremos al estudiar las aplicaciones que, en ciertas regiones, se desarrollan momentos flectores y esfuerzos cortantes mucho mayores cuando algunos tramos están descargados. Es preciso, por consiguiente, estudiar las curvas en diversas hipótesis y superponerlas, para calcular las secciones de las piezas con arreglo á las ordenadas de la curva que las tenga mayores en las diversas regiones.

Este estudio se complica mucho desde el momento en que aumenta el número de tramos, porque el número de hipótesis posibles crece muy rápidamente. Pero, en los casos ordinarios de la práctica, el número de hipótesis en que deben calcularse las curvas de los momentos y de los esfuerzos cortantes es muy limitado, y expondremos detalladamente cuáles son éstas al estudiar especialmente los cálculos de los puentes de dos, tres, cuatro y cinco tramos.

Ahora nos contentaremos con indicar la regla que sirve para elegir las hipótesis que conducen á los momentos máximos sobre los apoyos y á los máximos en los tramos, que son las únicas que hace falta examinar. A las mismas hipótesis corresponden también los esfuerzos cortantes más desfavorables, de modo que el estudio de los esfuerzos cortantes no exige el examen de nuevas hipótesis.

Las reglas para conocer las hipótesis que se han de examinar en cada caso se pueden resumir como sigue:

1.° El valor máximo del esfuerzo cortante en un estribo corresponde al caso en que se suponen cargados alternativamente los tramos, empezando por el contiguo al estribo considerado.

2.° El máximo de la reacción en una pila se realiza cuando se suponen cargados los dos tramos contiguos, y los demás alternativamente.

3.° El máximo del momento flector en una pila se produce bajo la misma carga que da el máximo de la reacción en la misma.

4.° El máximo momento flector en la región central de un tramo corresponde á la misma carga que el máximo de la reacción en el estribo izquierdo, si el tramo es de orden impar, y á la carga inversa (es decir, aquella en que se suponen cargados los tramos que antes estaban descargados y vice-versa) si el tramo es de orden par.

176. DISTRIBUCIÓN DE LAS LUCES EN LAS VIGAS DE VARIOS TRAMOS.— Generalmente se adoptan luces iguales para todos los tramos centrales, y una luz algo menor para los extremos; la relación ordinariamente admitida es de $^4/_5$. Conviene adoptar esta regla para que el material esté distribuído con más uniformidad en toda la longitud del puente.

En efecto, los tramos centrales están próximamente en las mismas condiciones que si estuvieran empotrados en sus dos extremos, mientras que los extremos están empotrados en un apoyo y simplemente apoyados en el otro. Resulta de aquí que, si las luces fueran iguales, los tramos extremos necesitarían secciones mayores que los intermedios, y para que aquellas no difieran mucho, conviene hacer menores dichos tramos.

Por otra parte, M. Bresse demuestra que el momento flector medio, ó lo que es lo mismo, la sección media de la viga que sería necesaria para el caso de una sobrecarga uniformemente repartida en todo el tramo, es mínima cuando la relación entre la luz de los tramos extremos y de los intermedios es de $^4/_5$.

Por estas razones se adoptan generalmente en la práctica luces menores para los tramos extremos que para los intermedios, y se procura que la relación no difiera mucho de la indicada.

CAPÍTULO II.

VIGAS DE DOS TRAMOS.

177. Hipótesis relativas á las cargas.—Únicamente caben en este caso tres hipótesis, que son las siguientes:

1.ª El primer tramo cargado y el segundo descargado.

2.ª El primer tramo descargado y el segundo cargado.

3.ª Los dos tramos cargados.

Cuando los dos tramos son iguales, que es el caso que vamos á estudiar detalladamente, por ser el que más generalmente se presenta en la práctica, las dos primeras hipótesis se reducen á una misma, á causa de la simetría respecto al apoyo intermedio. Pero aún será más breve construir las curvas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes en las tres hipótesis limitando el estudio á un solo tramo, puesto que el segundo dará lugar á curvas simétricas y á una composición de la viga también simétrica respecto al eje vertical de la pila.

Las fórmulas generales se simplifican en este caso, y vamos á obtenerlas con toda la sencillez de que son susceptibles, para facilitar las aplicaciones numéricas.

178. Cálculo de los momentos sobre los apoyos.—Aplicaremos la fórmula de los tres momentos, ecuación [1] del capítulo anterior. Siendo M_0, M_1 y M_2 los momentos en los tres apoyos, sabemos que $M_0 = M_2 = 0$. Además, las luces de los dos tramos son iguales, y representando por l la luz común á ambos, la ecuación se convierte en

$$2 M_1 \times 2 l = \frac{1}{4} l^3 (p_1 + p_2)$$

de donde se deduce

$$M_1 = \frac{1}{16} l^2 (p_1 + p_2) \qquad [1]$$

Esta fórmula servirá para calcular el momento flector en la pila en las tres hipótesis que se deben estudiar.

En la primerá, p_1 será la suma del peso permanente y de la sobrecarga por metro lineal, y p_2 el peso permanente solo.

En la segunda, p_1 será el peso permanente solo, y p_2 se compondrá del peso permanente y de la sobrecarga.

Y en la tercera, ambos pesos serán iguales, y se compondrán del peso permanente y de la sobrecarga que corresponden por metro lineal á una viga.

179. CÁLCULO DEL MOMENTO FLECTOR EN UN PUNTO CUALQUIERA DEL PRIMER TRAMO.—Por ser el segundo tramo simétrico del primero, basta estudiar por completo uno de ellos. Para obtener la expresión del momento flector en el primer tramo, basta aplicar la fórmula [3] del capítulo anterior rebajando en una unidad los sub-índices, ó la [4] haciendo $k = 1$. Teniendo, además, en cuenta los valores particulares indicados en el párrafo anterior, tendremos,

$$M_x = -\frac{M_1}{l} x + \frac{1}{2} p_1 x (l - x) \qquad [2]$$

Esta fórmula servirá para calcular M_x en las tres hipótesis, debiéndose atribuir á M_1 el valor ya calculado correspondiente á la hipótesis que se examina, y p_1 tiene el valor correspondiente al primer tramo, que ya se ha indicado para cada una de las tres hipótesis.

En este caso, el trazado de las tres curvas que se han de dibujar es muy sencillo, y puede hacerse rápidamente sin necesidad de recortar plantillas. La ecuación anterior puede escribirse bajo la forma

$$M_x = x \left(\frac{1}{2} p_1 l - \frac{M_1}{l} - \frac{1}{2} p_1 x \right)$$

sacando x factor común.

Bajo esta forma se observa inmediatamente que hay dos valores de x que anulan el producto, á saber $x = 0$, y el valor que anula el paréntesis, el cual se deduce de la ecuación

$$\frac{1}{2} p_1 l - \frac{M_1}{l} - \frac{1}{2} p_1 x = 0$$

que será

$$x = l - \frac{2 M_1}{p_1 l}.$$

El máximo de M_x corresponde á la mitad de este valor de x (1). Calculando este valor de M_x, el correspondiente á

$$x = \frac{1}{4}\left(l - \frac{2 M_1}{p_1 l}\right)$$

que será el mismo que para

$$x = \frac{3}{4}\left(l - \frac{2 M_1}{p_1 l}\right),$$

á causa de la simetría de la curva respecto á la ordenada máxima, y además, el momento M_1 sobre el apoyo intermedio, se tendrán suficientes puntos para trazar la curva.

---

(1) Para demostrarlo, se puede observar que, sacando $\frac{1}{2} p_1$ factor común en la expresión M_x, ésta toma la forma

$$M_x = \frac{1}{2} p_1 x \left(l - \frac{2 M_1}{p_1 l} - x\right)$$

y, prescindiendo del factor constante, su máximo corresponderá al de la expresión

$$x\left(l - \frac{2 M_1}{p_1 l} - x\right)$$

que es un producto de dos factores cuya suma, $l - \frac{2 M_1}{p_1 l}$, es constante. Luego su máximo corresponderá al caso en que los dos factores son iguales, lo que da

$$x = l - \frac{2 M_1}{p_1 l} - x$$

de donde se deduce

$$x = \frac{1}{2}\left(l - \frac{2 M_1}{p_1 l}\right).$$

Así se podrán trazar las curvas correspondientes á las tres hipótesis, y, como para estudiar la distribución de las chapas en las cabezas, no hay necesidad de distinguir los momentos positivos de los negativos, se dibujarán, por encima del eje de la viga y simétricamente respecto á él, las porciones de estas curvas que dan ordenadas negativas, lo cual es más cómodo para determinar la distribución de las chapas de palastro.

Dibujadas así las tres curvas, y superpuestas en una misma figura, se elige el contorno que las envuelva, es decir, el de mayores ordenadas, que será el contorno útil con arreglo al cual se ha de estudiar la distribución de las chapas de palastro en las cabezas.

Este estudio se hace del mismo modo que en los tramos independientes, y nada nuevo tenemos que añadir aquí á lo dicho anteriormente.

180. Esfuerzos cortantes.—La ecuación que da el esfuerzo cortante en un punto cualquiera del primer tramo se deducirá de la ecuación [6] del capítulo anterior rebajando en una unidad los sub-índices, y observando que $M_0 = 0$; ó bien, haciendo $k = 1$ en la fórmula [7]. Se obtiene así

$$X_x = \frac{p_1 l}{2} - \frac{M_1}{l} - p_1 x. \qquad [3]$$

Se trazará la recta que representa esta ecuación en cada una de las tres hipótesis, para lo cual bastará calcular los valores de X_x correspondientes á $x = 0$ y á $x = l$. Conviene también calcular el valor que anula á X_x, el cual deberá ser el mismo que el que hace máximo el momento flector M_x.

Se rebaten, como en el diagrama de los momentos flectores, hacia arriba las partes que tienen ordenadas negativas, pues no interesa distinguir los signos de los esfuerzos cortantes; estos signos servirán únicamente para distinguir las barras comprimidas de las estiradas.

En cada punto de la viga, la mayor ordenada del conjunto de las rectas dibujadas nos dará el esfuerzo cortante más desfavorable con arreglo al cual se determinan las secciones de las barras de la celosía, del mismo modo que en las vigas de tramos independientes.

181. Reacciones de los apoyos.—Hace falta conocer las reacciones de los apoyos para poder comprobar su estabilidad y la de los aparatos de dilatación.

En los estribos, la reacción que habrá que considerar será evidentemente el mayor de los esfuerzos cortantes calculados para el estribo izquierdo.

En cuanto á la pila, hemos dicho que dos secciones muy próximas á ella, pero situadas á distinto lado del punto de apoyo, dan esfuerzos cortantes de signo contrario, experimentando dicho esfuerzo un cambio brusco al pasar de uno á otro lado del apoyo intermedio. El valor de este cambio brusco es precisamente la reacción del apoyo, puesto que dicho cambio proviene precisamente de que en el apoyo, se suma al esfuerzo cortante negativo en el extremo del primer tramo, el esfuerzo de abajo hacia arriba que la pila ejerce sobre la viga. La reacción buscada será, por consiguiente, la diferencia algebráica entre el esfuerzo cortante positivo que se encuentra á la derecha de la pila (calculado con la fórmula correspondiente al segundo tramo) y el negativo que se encuentra en el extremo del primer tramo.

La fórmula del esfuerzo cortante en el segundo tramo es la [6] del capítulo anterior, haciendo en ella $M_2 = 0$ y suprimiendo el índice de l.

$$X_x = \frac{p_2 l}{2} + \frac{M_1}{l} - p_2 x \qquad [4]$$

Según lo que precede, si se quiere calcular la reacción del apoyo, deberemos determinar este valor para $x = 0$, luego el valor de X_x dado por la fórmula [3], haciendo en ella $x = l$, y la suma de los valores numéricos así obtenidos (prescindiendo del signo — del segundo) será la reacción buscada. Si llamamos X_1 al primero, X_1' al segundo y R_1 á la reacción, tendremos $R_1 = X_1' - X_1$.

Se calculará en las tres hipótesis relativas á las cargas para elegir la mayor. No necesitamos trazar las rectas de los esfuerzos cortantes en el segundo tramo, porque, prescindiendo de los signos, la envolvente será la misma que en el primero, y dará lugar á las mismas secciones para las barras.

Pasemos ya á estudiar un ejemplo numérico.

182. PUENTE DE DOS TRAMOS CONTINUOS DE 30 M. DE LUZ PARA CARRETERA.—Supondremos que el ancho total del puente es de 6 m.; además, debiendo ser la luz efectiva de cada tramo, medida entre los paramentos de los apoyos, 30 m., debemos aumentar el semiancho de la pila para poder admitir que los puntos de apoyo teóricos son las verticales de los paramentos de los estribos y el eje de la pila, y admitiendo para ésta un espesor de 2,40 m., la luz efectiva que resultará para el cálculo será 31,20 m. En las fórmulas anteriores habrá que sustituir, por consiguiente, en vez de l, 31,20 m.

Vamos á evaluar las cargas empezando por la carga permanente. Esta se compondrá del peso de la parte metálica y del correspondiente al afirmado y á las aceras si existen.

Para el peso de la parte metálica, el cuadro del núm. 93 da 232 kg. por metro superficial de planta. Como á cada metro lineal de viga corresponde sostener 3 m.^{2} de piso, el peso de la parte metálica por metro lineal será $3 \times 232 = 696$ kg. En esta evaluación no tenemos en cuenta la pequeña reducción que puede admitirse por ser los tramos continuos, pues conviene más bien exagerar algo los pesos.

Para no detenernos en detalles, evaluaremos el peso del firme y de las aceras como si todo el puente estuviera afirmado, admitiendo para el firme y la capa de tierra un espesor medio de 0,35 m., y un peso por metro cúbico de 1.800 kg. Según eso, el peso que corresponderá á cada metro lineal de viga será $3 \times 0{,}35 \times 1.800 = 1.890$ kg.

Luego el peso permanente por metro lineal se compondrá como sigue:

Peso de la parte metálica, $3 \times 232 =$	696 kg.
Afirmado y aceras, $3 \times 0{,}35 \times 1.800 =$	1.890 »
TOTAL.....	2.586 »

ó redondeando la cifra para facilitar las operaciones, 2.600 kg.

El peso de las cargas móviles debe evaluarse á razón de 300 kg. por metro cuadrado, tanto para los momentos flectores como para los esfuerzos cortantes, según el cuadro del núm. 96. A cada metro lineal de viga corresponderá $3 \times 300 = 900$ kg.

El valor de p en las fórmulas será, por lo tanto, 2.600 kg. para los tramos que se consideran descargados, y 2.600 + 900 = 3.500 kg. para los que se deben considerar cargados.

Vamos ahora á ver cuáles son las hipótesis que se han de examinar.

183. Hipótesis relativas á las cargas.—Las tres hipótesis indicadas anteriormente se hallan representadas en la figura 148.

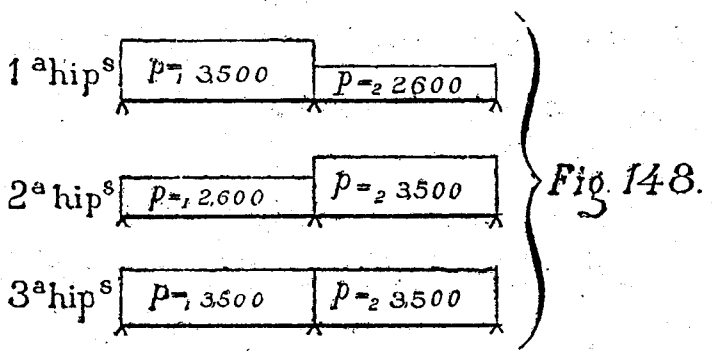


Fig. 148.

La primera se obtiene suponiendo el primer tramo cargado y el segundo descargado, de modo que, para aplicar las fórmulas, habrá que sustituir en ellas $p_1 = 3.500$ kg. y $p_2 = 2.600$ kg.

La segunda supone el primer tramo descargado y el segundo cargado, de modo que $p_1 = 2.600$ kg. y $p_2 = 3.500$ kg.

Finalmente, la tercera supone cargados ambos tramos, de suerte que $p_1 = p_2 = 3.500$ kg.

184. Momentos flectores sobre los apoyos.—Aplicando sucesivamente la fórmula [1] en las tres hipótesis mencionadas, obtendremos:

1.ª hipótesis.— $p_1 = 3.500$; $p_2 = 2.600$.

$$M_1 = \frac{1}{16} \times \overline{31,20^2} \, (3.500 + 2.600) = 371.124.$$

2.ª hipótesis.— $p_1 = 2.600$; $p_2 = 3.500$.

$$M_1 = \frac{1}{16} \times \overline{31,20^2} \, (2.600 + 3.500) = 371.124.$$

3.ª *hipótesis.*—$p_1 = p_2 = 3.500$.

$$M_1 = \frac{1}{16} \times \overline{31,20^2} \, (3.500 + 3.500) = 425.880.$$

Los momentos en los estribos son nulos en todas las hipótesis.

185. MOMENTOS EN EL PRIMER TRAMO.—Determinaremos los momentos en un punto cualquiera del primer tramo, y en las tres hipótesis, sirviéndonos de la fórmula [2].

1.ª *hipótesis.*—Habrá que sustituir en [2] los valores siguientes:

$$M_1 = 371.124; \quad l = 31,20; \quad p_1 = 3.500.$$

Resultará

$$M_x = -\frac{371.124}{31,20} x + \frac{3.500 \times 31,20}{2} x - \frac{3.500}{2} x^2$$

$$= 42.705 \, x - 1.750 \, x^2 = x \, (42.705 - 1.750 \, x)$$

Para construir la curva, calcularemos, en primer lugar, los valores de x que hacen $M_x = 0$; uno de ellos es $x = 0$, y el otro se obtiene igualando el paréntesis á cero

$$42.705 - 1.750 \, x = 0$$

de donde

$$x = \frac{42.705}{1.750} = 24,40.$$

El valor de x que hace máximo M_x, es la mitad del anterior $x = 12,20$. El mismo valor se obtiene por medio de la fórmula general del núm. 173, como se puede comprobar.

Haciendo la sustitución de este valor de x, se obtendrá

$$M_{máx} = 260.531.$$

Para obtener el momento flector en el apoyo intermedio, haremos $x = 31,20$ y tendremos

$$M_x = -371.124.$$

Calcularemos, además, la ordenada correspondiente á $x = 6$ m.

que será igual á la correspondiente á $x = 12{,}20 + 6{,}20 = 18{,}40$ m., á causa de la simetría respecto á la ordenada máxima; se tendrá

$$x = 6 \qquad M_x = 193.230$$
$$x = 18{,}40 \qquad M_x = 193.230$$

Si se quiere determinar bien la parte de la curva cuyas ordenadas son negativas, se puede calcular otro punto para una abscisa comprendida entre 24,40 y 31,20.

Con estos datos tenemos siete puntos de la curva, suficientes para trazarla con toda la exactitud necesaria. Así se ha trazado la figura 149, adoptando para escala de las distancias 2 mm. por metro, y para la de momentos 4 mm. por 50.000 (1).

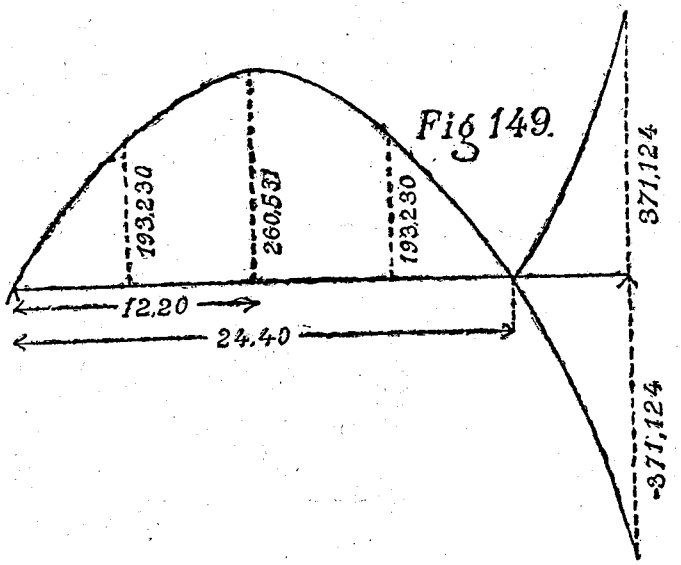


Fig 149.

Luego se ha rebatido hacia arriba la parte de ordenadas negativas.

2.ª *hipótesis.*—Siguiendo la misma marcha que para el examen de la 1.ª hipótesis, sustituiremos en la fórmula [2]

$$M_1 = 371.124; \quad p_1 = 2.600; \quad l = 31{,}20;$$

y tendremos

$$M_x = -\frac{371.124}{31{,}20}\,x + \frac{2.600 \times 31{,}20}{2}\,x - \frac{2.600}{2}\,x^2$$

$$= -11.895\,x + 40.560\,x - 1.300\,x^2 = x\,(28.665 - 1.300\,x).$$

(1) En los proyectos conviene adoptar escalas mayores.

Los valores que anulan M_x son $x = 0$ y $x = \frac{28.665}{1.300} = 22{,}05$.

El máximo M_x corresponde á la mitad de este valor, ó sea, $x = 11{,}02$ y es

$$M_{máx} = 158.125.$$

Además, calcularemos los siguientes pares de valores de x y M_x

$x = 31{,}20$	$M_x = -371.124$
$x = 6$	$M_x = 125.250$
$x = 16{,}04$	$M_x = 125.250$

Determinados estos puntos, podremos trazar la curva de la figura 150 del mismo modo que se trazó la correspondiente á la 1.ª hipótesis.

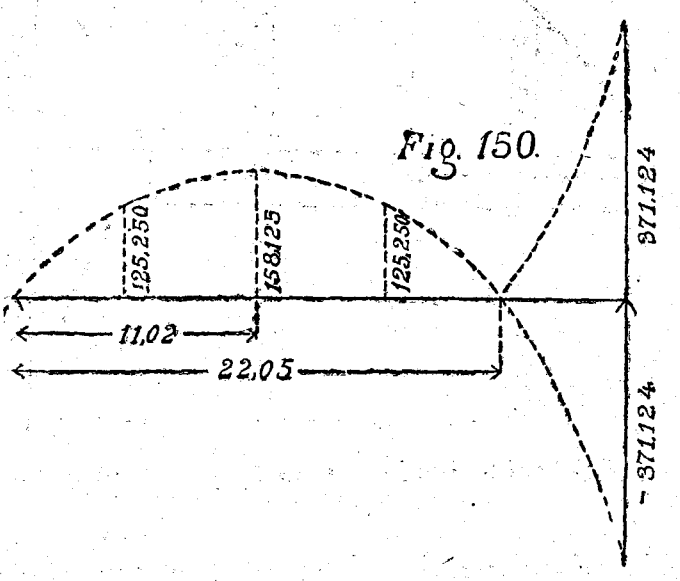


Fig. 150.

3.ª *hipótesis.*—Se sustituirá en la fórmula [2]

$$M_1 = 425.880; \quad p_1 = 3.500; \quad l = 31{,}20;$$

y tendremos

$$M_x = -\frac{425.880}{31{,}20}\,x + \frac{3.500 \times 31{,}20}{2}\,x - \frac{3.500}{2}\,x^2 =$$

$$= x\,(40.950 - 1.750\,x).$$

M_x será nulo para $x = 0$, y para $x = \frac{40.950}{1.750} = 23{,}40$.

El máximo corresponderá á $x = 11{,}70$, y su valor será

$$M_{máx} = 239.558.$$

Además, determinaremos los pares de valores siguientes de M_x y x;

$x = 31{,}20$	$M_x = -425.880$
$x = 6$	$M_x = 182.700$
$x = 17{,}40$	$M_x = 182.700$

Conocidos estos puntos trazaremos la curva de los momentos flectores como se ve en la figura 151.

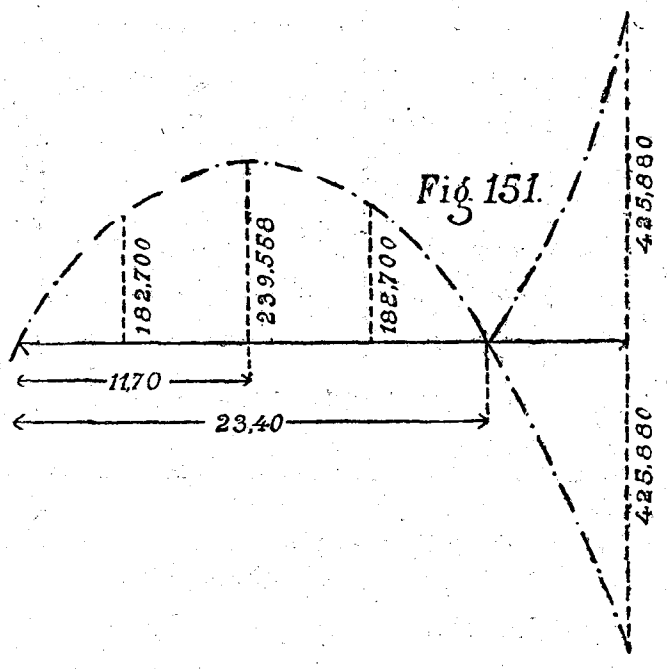
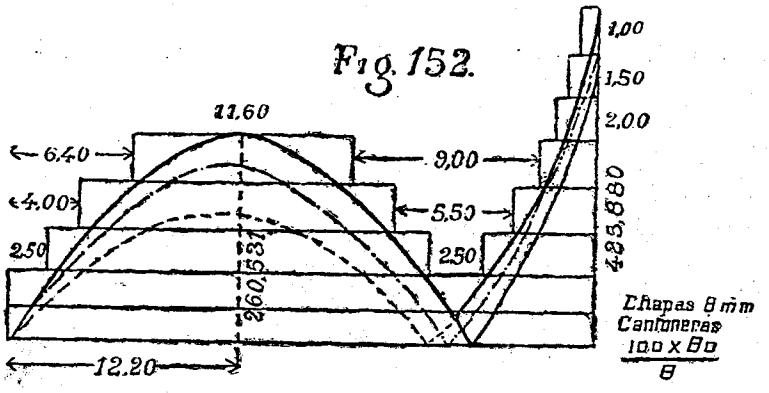


Fig. 151.

Ahora reuniremos en una sola figura (fig. 152) las curvas de momentos correspondientes á las tres hipótesis, y en ella indicaremos con trazo grueso la curva envolvente que da lugar en cada punto de la viga al mayor momento flector. Esta curva es la que sirve

para el estudio de la distribución de las chapas de palastro en las cabezas de las vigas.

Fig. 152.



El cuadro siguiente resume los principales resultados relativos al cálculo de los momentos flectores:

TRAMOS.	Hipótesis relativas á las cargas.	Valores de los pesos uniformemente repartidos por metro lineal.		Valores de los momentos flectores en los apoyos.			Valores de los momentos flectores máximos en los tramos.	
		Primer tramo p_1	Segundo tramo p_2	Estribo izquierdo	Pila.	Estribo derecho	Valores de x correspondientes al momento máximo.	Valores del momento máximo.
1.er tramo.	1.a	3.500	2.600	0	371.124	0	12,20	260.531
	2.a	2.600	3.500	0	371.124	0	11,02	158.125
	3.a	3.500	3.500	0	425.880	0	11,70	239.558
2.º tramo..	Los mismos resultados se reproducen simétricamente en el 2.º tramo.							

Vemos comprobada en este cuadro la regla dada en el núm. 175 para reconocer las hipótesis que producen los momentos máximos en los apoyos y en los tramos.

El momento máximo en la pila se obtiene en la 3.ª hipótesis, estando cargados los tramos contiguos.

El momento máximo en el primer tramo, de orden impar, cuando está cargado este tramo (1.ª hipótesis); y el momento máximo en el segundo tramo, de orden par, en la hipótesis inversa de la anterior (2.ª hipótesis).

186. DISTRIBUCIÓN DE LAS CHAPAS EN LAS CABEZAS DE LAS VIGAS.— Adoptemos para altura de la viga 2,50 m. $\left(\frac{1}{12}\text{ de la luz}\right)$, y para ancho de las cabezas 0,45 m. Supondremos que ésta se ha de formar con el número necesario, en cada sección, de chapas de 8 mm. de espesor, y dos hierros de ángulo de $\frac{100 \times 80}{8}$ para su enlace con el alma. Prescindimos de la resistencia del trozo de alma que sirve para enlazar las cabezas con las barras de la celosía.

El área de los dos hierros de ángulo es 2.752 mm.^{2} Si la suponemos repartida en toda la cabeza, el espesor será de $\frac{2.752}{450} = 6$ mm. próximamente, y, por lo tanto, los hierros de ángulo equivalen á una chapa de 6 mm. de espesor.

Si suponemos que el hierro ha de trabajar á 6 kg. por milímetro cuadrado, cada milímetro de espesor resistirá un esfuerzo de $6 \times 450 = 2.700$ kg., y tiene un momento resistente de $2.700 \times 2{,}50 = 6.750$.

Luego el espesor de 6 mm., equivalente á los hierros de ángulo, resistirá á un momento flector de $6 \times 6.750 = 40.500$.

Trazando una paralela al eje de la viga á esta altura tomada en la escala de los momentos (4 mm. por 50.000 en la fig. 152) tendremos representada la resistencia de los hierros de ángulo.

Cada chapa de 8 mm. resistirá á un momento flector de $8 \times 6.750 = 54.000$. Tomando este valor en la escala de los momentos trazaremos una serie de paralelas á esta distancia unas de otras á partir de la horizontal ya trazada, hasta envolver á la curva de los momentos, limitándolas escalonadamente, como se ve en la figura; así tendremos representadas las longitudes y posiciones en las diversas chapas que constituyen las cabezas. Vemos que son necesarias en la pila siete chapas, y en el punto que corresponde al momento máximo en el tramo, cuatro.

Encima del apoyo, el esfuerzo correspondiente á la cabeza es

$$\frac{M_1}{h} = \frac{425.880}{2{,}50} = 170.352 \text{ kg.}$$

Y el trabajo del hierro por milímetro cuadrado

$$\frac{M_1}{h \times \omega} = \frac{425.880}{2{,}50 \times 450 \times 62} = 6{,}10 \text{ kg.}$$

En el punto correspondiente al momento máximo, para $x = 12{,}20$ tendremos

$$\frac{M_{máx}}{h \times \omega} = \frac{260.531}{2{,}50 \times 38 \times 450} = 6{,}09 \text{ kg. por mm.}^2$$

Puede calcularse, como se ha hecho en ejemplos anteriores, el trabajo efectivo, descontando de la sección el área de los agujeros de los roblones.

187. ESFUERZOS CORTANTES.—Apliquemos la fórmula [3] correspondiente al primer tramo en las tres hipótesis.

1.ª hipótesis.— Haciendo, en la fórmula [3], $M_1 = 371.124$; $p_1 = 3.500$ tendremos

$$X_x = \frac{3.500 \times 31{,}20}{2} - \frac{371.124}{31{,}20} - 3.500\ x$$

$$= 42.705 - 3.500\ x \quad (1)$$

Obtendremos los siguientes pares de valores de x y de X_x.

Para $x = 0$	$X_0 = 42.705$ kg.
» $x = 12{,}20$	$X_x = 0$
» $x = 31{,}20$	$X_1 = -66.495$ kg.

Se observará que $X_x = 0$ corresponde á la abscisa que hace máximo el momento flector, como debía suceder.

Para calcular la reacción del apoyo intermedio, aplicaremos la fórmula [4] del esfuerzo cortante en el segundo tramo, haciendo en ella $x = 0$; $M_1 = 371.124$ y $p_2 = 2.600$; obtendremos

$$X_1' = \frac{2.600 \times 31{,}20}{2} + \frac{371.124}{31{,}20} = 52.455 \text{ kg.}$$

---

(1) Puede hallarse este valor más rápidamente, tomando la derivada de M_x correspondiente á la 1.ª hipótesis (núm. 185).

La reacción R_1 del apoyo será, como hemos dicho anteriormente, la suma de los dos esfuerzos cortantes correspondientes al mismo en los dos tramos

$$R_1 = X_1' - X_1 = 66.495 + 52.455 = 118.950 \text{ kg.}$$

La reacción R_0 en el estribo izquierdo es el esfuerzo cortante correspondiente

$$R_0 = X_0 = 42.705 \text{ kg.}$$

La R_2 del estribo derecho será la misma que la reacción R_0 correspondiente á la 2.ª hipótesis, y la calcularemos al examinar esta hipótesis.

Todos estos resultados se pueden observar en la figura 153, que

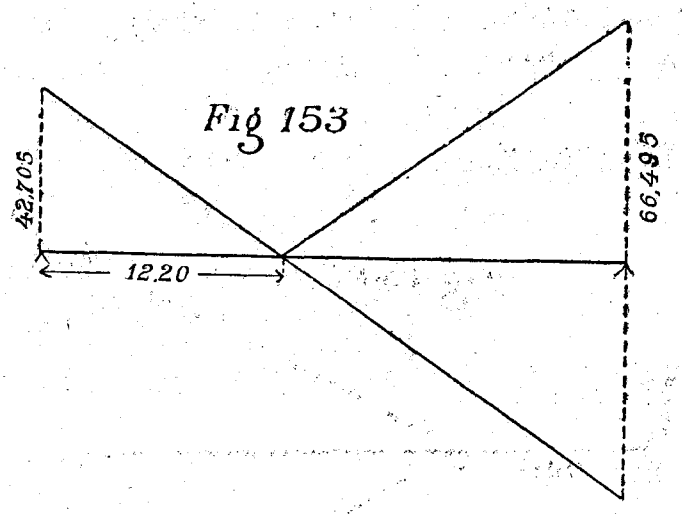


Fig 153

representa la recta de los esfuerzos cortantes en la escala de 2 mm. por metro para las distancias, y de 4 mm. por 10.000 kg. para los esfuerzos.

2.ª *hipótesis.*—Aplicando la fórmula [3], haciendo en ella

$$M_1 = 371.124; \quad p_1 = 2.600\ x$$

tendremos

$$X_x = \frac{2.600 \times 31{,}20}{2} - \frac{371.124}{31{,}20} - 2.600\ x$$

$$= 28.665 - 2.600\ x$$

Se determinará la recta por medio de los dos puntos

$$x = 0 \qquad X_0 = 28.665$$
$$x = 31{,}20 \qquad X_1 = -52.445$$

Veremos, igualando á cero el valor de X_x, que el valor correspondiente de x es 11,02, abscisa correspondiente al momento máximo.

Para calcular la reacción en la pila, determinaremos el esfuerzo cortante sobre el apoyo por medio de la fórmula [4], correspondiente al segundo tramo, haciendo en ella $x = 0$; $M_1 = 371.124$; $p_2 = 3.500$; y tendremos

$$X_1' = 66.495 \text{ kg.}$$

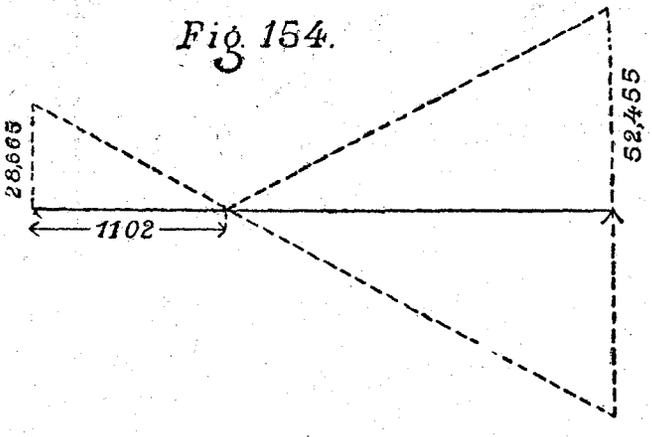
La reacción del apoyo intermedio, R_1, será

$$R_1 = X_1' - X_1 = 66.495 + 52.445 = 118.940 \text{ kg.}$$

La reacción del estribo izquierdo será el esfuerzo cortante correspondiente, $R_0 = 28.665$ kg. Este mismo valor será la reacción del apoyo derecho en la 1.ª hipótesis.

La figura 154 representa los esfuerzos cortantes correspondientes á esta hipótesis.

Fig. 154.



3.ª *hipótesis.*—Aplicando la fórmula [3] con los datos

$$M_1 = 425.880; \quad p_1 = 3.500;$$

tendremos

$$X_x = \frac{3.500 \times 31{,}20}{2} - \frac{425.880}{31{,}20} - 3.500\, x$$
$$= 40.950 - 3.500\, x.$$

Se determinará la recta por los dos puntos

$$x = 0 \qquad X_0 = 40.950 \text{ kg.}$$
$$x = 31{,}20 \qquad X_1 = -68.250 \text{ »}$$

El esfuerzo cortante se anula para $x = 11{,}70$ m.

Para calcular la reacción R_1, aplicaremos la fórmula [4] para

$$M_1 = 425.880; \quad p_2 = 3.500; \quad x = 0$$

y tendremos

$$X_1' = 68.250$$

La reacción buscada será

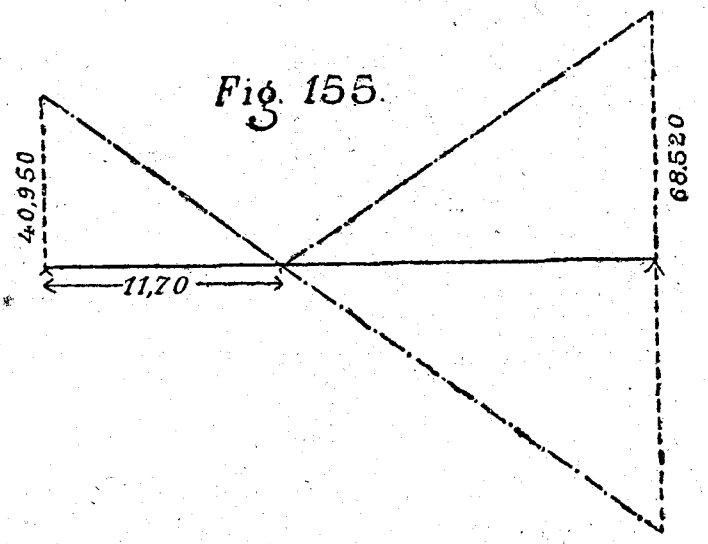
$$R_1 = X_1' - X_1 = 68.250 + 68.250 = 136.500 \text{ kg.}$$

Las reacciones de los estribos serán

$$R_0 = R_2 = 40.950 \text{ kg.}$$

La figura 155 representa los esfuerzos cortantes en este caso.

Fig. 155.



La reacción más desfavorable de los estribos es 42.705 kg.

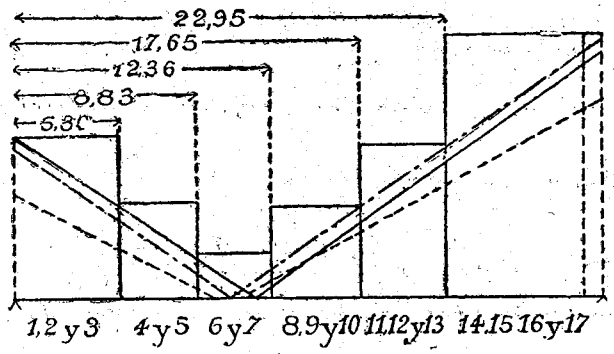
La reacción más desfavorable de la pila corresponde al caso en que están cargados los dos tramos, y es 136.500 kg.

Estas reacciones servirán para comprobar la estabilidad de los aparatos de dilatación y de los apoyos, y para calcular la parte del alma que queda directamente encima de los apoyos. Esta parte ha de constituir, como ya hemos dicho anteriormente, un fuerte mon-

tante capaz de resistir por compresión á la reacción del apoyo; generalmente se hace llena la pared del alma en esa zona, y se añaden como cubrejuntas los nervios de refuerzo normales al alma que sean necesarios para que el trabajo del hierro sea moderado.

Reunidas en una sola figura las 153, 154 y 155, y rebatidos á un solo lado del eje las rectas de los esfuerzos cortantes, obtenemos la figura 156, que da á conocer en cada sección los esfuerzos cortantes

Fig. 156.



más desfavorables que han de servir para determinar las secciones de las barras de la celosía.

En el cuadro siguiente se consignan los principales resultados relativos al estudio de los esfuerzos cortantes y las reacciones de los apoyos.

TRAMOS.	Hipótesis relativas á las cargas.	Esfuerzos cortantes en el estribo.		Puntos en que la línea de los esfuerzos cortantes corta al eje de las x.		Esfuerzos cortantes en la pila.		Esfuerzos cortantes en la pila según la fórmula correspondiente al 2.º tramo.	Reacciones de la pila.	Reacciones más desfavorables de los estribos.
		Valores de x.	Valores del esfuerzo cortante.	Valores de x.	Valores del esfuerzo cortante.	Valores de x.	Valores del esfuerzo cortante.			
1.er tramo.	1.ª	0	42.705	12,20	0	31,20	66.495	52.455	118.950	42.705
	2.ª	0	28.665	11,02	0	31,20	52.455	66.495	118.950	28.665
	3.ª	0	40.950	11,70	0	31,20	68.520	68.520	136.500	40.950

En el 2.º tramo se repiten los mismos valores.

188. CÁLCULO DE LAS SECCIONES DE LAS BARRAS DE LA CELOSÍA.— Suponemos divididos los 30 m. de luz libre en 17 paneles de 1,765 m., colocando montantes de refuerzo en cada división. En la parte de alma correspondiente al apoyo intermedio y en la entrega sobre los estribos, se hará el alma llena, reforzándola como hemos indicado.

Supondremos que las barras cortadas por una sección vertical sean cuatro, ó lo que es lo mismo, que la celosía es doble.

En la figura 156 se han representado las longitudes correspondientes á los diversos grupos de paneles en que se adoptan distintos modelos de barras; para cada grupo se determina el mayor esfuerzo cortante, y se deducen las secciones teóricas por medio de la fórmula [2] del núm. 111; adoptamos como coeficiente de resistencia 5 kg. por milímetro cuadrado, fundándonos en las razones expuestas en el capítulo anterior, núm. 174.

1.er grupo.—Paneles 1, 2 y 3. El esfuerzo cortante máximo en esta región es el que corresponde al estribo en la 1.ª hipótesis, es decir, 42.705 kg.

La aplicación de la fórmula citada nos da para sección de una barra

$$\omega_1 = \frac{42.705}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 42.705}{20} = 3.011 \text{ mm.}^2$$

2.º grupo.—Paneles 4 y 5. En la figura 156 se ve que el esfuerzo cortante más desfavorable corresponde también á la 1.ª hipótesis; se hallará sustituyendo en la ecuación correspondiente á este caso el valor de x al extremo de la derecha del 3.er panel, que, teniendo en cuenta la longitud de cada uno, resulta $x = 5{,}30$, y el esfuerzo cortante es 24.155 kg.

La sección de una barra será

$$\omega_2 = \frac{24.155}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 24.155}{20} = 1.702 \text{ mm.}^2$$

3.er grupo.—Paneles 6 y 7. El esfuerzo cortante máximo es el correspondiente á la abscisa $x = 8{,}83$ en la 1.ª hipótesis, es decir, 11.800 kg.

La sección de las barras será

$$\omega_3 = \frac{11.800}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 11.800}{20} = 832 \text{ mm.}^2$$

4.° grupo.—Paneles 8, 9 y 10. El esfuerzo cortante mayor es el correspondiente á la abscisa 17,65 en la 3.ª hipótesis, 20.825 kg.

La sección de las barras es

$$\omega_4 = \frac{20.825}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 20.825}{20} = 1.468 \text{ mm.}^2$$

5.° grupo.—Paneles 11, 12 y 13. El esfuerzo cortante máximo es el correspondiente á $x = 22{,}95$ en la 3.ª hipótesis, 39.375 kg.

La sección de las barras es

$$\omega_5 = \frac{39.375}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 39.375}{20} = 2.776 \text{ mm.}^2$$

6.° grupo.—Paneles 14, 15 y 16. El esfuerzo cortante máximo es el correspondiente á la pila en la 3.ª hipótesis, 68.520 kg.

La sección de las barras será

$$\omega_6 = \frac{68.520}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 68.520}{20} = 4.830 \text{ mm.}^2$$

CAPÍTULO III.

VIGAS DE TRES TRAMOS.

189. Distribución de las luces.—Estableceremos las fórmulas generales aplicables á las vigas de tres tramos, como lo hemos hecho en el capítulo precedente para las de dos, suponiendo que los tramos sean simétricos, que es el caso que ordinariamente se presenta en la práctica. Además supondremos, por las razones expuestas en el núm. 176, que los tramos extremos son menores que el central, siendo m la relación entre la luz de los primeros y la del último; esta relación debe acercarse, como ya hemos indicado, á $\frac{4}{5}$, ó sea 0,80.

190. Hipótesis relativas á las cargas.—Según la regla indicada en el núm. 175, debemos examinar las hipótesis que dan los momentos máximos en los tramos y en los apoyos. Resultan las tres combinaciones siguientes (fig. 157):

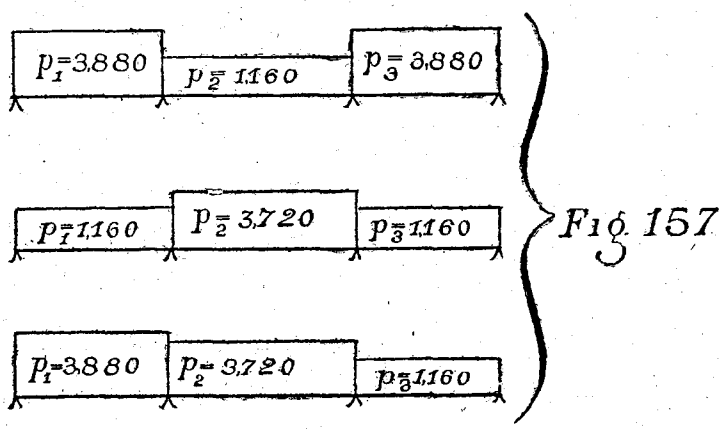


Fig. 157

1.° Los tramos extremos cargados y el central descargado; esta hipótesis da los momentos máximos en los tramos extremos.

2.° El tramo central cargado y descargados los extremos; esta suposición realiza el máximo momento flector en el tramo central.

3.° Cargados los dos primeros tramos y descargado el tercero, hipótesis que da el máximo momento flector sobre la primera pila; á causa de la simetría basta estudiar el primer tramo y la mitad del segundo, y no es necesario considerar la hipótesis de hallarse descargado el primer tramo y cargados los otros dos, que daría el momento máximo sobre la segunda pila, el cual será evidentemente igual al obtenido para la primera.

Las mismas hipótesis dan á conocer los esfuerzos cortantes más desfavorables.

191. FÓRMULAS DE LOS MOMENTOS FLECTORES EN LOS APOYOS.—Sea l la luz del tramo central, y la de los laterales será $m\,l$, como hemos indicado. Sean M_0, M_1, M_2 y M_3 los momentos flectores sobre los apoyos, p_1, p_2, p_3 los pesos uniformemente repartidos en los tres tramos.

Aplicando el teorema de los tres momentos, fórmula [1] del núm. 174, tendremos las dos ecuaciones siguientes, observando que $M_0 = M_3 = 0$.

$$2\,(m\,l + l)\,M_1 + l\,M_2 = \frac{1}{4}\,(p_1\,m^3\,l^3 + p_2\,l^3)$$

$$l\,M_1 + 2\,(l + m\,l)\,M_2 = \frac{1}{4}\,(p_2\,l^3 + p_3\,m^3\,l^3)$$

Suprimiendo el factor común l, sacando l^2 factor común en los segundos miembros, y representando éstos por α y β para simplificar, las dos ecuaciones pueden escribirse en esta forma:

$$2\,(1 + m)\,M_1 + M_2 = \frac{l_2}{4}\,(p_1\,m^3 + p_2) = \alpha$$

$$M_1 + 2\,(1 + m)\,M_2 = \frac{l^2}{4}\,(p_2 + p_3\,m^3) = \beta.$$

Si las resolvemos con relación á M_1 y M_2 por cualquiera de los procedimientos conocidos del álgebra elemental, tendremos

$$M_1 = \frac{\beta - 2\,\alpha\,(1+m)}{1-4\,(1+m)^2}. \qquad [1]$$

$$M_2 = \frac{\alpha - 2\,\beta\,(1+m)}{1-4\,(1+m)^2}. \qquad [2]$$

Si reemplazamos en vez de α y β sus valores, se podrá escribir

$$M_1 = \frac{l^2}{4}\,\frac{p_2 + p_3\,m^3 - 2\,(p_1\,m^3 + p_2)\,(1+m)}{1-4\,(1+m)^2}.$$

$$M_2 = \frac{l^2}{4}\,\frac{p_2 + p_1\,m^3 - 2\,(p_2 + p_3\,m^3)\,(1+m)}{1-4\,(1+m)^2}.$$

Es preferible calcular los valores numéricos de α y β, y emplear luego las fórmulas [1] y [2].

192. Valores del momento flector en los tramos.—Basta calcular las expresiones de los momentos en los dos primeros tramos, puesto que, á causa de la simetría, no es necesario ocuparse del tercero.

Si aplicamos la fórmula [3] del capítulo I rebajando una unidad los sub-índices, y recordando que la luz del primer tramo es $m\,l$, tendremos el valor de M_x en dicho primer tramo,

$$M_x = -\frac{M_1}{m\,l}\,x + \frac{p_1\,x}{2}\,(m\,l - x). \qquad [3]$$

La primera fórmula, sin más modificación que la supresión del sub-índice en l_2, nos dará el valor de M_x en el segundo tramo,

$$M_x = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l}\,x + \frac{p_2\,x}{2}\,(l - x). \qquad [4]$$

193. Valores del esfuerzo cortante.—La fórmula [6] del número 174, haciendo en ella las mismas sustituciones que acabamos de indicar, nos dará para el primer tramo

$$X_x = \frac{p_1\,m\,l}{2} - \frac{M_1}{m\,l} - p_1\,x. \qquad [5]$$

Y para el segundo,

$$X_x = \frac{p_2\, l}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} - p_2\, x. \qquad [6]$$

Las fórmulas que preceden bastan para calcular un puente de tres tramos, siempre que sean simétricos.

194. PUENTE PARA FERROCARRIL DE ANCHO NORMAL Y DE VÍA ÚNICA. —Supondremos que la luz de los tramos laterales sea 45 m. y la del central 56, de modo que la relación es muy aproximadamente $\frac{4}{5}$, $m = 0{,}80$. Supondremos, además, que adoptamos vigas de celosía de pared doble (veremos que es necesario por razón de las cargas), que la altura sea de 5,50 m. entre los centros de gravedad de las cabezas, con lo cual puede estar situado el piso en la parte inferior, quedando espacio suficiente para arriostrar las vigas á la altura de las cabezas superiores.

195. EVALUACIÓN DE LAS CARGAS.—Empezaremos por evaluar las cargas.

Para simplificar los cálculos, tomaremos el mismo peso permanente por metro lineal para los tres tramos, adoptando el correspondiente á la luz media, que es próximamente 50 m. En el cuadro del núm. 93 vemos que dicho peso permanente correspondiente á una viga es 1.153 kg.

Calculemos la sobrecarga uniformemente repartida para el cálculo de los momentos flectores; convendrá aquí tomar las cargas correspondientes á cada tramo según su luz.

Para una viga del tramo lateral, la sobrecarga por metro lineal será, según el cuadro *(a)* del núm. 94,

$$\frac{1}{2}\left[4.400 + \frac{35}{40} \times 1.200\right] = 2.725 \text{ kg.}$$

Para el tramo central, de 56 m. de luz, tendremos

$$\frac{1}{2}\left(4.400 + \frac{24}{40} \times 1.200\right) = 2.560 \text{ kg.}$$

Según eso, la carga correspondiente á un tramo descargado es 1.153 kg., ó en número redondo, 1.160 kg.

Si se considera cargado uno de los tramos laterales, la carga por metro lineal será 1.153 + 2.725 = 3.878 kg., ó bien 3.880.

Y si se supone cargado el tramo central, 1.153 + 2.560 = 3.713 kg., ó bien 3.720.

Tomaremos para cargas uniformemente repartidas correspondientes á los esfuerzos cortantes las dadas por el cuadro *(b)* del número citado, considerando como longitud cargada la luz del tramo.

Para el tramo lateral, resultará, por metro lineal,

$$\frac{1}{2}\left(4.800 + \frac{35}{40} \times 1.400\right) = 3.012 \text{ kg.}$$

Y para el central,

$$\frac{1}{2}\left(4.800 + \frac{24}{40} \times 1.400\right) = 2.820 \text{ kg.}$$

De modo que las cargas totales para el cálculo de los esfuerzos cortantes, serán 1.160 kg. por metro lineal para los tramos descargados, 1.153 + 3.012 = 4.165, ó en número redondo, 4.170, para un tramo lateral cargado, y 1.153 + 2.820 = 3.973, ó bien 3.980 kg., cuando se considere cargado el tramo central.

Las cargas que preceden han sido determinadas para el caso de las vigas independientes; pero todos los Ingenieros las aplican al cálculo de los tramos continuos, y pueden admitirse sin ningún inconveniente, puesto que la experiencia ha demostrado que los puentes así calculados se hallan en buenas condiciones de seguridad.

196. Hipótesis relativas á las cargas.—Las hipótesis que se deben considerar son las tres que se han indicado en el núm. 190 y se han representado en la figura 157.

La primera supone cargados los tramos extremos y descargado el central; según lo que acabamos de decir, la carga por metro lineal en el segundo tramo será $p_2 = 1.160$; en los laterales $p_1 = p_3 = 3.880$ kg. para el cálculo de los momentos flectores, y $p_1 = p_3 = 4.170$ kg. para el de los esfuerzos cortantes.

En la *2.ª hipótesis*, los tramos extremos están descargados y el central cargado; tendremos $p_1 = p_3 = 1.160$ kg. para los tramos extremos; y en el central, $p_2 = 3.720$ kg. para el cálculo de los momentos flectores, y $p_2 = 3.980$ kg. para el de los esfuerzos cortantes.

En la *3.ª hipótesis*, están cargados los tramos primero y segundo; las cargas serán $p_3 = 1.160$ kg. para los dos cálculos.

Para el cálculo de los momentos flectores, tendremos $p_1 = 3.880$ kg. y $p_2 = 3.720$ kg.

Y para el cálculo de los esfuerzos cortantes, $p_1 = 4.170$ kg. y $p_2 = 3.980$ kg.

197. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS FLECTORES SOBRE LOS APOYOS.— Empecemos por calcular algunas de las expresiones numéricas que figuran en todas las fórmulas, cuyos valores conviene tener presentes:

$$m = \frac{45}{56} = 0{,}80$$

$$\frac{l^2}{4} = \frac{\overline{56^2}}{4} = 784$$

$$0{,}\overline{80^3} = 0{,}512.$$

$$(1 + m)^2 = 3{,}24.$$

1.ª hipótesis.—Calcularemos los valores de α y β con los siguientes datos:

$$l = 56 \text{ m.}; \quad p_1 = 3.880; \quad p_2 = 1.160; \quad p_3 = 3.880.$$

Resultará

$$\alpha = \frac{\overline{56^2}}{4}\,(3.880 \times \overline{0{,}80^3} + 1.160) = 2.466.903$$

$$\beta = \frac{\overline{56^2}}{4}\,(1.160 + \overline{0{,}80^3} \times 3.880) = 2.466.903$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas [1] y [2], tendremos

$$M_1 = M_2 = 2.466.903 \times \frac{1 - 3{,}60}{1 - 4 \times 3{,}24} = 535.318.$$

2.ª *hipótesis.*—Haciendo en los valores de α y β,

$$p_1 = p_3 = 1.160, \quad p_2 = 3.720$$

y conservando para l y m los valores anteriores, se obtiene

$$\alpha = \beta = \frac{\overline{56}^2}{4} (1.160 \times \overline{0,80}^3 + 3.720) = 3.382.176$$

y sustituyendo en [1] y [2]

$$M_1 = M_2 = 3.382.176 \frac{1 - 3,60}{1 - 4 \times 3,24} = 733.952.$$

Se explica la igualdad de los momentos en las pilas, en las dos hipótesis que preceden, por la simetría de las cargas.

3.ª *hipótesis.*—Habremos de sustituir en los valores de α y β,

$$p_1 = 3.880; \quad p_2 = 3.720, \quad \text{y} \quad p_3 = 1.160;$$

resultará

$$\alpha = \frac{\overline{56}^2}{4} (3.880 \times \overline{0,80}^3 + 3.720) = 4.473.940$$

$$\beta = \frac{\overline{56}^2}{4} (3.720 + 1.160 \times \overline{0,80}^3) = 3.382.176$$

Sustituyendo en las fórmulas [1] y [2], tendremos,

$$M_1 = \frac{3.382.176 - 8.947.880 \times 1,80}{1 - 4 \times 3,24} = 1.066.320$$

$$M_2 = \frac{4.473.940 - 6.764.352 \times 1,80}{1 - 4 \times 3,24} = 643.971$$

Conforme á la regla del núm. 175, resulta el máximo momento en la primera pila, cuando están cargados los dos tramos contiguos.

198. VALORES DE LOS MOMENTOS FLECTORES EN LOS TRAMOS.—1.ª *hipótesis.*—Debemos calcular la expresión del momento flector en cada una de las hipótesis relativas á las sobrecargas, y para cada uno de los dos primeros tramos, sirviéndonos, al efecto, de las fórmulas [3] y [4].

1.er tramo.—Para el 1.er tramo, aplicaremos la fórmula [3], la cual dará

$$M_x = -\frac{535.318}{45}x + \frac{3.880 \times 45}{2}x - \frac{3.880}{2}x^2 =$$

$$= 75.404\,x - 1.940\,x^2 = x\,(75.404 - 1.940\,x).$$

Los valores que anulan M_x son $x = 0$, y el que anula el paréntesis,

$$75.404 - 1.940\,x = 0.$$

Es decir,

$$x = \frac{75.404}{1.940} = 38{,}96 \text{ m.}$$

El valor de x que corresponde al máximo de M_x se deducirá de la fórmula general del núm. 173, ó más sencillamente, tomando la semi-suma de los valores que anulan M_x, que en este caso será $x = \frac{1}{2} \times 38{,}86 = 19{,}43$. A este valor corresponde

$$M_{máx} = 732.705.$$

Esta ordenada es el eje de la curva, y, por lo tanto, si calculamos M_x para abscisas simétricas respecto á la que precede, hallaremos ordenadas iguales. Así para $x = 10$ y $x = 28{,}86$, encontraremos $M_x = 560.040$.

Si hacemos $x = 45$, luz del tramo, encontraremos el momento sobre la pila, ya calculado, $M_1 = -535.318$.

Tenemos siete puntos de la curva, suficientes para trazarla con toda la exactitud necesaria; con su auxilio se ha trazado en la figura 158 la curva de los momentos correspondiente al 1.er tramo.

Las escalas adoptadas son de 1 mm. por metro para las distancias y de 4 mm. por 100.000 para los momentos.

Pasemos al cálculo de los momentos en el segundo tramo.

2.º tramo.—La fórmula [4] aplicada con los datos correspondientes á la 1.ª hipótesis, teniendo presente que el segundo término se anula por ser $M_2 = M_1$, da

$$M_x = -535.318 + \frac{1.160 \times 56}{2}x - \frac{1.160}{2}x^2 =$$

$$= -535.318 + 32.480\,x - 580\,x^2.$$

Hallaremos los puntos en que la curva corta al eje de las x, igualando á cero este valor y despejando x; mas, al hacer este cálculo,

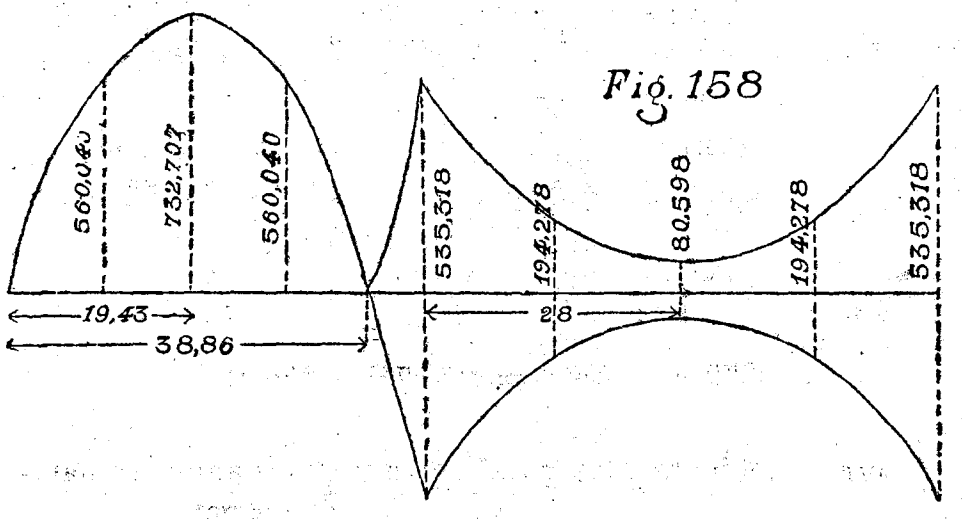


Fig. 158

ncontramos para x valores imaginarios, lo cual indica que la curva o corta á dicho eje, y, puesto que, para $x = 0$, la ordenada es negativa, lo serán todas.

Además, siendo las cargas simétricas respecto á la sección media e este tramo, la curva de los momentos deberá serlo también; y, or consiguiente, el eje de la curva coincide con la vertical del unto medio del tramo; se deduce de aquí que el máximo de M_x tiene ıgar en dicho punto, es decir, para $x = \frac{l}{2} = 28$ m. Igual resultado btenemos aplicando la fórmula del núm. 173, si observamos ue $M_1 = M_2$. El valor correspondiente del momento es $M_{máx}$ = — 80.598.

Si hacemos $x = 14$, tendremos $M_x = -194.278$.

Y, por razón de la simetría, obtendremos este mismo valor para = 42.

En resumen, tenemos los cinco puntos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 56 \end{array}\right\} \quad M_1 = M_2 = -535.318.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 14 \\ x = 42 \end{array}\right\} \quad M_x = -194.278.$$

$$x = 28 \qquad M_{máx} = -80.598.$$

Estos cinco puntos son suficientes para trazar la curva de la figura 158. Como siempre, se rebaten hacia arriba las partes de curva cuyas ordenadas son negativas, por ser más cómoda esta disposición de la figura para el estudio de la distribución de las chapas de palastro en las cabezas de la viga.

2.ª hipótesis.—1.er tramo.—Aplicando la fórmula [3] con los datos relativos á la 2.ª hipótesis, tendremos,

$$M_x = -\frac{733.932}{45}x + \frac{1.160 \times 45}{2}x - \frac{1.160}{2}x^2$$

$$= 9.791\,x - 580\,x^2 = x\,(9.791 - 580\,x).$$

Las x correspondientes á los puntos en que M_x se anula, se hallarán como en el caso anterior, y serán $x = 0$; $x = \frac{9.791}{580} = 16{,}88$.

El valor máximo corresponderá á $x = \frac{16{,}88}{2} = 8{,}44$, y es $M_{máx} = 41.322$.

Para $x = 4$ obtenemos $M_x = 29.884$, que corresponde también, á causa de la simetría, á $x = 12{,}88$.

Para fijar bien la parte de ordenadas negativas, sustituiremos $x = 30$, y vemos que corresponde $M_x = 228.270$.

En resumen, conocemos los siguientes puntos:

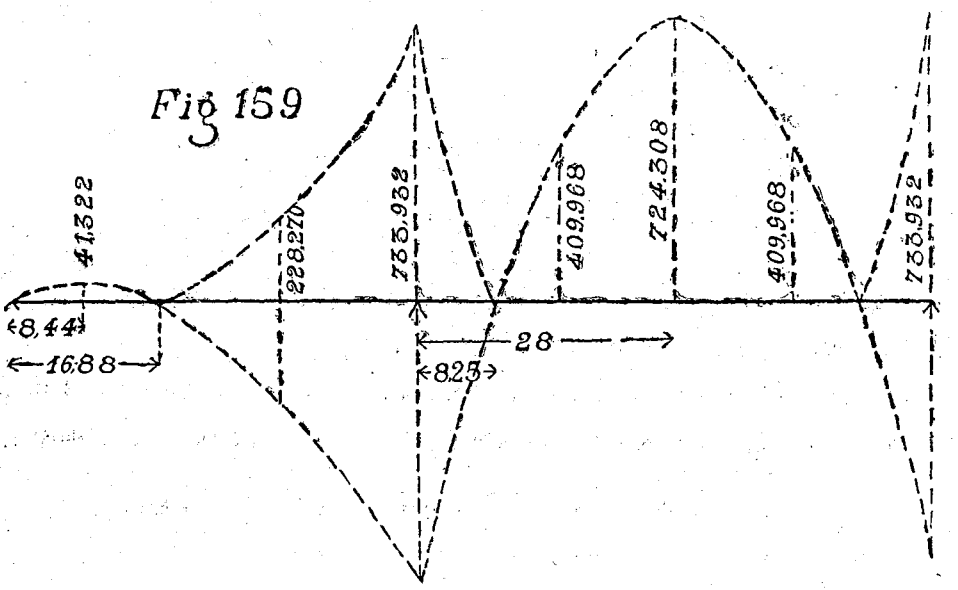
$x = 0$ $x = 16{,}88$	$M_x = 0$
$x = 4$ $x = 12{,}88$	$M_x = 29.884$
$x = 8{,}44$	$M_{máx} = 41.322$
$x = 30$	$M = -228.270$
$x = 45$	$M_1 = -733.932$

Con estos siete puntos se puede trazar la curva correspondiente al 1.er tramo, como se ve en la figura 159.

2.º tramo.—Para el 2.º tramo, aplicando la fórmula [4] con los datos correspondientes á la 2.ª hipótesis, encontramos,

$$M_x = -733.932 + \frac{3.720 \times 56}{2} x - \frac{3.720}{2} x^2 =$$

$$= -733.932 + 104.160\, x - 1.860\, x^2$$



Hallaremos los valores de x que anulan á M_x, resolviendo la ecuación de segundo grado

$$1.860\, x^2 - 104.160\, x + 733.932 = 0$$

ó dividiendo por 1.860, para simplificarla,

$$x^2 - 56\, x + 394 = 0$$

Aplicando la fórmula conocida para el caso en que el coeficiente del segundo término es divisible por 2, se tiene

$$x = 28 \pm \sqrt{28^2 - 394} = 28 \pm 19{,}75$$

Separando los dos valores, resulta $x = 8{,}25$; $x = 47{,}75$.

El máximo momento flector corresponde á la semi-suma de estos dos valores, que es $x = 28$, lo cual puede deducirse también de la simetría de las cargas, y su valor es $M_{máx} = 724.308$.

Si sustituímos $x = 15$, encontraremos $M_x = 409.968$, que también corresponde al punto simétrico $x = 41$.

Y á $x = 56$ corresponde, como ya sabemos, $M_2 = -733.932$.

En resumen, tenemos los puntos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x = 8{,}25 \\ x = 47{,}75 \end{array}\right\} M_x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 41 \end{array}\right\} M_x = 409.968$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 56 \end{array}\right\} M_1 = M_2 = -\,733.932$$

$$x = 28 \qquad M_{máx} = 724.308$$

Con estos siete puntos trazaremos la curva correspondiente al 2.° tramo, como se ve en la figura 159.

3.ª hipótesis.—1.er tramo.—Aplicando la fórmula [3] con los datos correspondientes á la 3.ª hipótesis, tendremos, para el 1.er tramo,

$$M_x = -\frac{1.066.320}{45}\,x + \frac{3.880 \times 45}{2}\,x - \frac{3.880}{2}\,x^2 =$$

$$= 63.604\,x - 1.940\,x^2 = x\,(63.604 - 1.940\,x).$$

Siguiendo la misma marcha que en los casos anteriores, tendremos los siguientes pares de valores.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 32{,}70 \end{array}\right\} M_x = 0$$

$$x = 16{,}35 \qquad M_{máx} = 521.330$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 24{,}74 \end{array}\right\} M_x = 384.672$$

$$x = 45 \qquad M_1 = 1.066.320.$$

Con estos datos trazaremos la curva de la figura 160, correspondiente al 1.er tramo.

2.° tramo.—La fórmula [4], aplicada con los datos correspondientes á la 3.ª hipótesis, nos da el valor de M_x en el 2.° tramo,

$$M_x = -\,1.066.320 - \frac{643.971 - 1.066.320}{56}\,x + \frac{3.720 \times 56}{2}\,x$$

$$- \frac{3.720}{2}\,x^2 = -\,1.066.320 + 111.702\,x - 1.860\,x^2.$$

Tendremos los valores de x que hacen nulo á M_x, resolviendo la ecuación de 2.° grado

$$1.860\,x^2 - 111.702\,x + 1.066.320 = 0$$

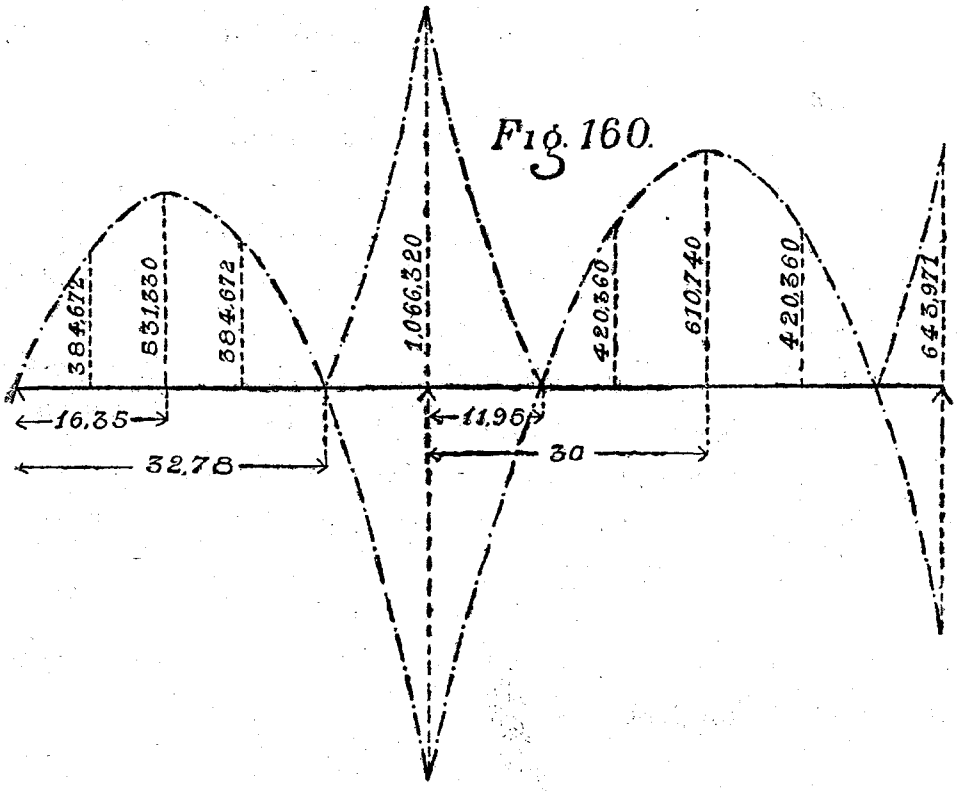


Fig. 160.

ó bien, dividiendo toda la ecuación por 1.860,

$$x^2 - 60\,x + 574 = 0$$

y, aplicando la fórmula correspondiente para resolverla,

$$x = 30 \pm \sqrt{30^2 - 574} = 30 \pm 18{,}05$$

y separando los dos valores, $x = 11{,}95$; $x = 48{,}05$.

El máximo corresponde á la semi-suma de estos valores, $x = 30$, y su valor es $M_{máx} = 610.740$.

Calcularemos el valor correspondiente á las abscisas $x = 20$, $x = 40$, que es $M_x = 420.360$, y observaremos que para $x = 56$ debemos obtener $M_2 = -643.971$.

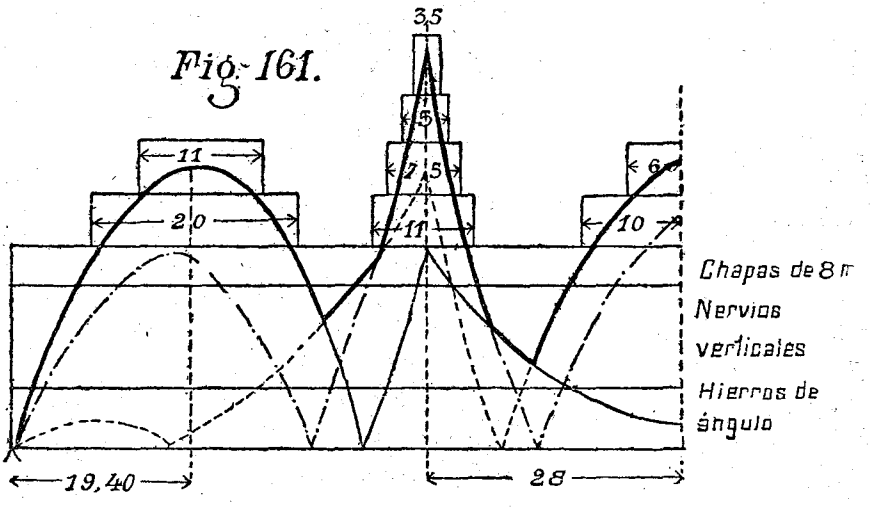
Tenemos, en resumen, los puntos siguientes:

$x = 11{,}95$	$M_x = 0$
$x = 48{,}05$	
$x = 20$	$M_x = 420.360$
$x = 40$	
$x = 30$	$M_{máx} = 610.740$
$x = 0$	$M_1 = -1.066.320$
$x = 56$	$M_2 = -643.971.$

Con estos siete puntos trazaremos en la figura 160 la curva correspondiente al 2.° tramo, rebatiendo, como siempre, hacia arriba las partes de la curva cuyas ordenadas son negativas.

El cuadro de la página siguiente resume los principales resultados relativos al cálculo de los momentos flectores.

199. DIAGRAMA DE LOS MOMENTOS Y DISTRIBUCIÓN DE LAS CHAPAS DE PALASTRO EN LAS CABEZAS DE LA VIGA.—Reunamos en una sola figura, 161, las 158, 159 y 160, correspondientes á las tres hipótesis



estudiadas, y marquemos con trazo grueso el contorno envolvente que da, en cada punto de la viga, la mayor ordenada. Esta envolvente nos servirá para estudiar la distribución de las chapas de palastro.

Adoptemos para sección de las cabezas la forma en **U**, compuesta de dos nervios verticales de 500 × 8 mm., una chapa horizontal

TRAMOS.	Hipótesis relativas á las cargas.	Valores de los pesos uniformemente repartidos por metro lineal.			Valores de los momentos flectores en los apoyos.				Valores de los momentos flectores máximos en los tramos.	
		1.er tramo. p_1	2.º tramo. p_2	3.er tramo. p_3	Estribo izquierdo.	Pila izquierda.	Pila derecha.	Estribo derecho.	Valores de x correspondientes al momento máximo.	Valores del momento máximo.
1.er tramo.....	1.a	3.880	1.160	3.880	0	535.318	535.318	0	19,43	732.707
	2.a	1.160	3.720	1.160	0	733.932	733.932	0	8,44	41.322
	3.a	3.880	3.720	1.160	0	1.066.320	643.971	0	16,35	531.330
2.º tramo.....	1.a	3.880	1.160	3.880	0	535.318	535.318	0	28,00	— 80.598
	2.a	1.160	3.720	1.160	0	733.932	733.932	0	28,00	724.308
	3.a	3.880	3.720	1.160	0	1.066.320	643.971	0	30,00	610.740
3.er tramo.....	Se reproducen simétricamete los mismos resultados que para el 1.º									

de las mismas dimensiones y cuatro hierros de ángulo de $\frac{80 \times 80}{9}$ (fig. 162), sin perjuicio de añadir otras chapas horizontales en las regiones en que sean necesarias.

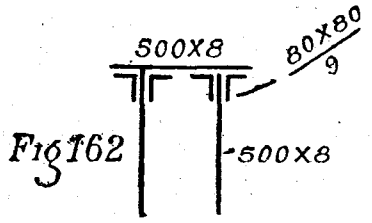


Fig 162

Los hierros de ángulo dan una área de $4 \times 1.359 = 5.436$ mm.² Esta área, repartida uniformemente en el ancho de la cabeza, equivale á un espesor de $\frac{5.436}{500} = 10$ mm.; trabajando el hierro á 6 kg. por milímetro cuadrado, cada milímetro de espesor de la cabeza ofrece una resistencia de $6 \times 500 = 3.000$ kg., y un momento resistente de $3.000 \times 5,5 = 16.500$, siendo la altura de la viga, medida entre los centros de gravedad de las cabezas, de 5,50 m.

Según eso, los hierros de ángulo tienen un momento resistente de 165.000, y quedarán representados en la figura por una horizontal cuya ordenada es esta cifra, tomada en la escala de los momentos.

Los nervios verticales dan una área de $2 \times 500 \times 8 = 8.000$ mm.², que, repartida en el ancho de la cabeza, equivale á un espesor de $\frac{8.000}{500} = 16$ mm.; luego su momento resistente será $16.500 \times 16 = 264.000$. Trazando otra horizontal á una altura sobre la anterior igual á este valor, tomado en la escala de momentos, tendremos representada en la figura la resistencia de dichos nervios.

La chapa tiene un momento resistente de $8 \times 16.500 = 132.000$; y trazando la tercera horizontal á una altura igual á ésta sobre la anterior, tendremos representada su resistencia.

Los elementos que preceden forman la sección mínima que corre en toda la extensión de la viga.

El examen de la figura hace ver la necesidad de añadir nuevas chapas en las regiones correspondientes á los máximos en los tramos y á la pila; conociendo el momento que corresponde á cada chapa de 8 mm. que, como hemos visto, es de 132.000, es fácil envolver la curva de momentos con dos nuevas chapas en las dos primeras regiones, y con cuatro sobre la pila; la extensión y la situación de cada chapa se deduce de las acotaciones de la figura.

El diagrama de la distribución sólo comprende el primer tramo y la mitad del segundo, es decir, la mitad de la viga que se estudia, pues la otra mitad ha de ser simétrica.

Comprobemos el trabajo del hierro en las secciones en que se realizan los momentos flectores máximos.

En la pila, el momento máximo es 1.066.320; luego la compresión de la cabeza inferior ó la tensión de la superior (puesto que el momento es negativo) será $\frac{1.066.320}{5,50}$; siendo el espesor total de la cabeza 66 mm., su área será $66 \times 500 = 33.000$ mm.^{2}, y el trabajo del hierro

$$R = \frac{1.066.320}{5,50 \times 33.000} = 5,88 \text{ kg. por mm.}^2,$$

valor que se acerca mucho al límite prefijado.

En el máximo correspondiente al 1.^{er} tramo, á 19,43 m. del estribo, el trabajo del hierro será

$$R = \frac{732.705}{5,50 \times 25.000} = 5,40 \text{ kg. por mm.}^2$$

Y en el centro del 2.° tramo

$$R = \frac{724.308}{5,50 \times 25.000} = 5,26 \text{ kg. por mm.}^2$$

Convendrá hacer la misma comprobación en las secciones más peligrosas, es decir, en aquéllas en que el contorno que representa los momentos resistentes de las chapas se acerca más al de los momentos flectores.

Conviene también calcular en todas estas secciones el trabajo efectivo del metal después de descontar del área de la sección la de los agujeros de los roblones, y comparar este trabajo con el que se admite en la regla de la circular austriaca, núm. 8, nota. Este cálculo se hace como lo hemos explicado detalladamente en los números 108 y 126.

200. Determinación de los esfuerzos cortantes.— Calcularemos los esfuerzos cortantes correspondientes á los dos primeros tra-

mos en las tres hipótesis de sobrecargas, sirviéndonos de las fórmulas [5] y [6].

1.ª hipótesis.—1.er tramo.—La aplicación de la fórmula [5], con los datos de la 1.ª hipótesis, nos da

$$X_x = \frac{4.170 \times 45}{2} - \frac{535.318}{45} - 4.170\,x = 81.930 - 4.170\,x.$$

Sustituyendo $x = 0$ y $x = 45$, tendremos

$$x = 0 \qquad X_0 = 81.930 \text{ kg.}$$
$$x = 45 \qquad X_1 = -105.720 \text{ kg.}$$

Estos dos puntos bastan para trazar la recta que representa los esfuerzos cortantes, como se ve en la figura 163. Es fácil comprobar que el valor de x que anula al esfuerzo cortante, es el mismo que hace máximo el momento flector, tanto en este caso como en los siguientes.

2.º tramo.—La fórmula [6], aplicada con los datos de la 1.ª hipótesis, dará

$$X_x = \frac{1.160 \times 56}{2} - 1.160\,x = 32.480 - 1.160\,x.$$

En los extremos del tramo, se obtiene

$$x = 0 \qquad X_1' = 32.480$$
$$x = 56 \qquad X_2 = -32.480$$

Representada esta recta en la fig. 163, se rebaten las partes que tienen ordenadas negativas hacia arriba.

2.ª hipótesis.—1.er tramo.—La fórmula [5], con los datos de la 2.ª hipótesis, da por resultado

$$X_x = \frac{1.160 \times 45}{2} - \frac{733.932}{45} - 1.160\,x = 9.791 - 1.160\,x.$$

Se determina la recta por medio de los dos puntos

$$x = 0 \qquad X_0 = 9.791 \text{ kg.}$$
$$x = 45 \qquad X_1 = -42.409 \text{ kg.}$$

2.° *tramo.*—La fórmula [6], con los mismos datos, da

$$X_x = \frac{3.980 \times 56}{2} - 3.980\,x = 111.440 - 3.980\,x.$$

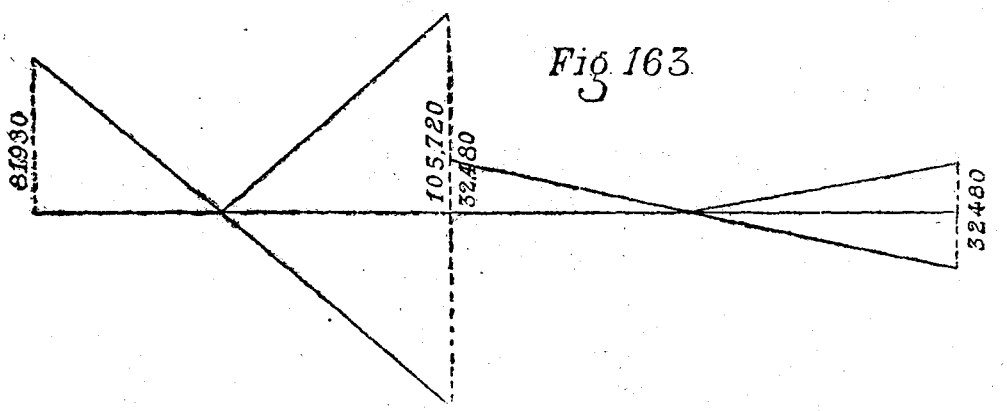


Fig. 163

Para determinar la curva, calcularemos los dos puntos

$$x = 0 \qquad X_1' = \quad 111.440$$
$$x = 56 \qquad X_2 = -\,111.440$$

Y con estos datos podremos dibujar las rectas de los esfuerzos cortantes en los dos tramos, como se ve en la fig. 164.

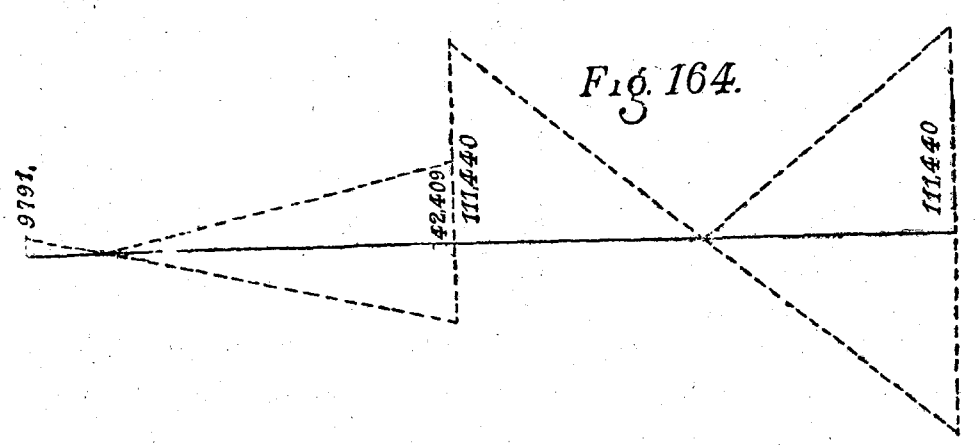


Fig. 164.

3.ª *hipótesis.*—*1.er tramo.*—Aplicando la fórmula [5] con los datos relativos á la 3.ª hipótesis, tendremos

$$X_x = \frac{4.170 \times 45}{2} - \frac{1.066.320}{45} - 4.170\,x = 70.129 - 4.170\,x.$$

La recta representada por esta ecuación quedará determinada por los dos puntos siguientes, correspondientes á los apoyos,

$$x = 0 \qquad X_0 = 70.129 \text{ kg.}$$
$$x = 45 \qquad X_1 = -117.521 \text{ kg.}$$

2.° *tramo*.—La fórmula [6], con los mismos datos, da

$$X_x = \frac{3.980 \times 56}{2} - \frac{643.971 - 1.066.320}{56} - 3.980\, x$$
$$= 118.982 - 3.980\, x.$$

Esta recta queda determinada por los dos puntos

$$x = 0 \qquad X_1' = 118.982 \text{ kg.}$$
$$x = 56 \qquad X_2 = -103.898 \text{ kg.}$$

Con estos datos se puede trazar la fig. 165 correspondiente á la 3.ª hipótesis.

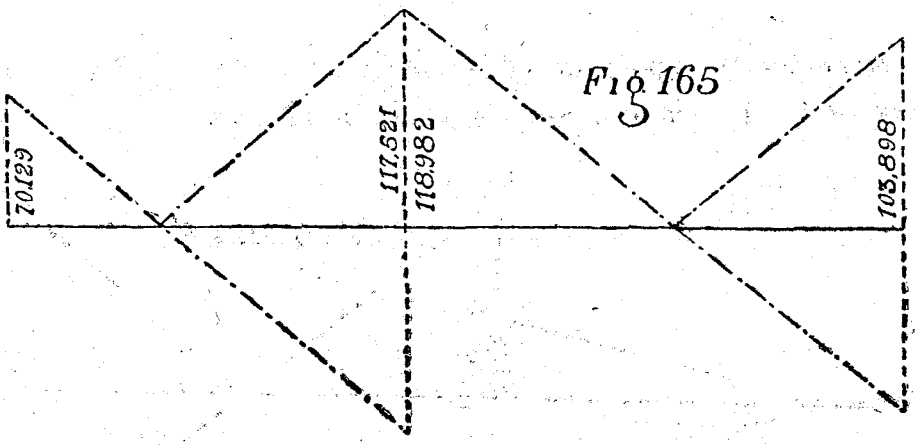


Fig 165

201. Reacciones de los apoyos.—La reacción del estribo es, en cada hipótesis, el esfuerzo cortante correspondiente. El más desfavorable es el correspondiente á la 1.ª hipótesis, y ésta es la reacción que debemos considerar para el cálculo del montante de apoyo, para comprobar la resistencia del aparato de dilatación y la estabilidad del estribo. Está reacción será la misma en el estribo de la derecha, en virtud de la simetría, de modo que tendremos

$$R_0 = R_3 = 81.930.$$

En la primera pila, la reacción es la suma de los valores absolutos de los esfuerzos cortantes calculados con las fórmulas de cada uno de los tramos adyacentes, es decir, $R_1 = X_1 - X_1'$.

En la *1.ª hipótesis,* será

$$R_1 = 105.720 + 32.480 = 138.200 \text{ kg.}$$

En la *2.ª hipótesis,*

$$R_1 = 42.409 + 111.440 = 153.849 \text{ kg.}$$

Y en la 3.ª,

$$R_1 = 117.521 + 118.982 = 236.503 \text{ kg.}$$

La más desfavorable es la última, lo cual está conforme con la regla relativa á las hipótesis acerca de las sobrecargas, explicada en el núm. 175.

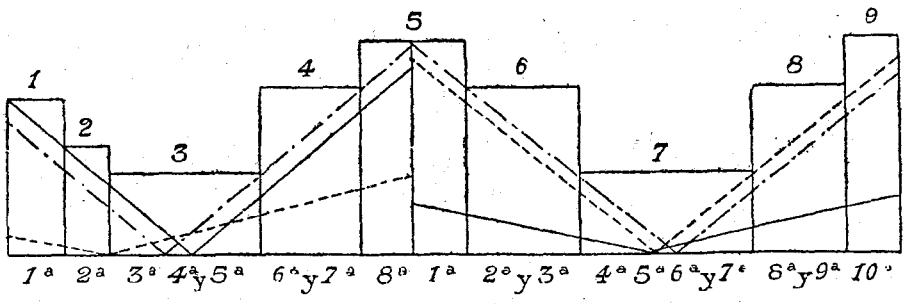
En la segunda pila, la reacción más desfavorable será la misma, en virtud de la simetría.

En el cuadro siguiente se consignan los principales resultados relativos al estudio de los esfuerzos cortantes y de las reacciones de los apoyos.

TRAMOS.	Hipótesis relativas á las cargas.	Esfuerzo cortante en el estribo izquierdo. — *Kilogramos.*	Esfuerzo cortante en la pila izquierda. — *Kilogramos.*	Valores de x correspondientes al esfuerzo cortante cero. — *Metros.*	Reacción del estribo. — *Kilogramos.*	Reacción de la pila. — *Kilogramos.*
1.er tramo...	1.ª	81.930	—105.720	19,43	81.930	138.200
	2.ª	9.791	— 42.409	8,44	9.791	153.849
	3.ª	70.129	—117.521	16,39	70.129	236.503
2.º tramo...	1.ª	»	32.480	28,00	»	»
	2.ª	»	111.440	28,00	»	»
	3.ª	»	118.982	30,00	»	»
3.er tramo...	El 3.er tramo es simétrico del primero.					

202. Diagrama de los esfuerzos cortantes más desfavorables. —Superponiendo las figuras 163, 164 y 165, obtendremos la envolvente de los esfuerzos cortantes más desfavorables, que se observa en la fig. 166. Con arreglo á dichos esfuerzos cortantes, calcularemos las secciones de las barras que constituyen la celosía.

Fig. 166



Para ello, supondremos descompuesto el 1.er tramo en ocho mallas cuadradas de 5,50 m., que componen los 44 m. libres entre los paramentos de los apoyos del 1.er tramo. En el estribo se agregará un montante de 1 m. con alma llena, capaz de resistir á la reacción más desfavorable que se ha calculado, y sobre la pila se formará otro montante análogo, que comprenderá los dos metros de espesor que se suponen al apoyo. Queda el 2.º tramo con una luz libre de 54 m., que se puede componer con 10 mallas de 5,40 m.; las diagonales de estos recuadros no estarán inclinadas exactamente á 45°; pero la diferencia es muy pequeña. Hecho esto, se completará el trazado de la celosía, que supondremos doble, como se ha indicado en el núm. 110.

203. Determinación de las secciones teóricas de las barras.— Formaremos, en los dos primeros tramos, nueve secciones, en cada una de las cuales se adoptará el mismo modelo de barra. El tercer tramo será simétrico respecto al primero.

Como se ve en la figura, la 1.ª sección está constituída por la 1.ª malla, y la segunda sección por la 2.ª malla. La 3.ª sección comprende las mallas 3.ª, 4.ª y 5.ª; la 4.ª, la 6.ª y la 7.ª, y la 5.ª, la 8.ª del 1.er tramo y la 1.ª del 3.º La 6.ª sección se forma con las mallas 2.ª y 3.ª del 2.º tramo; la 7.ª, con las 4.ª, 5.ª, 6.ª y 7.ª; la 8.ª, con la 8.ª

y 9.ª, y finalmente, la 9.ª sección comprende la 10 malla del 2.° tramo.

La verdadera curva de los esfuerzos cortantes que deben ser resistidos por las barras, será el contorno escalonado que se ha trazado en la figura.

Con el objeto de disminuir el número de modelos, y teniendo en cuenta que los esfuerzos cortantes más desfavorables difieren poco en algunas de las secciones en que se ha descompuesto la viga, se adoptan para algunas los mismos modelos. En este caso se hallan las secciones 3.ª y 7.ª; la 5.ª y la 9.ª; la 6.ª y la 8.ª

Adoptaremos como coeficiente de resistencia, 5 kg. por milímetro cuadrado, para deducir las secciones teóricas. Suponemos que la celosía es doble.

1.ª sección.—El esfuerzo cortante mayor en esta sección es el correspondiente al estribo, como se ve en la figura. Su valor es 81.930 kg.; luego la sección de las barras será

$$\omega_1 = \frac{81.930}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 81.930}{20} = 5.777 \text{ mm.}^2$$

2.ª sección.—El esfuerzo cortante máximo en esta sección es el correspondiente á $x = 5{,}50$ m., en la 1.ª hipótesis. Sustituyendo este valor en la ecuación correspondiente al 1.er tramo, en la mencionada hipótesis, encontramos

$$X = 81.930 - 4.170 \times 5{,}50 = 58.995 \text{ kg.}$$

La sección de las barras será

$$\omega_2 = \frac{58.995}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 58.995}{20} = 4.160 \text{ mm.}^2$$

3.ª y 7.ª sección.—El esfuerzo cortante más desfavorable es el que corresponde á $x = 38{,}8$ en la 2.ª hipótesis y en el 2.° tramo, como se ve en la figura. Dicho esfuerzo es

$$X = 111.440 - 3.980 \times 38{,}8 = -42.984 \text{ kg.}$$

Y la sección será

$$\omega_3 = \omega_7 = \frac{42.984}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 42.984}{20} = 3.030 \text{ mm.}^2$$

4.ª, 6.ª y 8.ª sección.—El esfuerzo cortante máximo corresponde á la abscisa $x = 7 \times 5{,}50 = 38{,}50$ en la 3.ª hipótesis, debiéndose aplicar la expresión correspondiente al primer tramo. Dicho esfuerzo es

$$X = 70.129 - 4.170 \times 38{,}5 = - 90.416.$$

La sección de las barras será

$$\omega_4 = \frac{90.416}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 90.416}{20} = 6.374 \text{ mm.}^2$$

5.ª y 9.ª sección.—El esfuerzo cortante máximo es el correspondiente á la pila en la 3.ª hipótesis, es decir, 118.982 kg.

La sección de cada barra será

$$\omega_5 = \omega_9 = \frac{118.982}{4 \times 5 \times \cos 45^\circ} = \frac{1{,}41 \times 118.982}{20} = 8.388 \text{ mm.}^2$$

Debemos advertir que todas las barras serán dobles y contenidas en los planos de los nervios verticales de las cabezas con los cuales vendrán á unirse, roblonándose, ya directamente, ya por el intermedio de cartelas.

Las piezas comprimidas se constituyen con piezas perfiladas, uniendo entre sí por medio de una celosía ligera las que constituyen las dos paredes verticales.

Las barras tendidas se reducen muchas veces á dos chapas independientes entre sí, pero otras veces se enlazan por una celosía ligera con el objeto de que se repartan con igualdad el trabajo que les corresponde, y no sufra una de ellas una tensión mucho mayor que la otra, como puede suceder si son completamente independientes.

CAPÍTULO IV.

VIGAS DE CUATRO, CINCO Ó MÁS TRAMOS.

---

204. VIGAS DE CUATRO TRAMOS.—HIPÓTESIS RELATIVAS Á LAS CARGAS.—Las hipótesis en que se deben calcular los momentos flectores y los esfuerzos cortantes son, según las reglas del núm. 175, las siguientes (fig. 167):

1.ª Cargados los tramos 1.º, 2.º y 4.º, y descargado el 3.º Esta

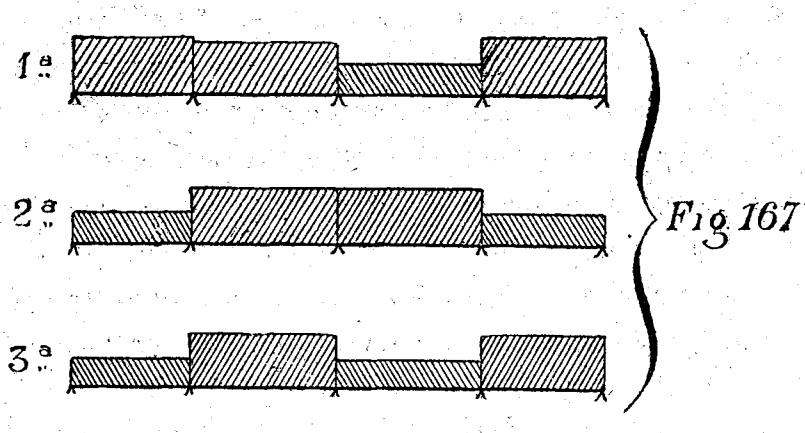


Fig. 167

hipótesis da el momento flector máximo y la reacción máxima en la 1.ª pila.

2.ª Cargados los tramos 2.º y 3.º, y descargados el 1.º y el 4.º Esta combinación produce el máximo del momento flector y de la reacción en la 2.ª pila.

3.ª Cargados el 1.º y el 3.cr tramo, y descargados el 2.º y el 4.º

Produce esta carga los máximos momentos flectores en los tramos cargados y la reacción máxima del estribo izquierdo.

4.ª Cargados los tramos 2.° y 4.°, y descargados el 1.° y el 3.° Se obtienen, en esta hipótesis, los momentos flectores máximos en los tramos 2.° y 4.°, y la máxima reacción en el estribo derecho.

Estas dos hipótesis corresponden á cargas simétricas, y en realidad, podría prescindirse de una de ellas, la última, por ejemplo. Pero en este caso, habría que trazar las curvas correspondientes á la 3.ª, en los cuatro tramos, para reproducir simétricamente en los dos primeros las curvas trazadas en el 3.° y el 4.° Es más breve examinar ambas hipótesis, limitando el trazado de las curvas á los dos primeros tramos, pues una vez hallada la envolvente de los momentos flectores y las secciones de las piezas en estos dos, se conocen los mismos elementos en los otros dos tramos, puesto que todo ha de ser simétrico respecto al eje vertical de la 2.ª pila.

Vamos á deducir las fórmulas generales que se deben emplear para determinar las curvas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes, en los dos primeros tramos, y en cada una de las cuatro hipótesis mencionadas.

205. Momentos flectores en los apoyos.—Admitiremos la misma distribución de tramos y las mismas notaciones que en el capítulo precedente, de modo que llamaremos l á la luz de los tramos centrales, y $m\,l$ á la de los laterales. Observaremos que los momentos M_0 y M_4, correspondientes á los estribos, son nulos, y quedan por determinar los momentos M_1, M_2 y M_3, correspondientes á las pilas. Estos se determinan aplicando la ecuación de los tres momentos (fórmula [1] del capítulo 1) sucesivamente á los tramos 1.° y 2.°; 2.° y 3.°; 3.° y 4.°

Así obtendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$2\,(m\,l + l)\,M_1 + l\,M_2 = \frac{1}{4}\,(p_1\,m^3\,l^3 + p_2\,l^3)$$

$$l\,M_1 + 4\,l\,M_2 + l\,M_3 = \frac{1}{4}\,(p_2\,l^3 + p_3\,l^3)$$

$$l\,M_2 + 2\,(l + m\,l)\,M_3 = \frac{1}{4}\,(p_3\,l^3 + p_4\,m^3\,l^3).$$

Si dividimos por l cada una de ellas, y representamos por α, β y γ los valores numéricos de los segundos miembros que resultan, tendremos las ecuaciones simplificadas

$$\begin{aligned} 2(m+1)M_1 + M_2 &= \alpha \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= \beta \\ M_2 + 2(m+1)M_3 &= \gamma \end{aligned}$$

Resolviéndolas por la regla de Cramer, y desarrollando los determinantes según los elementos de la 3.ª columna, tendremos

$$M_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 4 & 1 \\ \gamma & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(m+1) & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} + 2(m+1)\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 4 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} 2(m+1), & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2(m+1)\begin{vmatrix} 2(m+1) & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\gamma - \alpha}{2(m+1)} + 4\alpha - \beta}{8m+6} \qquad [1]$$

Del mismo modo obtendremos

$$M_2 = \frac{2(m+1)\beta - \gamma - \alpha}{8m+6} \qquad [2]$$

$$M_3 = \frac{\dfrac{\alpha - \gamma}{2(m+1)} + 4\gamma - \beta}{8m+6} \qquad [3]$$

El lector que no conozca la teoría de los determinantes, podrá hallar fácilmente estos valores por cualquiera de los procedimientos del Álgebra elemental.

Para las aplicaciones numéricas, bastará calcular los valores de α, β y γ, y luego sustituirlos en las fórmulas [1], [2] y [3].

Habrá que calcular los valores de M_1, M_2 y M_3 en las cuatro hipótesis relativas á las sobrecargas.

206. VALORES DE LOS MOMENTOS FLECTORES EN LOS TRAMOS.—Aplicando la fórmula [4] del capítulo I para los dos primeros tramos, tendremos, para el 1.°,

$$M_x = -\frac{M_1}{m\,l}\,x + \frac{p_1\,x}{2}\,(m\,l - x) \qquad [4]$$

Y en el 2.°

$$M_x = -M_1 - \frac{M_2 - M_1}{l}\,x + \frac{p_2\,x}{2}\,(l - x) \qquad [5]$$

Si se prefiere examinar solamente las tres primeras hipótesis, dibujando las curvas en los cuatro tramos, se emplearán para los tramos 3.° y 4.° las fórmulas siguientes:

$$M_x = -M_2 - \frac{M_3 - M_2}{l}\,x + \frac{p_3\,x}{2}\,(l - x) \qquad [6]$$

$$M_x = -M_3 + \frac{M_3}{m\,l}\,x + \frac{p_4\,x}{2}\,(m\,l - x) \qquad [7]$$

207. VALORES DEL ESFUERZO CORTANTE.—Aplicando la fórmula [7] del capítulo I, tendremos para el valor de X_x en el 1.er tramo

$$X_x = \frac{p_1\,m\,l}{2} - \frac{M_1}{m\,l} - p_1\,x \qquad [8]$$

Y en el 2.°

$$X_x = \frac{p_2\,l}{2} - \frac{M_2 - M_1}{l} - p_2\,x \qquad [9]$$

Si se quieren dibujar las rectas de los esfuerzos cortantes en el 3.° y 4.° tramo, se emplearán las fórmulas

$$X_x = \frac{p_3\, l}{2} - \frac{M_3 - M_2}{l} - p_3\, x \qquad [10]$$

$$X_x = \frac{p_4\, m\, l}{2} + \frac{M_3}{m\, l} - p_4\, x \qquad [11]$$

208. Reacciones de los apoyos.—La reacción más desfavorable en el estribo, R_0, se realiza en la 3.ª hipótesis; para obtenerla, bastará aplicar la fórmula [8], haciendo en ella $x = 0$. La reacción más desfavorable, R_3; correspondiente al estribo derecho, será la misma.

La reacción máxima en la 1.ª pila, R_1, se realiza en la 1.ª hipótesis. Para obtenerla, hallaremos X_1, aplicando la fórmula [8] para $x = m\, l$; y X_1', aplicando la [9] para $x = 0$. La suma de los valores absolutos de X_1 y X_1' será la reacción buscada R_1 y el mismo valor corresponderá á la R_3, de la 3.ª pila.

El máximo de la reacción R_2, en la pila central, corresponde á la 2.ª hipótesis. Se calculará X_2 por medio de la fórmula [9], haciendo en ella $x = l$, y X_2', por medio de la [10], para $x = 0$. La suma de los valores absolutos de X_2' y X_2 será la reacción buscada R_2.

209. Vigas de cinco tramos; hipótesis relativas á las sobrecargas.—Las hipótesis que se deben examinar son las siguientes (fig. 168).

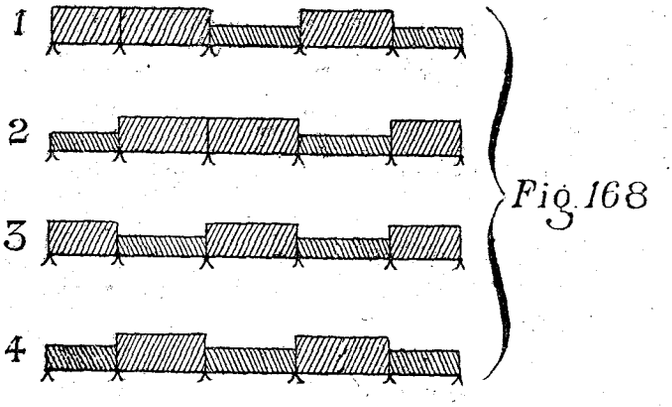


Fig. 168

1.ª Cargados los tramos 1.°, 2.° y 4.° y descargados el 3.° y el 5.°

Da lugar al momento flector máximo M_1 y á la reacción máxima R_1 en la 1.ª pila.

2.ª Cargados los tramos 2.°, 3.° y 5.°, y descargados el 1.° y el 4.° Esta sobrecarga realiza el momento flector máximo M_2 y la reacción máxima R_2 en la 2.ª pila.

3.ª Cargados los tramos 1.°, 3.° y 5.°, y descargados el 2.° y el 4.° Realiza los momentos máximos en la región central de los tramos cargados, y la reacción máxima R_0 del estribo.

4.ª Cargados los tramos 2.° y 4.°, y descargados el 1.°, 3.° y 5.° Realiza el momento máximo en los tramos 2.° y 4.°

En virtud de la simetría, basta estudiar los momentos flectores en la mitad de la viga, ó sea en los dos primeros tramos y la mitad del 3.°

210. Momentos flectores en los apoyos.—Aplicando la ecuación de los tres momentos, siempre en el supuesto de que los tramos sean simétricos, tendremos las ecuaciones siguientes:

$$(m\,l + l)\,M_1 + l\,M_2 = \frac{1}{4}\,(p_1\,m^3\,l^3 + p_2\,l^3).$$

$$l\,M_1 + 4\,l\,M_2 + l\,M_3 = \frac{1}{4}\,(p_2\,l^3 + p_3\,l^3).$$

$$l\,M_2 + 4\,l\,M_3 + l\,M_4 = \frac{1}{4}\,(p_3\,l^3 + p_4\,l^3).$$

$$l\,M_3 + 2\,(m\,l + l)\,M_4 = \frac{1}{4}\,(p_4\,l^4 + p_5\,m^3\,l^3).$$

Dividiendo por l estas ecuaciones, y representando por α, β, γ, δ los valores numéricos que resultan en los segundos miembros, pueden escribirse simplificadas en la forma siguiente:

$$2\,(m+1)\,M_1 + M_2 = \alpha$$

$$M_1 + 4\,M_2 + M_3 = \beta$$

$$M_2 + 4\,M_3 + M_4 = \gamma$$

$$M_3 + 2\,(m+1)\,M_4 = \delta$$

Resolviendo este sistema por las reglas de Cramer, tendremos:

$$M_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 4 & 1 & 0 \\ \gamma & 1 & 4 & 1 \\ \delta & 0 & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(m+1) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{2(m+1)\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 4 & 1 \\ \gamma & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 4 & 1 \\ \delta & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2(m+1)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2(m+1) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{2(m+1)(15\alpha - 4\beta - \gamma) - 4\alpha + \beta - \delta}{60(m+1)^2 - 16(m+1) + 1} \qquad [12]$$

Del mismo modo calcularemos

$$M_2 = \frac{4(m+1)^2(4\beta - \gamma) - 2(m+1)(4\alpha + \beta - \delta) + \alpha}{60(m+1)^2 - 16(m+1) + 1} \qquad [13]$$

$$M_3 = \frac{4(m+1)^2(4\gamma - \beta) - 2(m+1)(4\delta + \gamma - \alpha) + \delta}{60(m+1)^2 - 16(m+1) + 1} \qquad [14]$$

$$M_4 = \frac{2(m+1)(15\delta - 4\gamma + \beta) - 4\delta - \gamma - \alpha}{60(m+1)^2 - 16(m+1) + 1} \qquad [15]$$

211. VALORES DE LOS MOMENTOS FLECTORES EN LOS TRAMOS.—Después de haber calculado por las fórmulas anteriores los momentos flectores en las pilas, en las cuatro hipótesis relativas á las sobrecargas, habrá que determinar las ecuaciones de los momentos flectores, en los tres primeros tramos, aplicando la fórmula [4] del

capítulo I. Es fácil ver que resultan las ecuaciones [4], [5] y [6], deducidas al tratar de las vigas de cuatro tramos.

212. VALORES DE LOS ESFUERZOS CORTANTES EN LOS TRAMOS.—La aplicación de la fórmula [7] del capítulo I, conduce á las fórmulas [8], [9] y [10], deducidas al tratar de las vigas de cuatro tramos. Con estas fórmulas se determinarán numéricamente las ecuaciones de las rectas que representan los esfuerzos cortantes en las cuatro hipótesis, se dibujarán dichas rectas, y se obtendrá la envolvente de los esfuerzos cortantes que sirven para el cálculo de las secciones de las barras de la celosía.

213. REACCIONES DE LOS APOYOS.—La reacción más desfavorable, R_0, del estribo, se realiza en la 3.ª hipótesis, y se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación que da el esfuerzo cortante en el 1.er tramo. Este mismo será el valor de R_5, reacción máxima del estribo derecho.

La reacción más desfavorable, R_1, de la 1.ª pila, corresponde á la 1.ª hipótesis. Para calcularla, se determinará el esfuerzo cortante X_1, por medio de la ecuación del esfuerzo cortante en el 1.er tramo, haciendo en ella $x = m\,l$; luego, el valor X_1', correspondiente á la misma pila, por medio de la expresión del esfuerzo cortante en el 2.º tramo para $x = 0$. La suma de los valores absolutos de X_1 y X_1' será la reacción buscada, y este mismo valor será la reacción más desfavorable, R_4, en la 4.ª pila.

Del mismo modo se determinará la reacción más desfavorable en la 2.ª pila, R_2, la cual corresponde á la 2.ª hipótesis. Se determinará el esfuerzo cortante X_2 en dicha pila por medio de la expresión correspondiente al 2.º tramo, en la cual se hará $x = l$; luego, el esfuerzo cortante X_2' en el mismo apoyo, por medio de la fórmula correspondiente al 3.er tramo, en la cual se hará $x = 0$, y la suma de los valores absolutos de X_2 y X_2', será la reacción buscada. Este mismo valor será el de R_3, reacción más desfavorable en la 3.ª pila.

Conoceremos así las máximas reacciones de todos los apoyos de la viga.

214. VIGAS DE MÁS DE CINCO TRAMOS.—Cuando el número de tramos excede de cinco, los cálculos llegan á hacerse sumamente largos y penosos, tanto por el número de hipótesis relativas á las

sobrecargas que hay necesidad de estudiar, como por el número de tramos en que hay que trazar las curvas de los momentos flectores y de los esfuerzos cortantes.

Pero, cuando el número de tramos es considerable, la composición de los tramos centrales difiere cada vez menos á medida que el número de tramos aumenta, y prácticamente pueden hacerse iguales en pasando de cinco el número de tramos, solución que simplifica mucho el cálculo y da una aproximación suficiente en la práctica.

Si se trata de un puente de siete tramos, por ejemplo, se hará la distribución de modo que los extremos tengan una luz igual próximamente á los $\frac{4}{5}$ de los centrales; se supondrán suprimidos dos de estos últimos, y se hará el cálculo de la viga de cinco tramos como acabamos de indicar; luego se repetirá tres veces el tramo central.

En general, no conviene emplear vigas de más de siete tramos continuos. Pasando de este límite, disminuyen mucho las ventajas de la continuidad, y se crean dificultades para permitir la libre dilatación en los apoyos extremos, á causa de la excesiva longitud de la viga. Si el número de tramos del puente ha de exceder de siete, es preferible subdividir la viga en varias vigas continuas de tres ó cuatro tramos cada una. Así se aprovecha mejor una de las principales ventajas que se atribuyen á esta clase de vigas, que es la reducción del peso de la estructura metálica, y, por consiguiente, de su coste.

CAPÍTULO V.

GENERALIDADES ACERCA DE LOS PROYECTOS DE PUENTES.

---

215. BASES GENERALES DE UN PROYECTO.—El estudio de un proyecto de puente se debe empezar fijando ciertos datos fundamentales, como son: la elección del emplazamiento, la fijación del desagüe, la elección entre los puentes de fábrica y los metálicos, la altura de la rasante, el ancho del puente, la determinación de las luces más convenientes y la elección de sistema.

Prescindiremos de algunas de estas cuestiones que se resuelven por consideraciones ajenas al objeto de este libro; en este caso se hallan la elección del emplazamiento, la determinación del desagüe, la de la altura de la rasante y del ancho del puente.

La elección de emplazamiento se funda principalmente en las circunstancias del terreno relativas á la facilidad para la cimentación en buenas condiciones de solidez y economía, y en las que se refieren al régimen de la corriente y á la fijeza del cauce en la sección en que se ha de construir la obra. La elección de emplazamiento está también relacionada con el trazado de la vía en las inmediaciones.

La fijación del desagüe es un problema indeterminado de Hidráulica. La altura de la rasante se fija de modo que entre las máximas avenidas y la clave en los puentes de fábrica, ó las partes más bajas de los tramos en los puentes metálicos, quede un huelgo suficiente para permitir el paso de los cuerpos flotantes que el río puede arrastrar en las crecidas. Este huelgo varía entre 1 y 3 m. en los puentes

de fábrica, y entre 1 y 2 m. en los puentes metálicos. Debe acercarse tanto más al límite superior, cuanto mayor sea el peligro de que el río arrastre grandes cantidades de cuerpos flotantes en las crecidas, cuanto más torrencial sea su régimen y mayor la incertidumbre respecto á la altura que alcanzan las máximas avenidas.

El ancho del puente depende del objeto á que se destina. Si se trata de puentes para ferrocarriles de vía ancha, lo fijan los reglamentos en 4,50 m. para los de simple vía y 8,50 para los de vía doble.

En los puentes para carreteras, se reduce á veces el ancho á lo preciso para que se crucen dos carruajes con la holgura necesaria, y, por consiguiente, depende de la clase de vehículos que circulan en la localidad.

Las demás cuestiones enumeradas dependen más directamente de los cálculos de resistencia, y vamos á examinarlas con algún detenimiento, porque son muy importantes para llegar á una solución acertada; y para facilitar el estudio detallado que debe hacerse en cada caso, conviene conocer algunas reglas generales que evitan, en muchas ocasiones, tanteos y estudios comparativos que aumentarían inútilmente el trabajo.

216. Elección entre los puentes de fábrica y los metálicos.— Limitándonos á los sistemas de uso frecuente, se debe decidir si el puente ha de ser de fábrica ó metálico, y la elección recae casi siempre en la obra más económica, á no ser que la diferencia de coste sea de poca importancia, porque en este caso se debe dar la preferencia al puente de fábrica, por ser mucho mayor su duración y menores los gastos de conservación.

Algunas consideraciones generales pueden servir de guía para verificar esta elección, evitando muchas veces el estudio de presupuestos comparativos.

La elección depende principalmente de las luces que convenga adoptar y del precio de las fábricas, el cual es muy variable en las diversas localidades. Las luces que conviene adoptar dependen, á su vez, de las dificultades de la cimentación y del régimen del río.

Así, si los cimientos son fáciles, las avenidas de poca importancia y las fábricas baratas, convendrá, en general, el puente de fábrica, porque se podrán adoptar luces pequeñas. En cambio, cuando

aumentan las dificultades de la cimentación, conviene reducir el número de apoyos, aumentando las luces; y cuando éstas exceden de cierto límite, el coste del puente de fábrica aumenta rápidamente, llegando á ser más económico el puente metálico.

Puede decirse que existe siempre un límite de las luces tal, que para luces inferiores es más económico el puente de fábrica, y para luces superiores el puente metálico; pero este límite no es una cifra fija sino variable, puesto que depende del precio de las fábricas y del de la tonelada de hierro en la localidad en que se ha de construir el puente; y estos precios, especialmente el primero, son muy variables.

En general, cuando las luces exceden de 25 m., resulta casi siempre más económico el puente metálico, y esto explica que cada vez sea menos frecuente la construcción de grandes arcos de fábrica, limitándose su aplicación á los casos en que las consideraciones económicas son secundarias y se desea una obra monumental y duradera, que no es lo general en la práctica ordinaria del Ingeniero.

También conduce á veces á dar la preferencia al puente metálico, la insuficiencia de la altura de la rasante sobre las máximas avenidas, ó la compresibilidad del terreno en que se ha de cimentar la obra, pues es evidente que una estructura metálica se halla en mejores condiciones para soportar un asiento de alguna consideración en los apoyos.

Cuando estas consideraciones generales y la experiencia del Ingeniero que estudia el proyecto no son suficientes para decidir esta cuestión con la seguridad necesaria, no hay más remedio que hacer un estudio comparativo, redactando abreviadamente los dos presupuestos.

217. Distribución de las luces en los puentes de fábrica.— Una vez conocido el desagüe lineal, ó sea la longitud total de los claros, es preciso estudiar cuáles son las luces que se deben adoptar para que el puente resulte lo más económico posible. Como hemos indicado en el párrafo anterior, depende esto principalmente de las dificultades de la cimentación. Pero, como en los puentes de fábrica el número de soluciones aceptables es generalmente muy limitado, la elección se reduce á un estudio comparativo entre dos ó tres soluciones.

Por ejemplo, si el desagüe lineal ha de ser de 60 m., podrán admitirse las soluciones siguientes: 6 arcos de 10 m., 3 arcos de 20 m., y las intermedias con 4 ó 5 arcos (teniendo en cuenta que los arcos deben ser iguales).

Se prescinde de las soluciones que requieren arcos de menos de 10 m., que no serán generalmente aceptables, porque aumentan mucho la contracción de la corriente y alteran notablemente su régimen; además, resultarán ordinariamente más costosas que los 6 arcos de 10 m., por aumentar el número de cimientos.

También se puede prescindir desde luego del estudio de dos arcos de 30 m. porque éstos serán ya muy costosos (en caso de ser ésta la mejor solución, se hubiera preferido probablemente un puente metálico), y, además, obligaría á elevar mucho la rasante, lo cual aumentaría también en grandes proporciones el coste.

El problema se reduce, por lo tanto, á comparar las cuatro soluciones indicadas, y especialmente las dos extremas con arcos de 10 y de 20 m.; para ello, basta evaluar alzadamente los dos presupuestos, prescindiendo provisionalmente del coste de los cimientos.

Esta evaluación alzada se hace cubicando aproximadamente las dos obras y aplicando al metro cúbico de fábrica un precio medio que represente próximamente el término medio del precio de las diversas fábricas que se han de emplear. Además, para tener en cuenta el mayor coste de las fábricas de los paramentos, se evalúa la superficie de todos los paramentos vistos y se le aplica un precio medio que represente un término medio del aumento que exige esta clase de fábrica.

Si adoptamos como precio medio del metro cúbico 25 pesetas y 5 pesetas para el del metro cuadrado de paramento; llamando V al volumen total de fábricas de la primera solución, S á la de superficie de los paramentos y C al coste de la obra, prescindiendo de los cimientos, tendremos

$$C = 25\ V + 5\ S$$

Del mismo modo, llamando C', V' y S' á los elementos correspondientes á la segunda solución, el coste de ésta será

$$C' = 25\ V' + S'.$$

Si C' es menor que C, desde luego esta segunda solución será preferible. Aunque sea mayor, será preferible ésta si la diferencia es pequeña, porque la primera exige la construcción de 5 pilas en vez de 2, con sus correspondientes cimientos, y al tener en cuenta el coste de este aumento de tres cimientos, se invertirá probablemente la diferencia; además, si el coste total difiere muy poco, debe preferirse la segunda solución, porque altera menos el régimen de la corriente.

Fácil será juzgar, por el coste de estas dos soluciones, si podrá ser más ventajosa alguna de las intermedias.

En resumen, la determinación de las luces más convenientes en los puentes de fábrica, se reduce generalmente á una comparación entre dos, ó á lo más tres soluciones.

218. Distribución de las luces en los puentes metálicos.—Para la determinación de la luz más económica en los puentes metálicos, puede seguirse un método general que da la solución del problema con toda la aproximación necesaria en la práctica.

Se puede suponer provisionalmente que todos los tramos han de ser iguales, y evaluar, en cada una de las soluciones, el coste alzado de la parte metálica. Para ello, basta acudir al cuadro del núm. 93, que da el peso de la estructura metálica para las diversas luces, y conocido el peso en toneladas de la obra, multiplicarlo por el precio de la tonelada puesta en obra, obteniéndose así el coste de la superestructura.

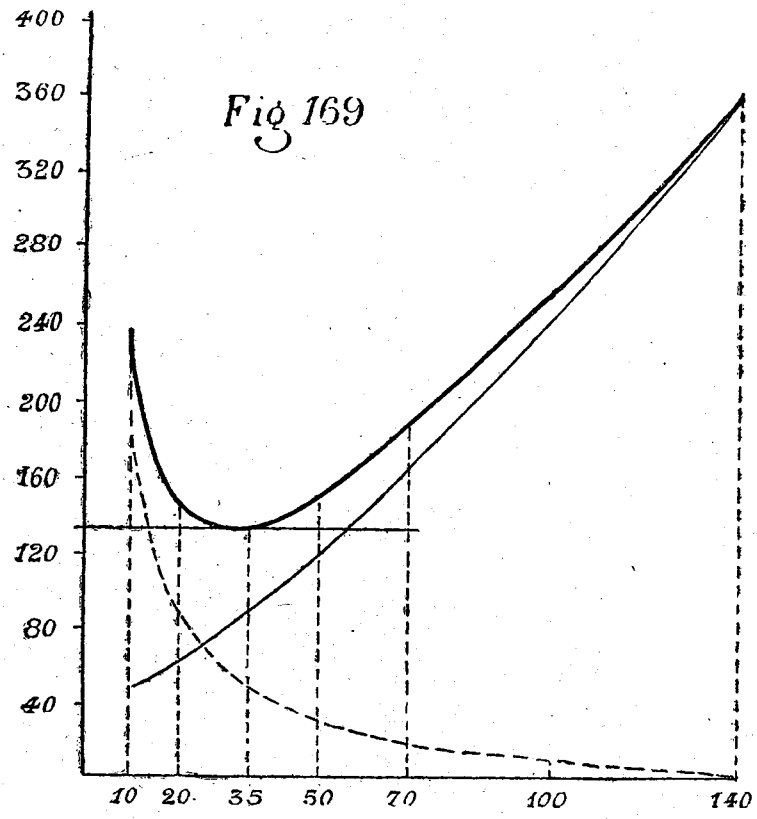
Hecho esto, se traza una curva cuyas abscisas son las luces y cuyas ordenadas representan los costes en escalas arbitrarias. La ordenada de esta curva crece rápidamente con la luz, como se ve en la curva de trazo fino (fig. 169).

Como el espesor de una pila varía poco con las luces, se puede determinar un precio medio que se admite para todas las pilas, y llevando como ordenadas correspondientes á las luces estudiadas, el coste total de las pilas que exige cada solución, obtendremos la curva de trazos, cuya ordenada decrece rápidamente cuando aumenta la abscisa.

Para cada luz, la suma de las ordenadas de las curvas precedentes nos indicará el coste total de la obra (prescindiendo de los estri-

bos que representan un gasto común á todas las soluciones, y no es necesario tener en cuenta). La curva de trazo grueso representa esta curva, y la abscisa correspondiente á su ordenada mínima será la luz más conveniente.

Un ejemplo aclarará la explicación que precede.



219. Ejemplo.—Supongamos que se trata de un puente para ferrocarril de simple vía, cuya longitud total es de 140 m.

Admitiendo que las luces hayan de ser iguales en todos los tramos, estudiaremos las cinco soluciones siguientes:

1.ª	14	tramos de	10	m.	con	13	pilas.
2.ª	7	»	20	»		6	»
3.ª	4	»	35	»		3	»
4.ª	2	»	70	»		1	»
5.ª	1	»	140	»		0	»

Estudiando el peso de la superestructura metálica en cada una de estas soluciones, por medio del cuadro del núm. 93, y admitiendo

que el precio de la tonelada de hierro puesta en obra sea de 400 pesetas tendremos los valores siguientes:

Soluciones.	Peso por metro lineal. — *Toneladas.*	Peso de la estructura metálica. — *Toneladas.*	Coste. — *Pesetas.*
1.ª	0,783	0,783 × 140 = 109,62	43.848
2.ª	1,115	1,115 × 140 = 156,10	62.440
3.ª	1,682	1,682 × 140 = 235,48	94.192
4.ª	3,191	3,191 × 140 = 446,74	178.696
5.ª	6,519	6,519 × 140 = 912,66	365.064

Tomando por abscisas las luces correspondientes á cada solución, y por ordenadas los costes, se obtiene la curva de trazo fino de la figura 169. Se ha adoptado para la escala de distancias $^1/_2$ mm. por metro, y para las ordenadas, 4 mm. por 20.000 pesetas.

Suponiendo que cada pila cuesta, por término medio, 15.000 pesetas, el coste total de las pilas será, para las distintas soluciones,

1.ª solución 13 × 15.000 = 195.000 pesetas.
2.ª » 6 × 15.000 = 90.000 »
3.ª » 3 × 15.000 = 45.000 »
4.ª » 1 × 15.000 = 15.000 »
5.ª » 0

La curva de trazos representada en la figura se ha obtenido tomando como abscisas las luces correspondientes á las distintas soluciones y como ordenadas las cifras que preceden.

Finalmente, sumando las ordenadas de las curvas anteriores, se obtiene la representada con trazo grueso, cuyas abscisas son las luces, y cuyas ordenadas son los costes de las obras correspondientes á aquéllas, prescindiendo de los estribos. La abscisa correspondiente á la ordenada mínima, es la luz que conviene adoptar.

En nuestro ejemplo, dicha luz es de 35 m., suponiendo que los

cuatro tramos hayan de ser iguales. Pero no hay inconveniente en variarla ligeramente si los tramos han de ser continuos y se desea que los laterales tengan una luz igual á los $^4/_5$ de las centrales; podría adoptarse para los tramos laterales una luz de 31 m. y de 39 m. para los centrales.

Si la abscisa que corresponde á la ordenada mínima no fuese exactamente la luz de una de las soluciones posibles con tramos iguales, se adoptaría la que más se le aproximase entre éstas.

220. Elección entre los diversos sistemas de puentes metálicos.—Las vigas de alma llena se emplean únicamente con luces pequeñas que generalmente no exceden de 12 m. y excepcionalmente llegan á 15. Consiste esto en que el ancho de las chapas de palastro no exceden ordinariamente de 1,20 m. que es la altura máxima de las vigas que se pueden formar con aquéllas.

Las vigas cajones, que se emplean para las luces de 4 á 8 m., no son otra cosa que vigas de alma doble, que se usan cuando la altura de la rasante es insuficiente para que se pueda adoptar una viga ordinaria en doble T, la cual exige una altura comprendida entre $^1/_{10}$ y $^1/_{12}$ de la luz. Con las vigas cajones se puede reducir notablemente la altura del tablero, pero á expensas de la economía, puesto que hemos visto en el núm. 25, fórmula [14], que la resistencia de la sección es proporcional al cuadrado de la altura. Además, esta disposición obliga á emplear dos chapas para constituir el alma, que es la parte de la viga en que peor se utiliza la resistencia del material.

Para luces comprendidas entre 12 y 30 m., la solucción que generalmente se considera como más satisfactoria consiste en el empleo de las vigas de celosía de cabezas rectas, ya sea compuestas de montantes y cruces de San Andrés, ya celosías ordinarias dobles, triples ó cuádruples. Con estas luces no conviene emplear el sistema simple de montantes comprimidos y diagonales estiradas en los puentes destinados á los ferro-carriles; en Alemania se construyeron muchos, hace algunos años, pero fueron abandonados en vista del mal resultado que dieron, debido á su excesiva ligereza. Sin embargo, no parece que se deba proscribirlos tan en absoluto cuando se aplican á las carreteras; en este caso, la carga permanente es mucho mayor

por el peso del firme, y las cargas accidentales mucho menores que en los ferrocarriles. Por consiguiente, la acción de las sobrecargas es menos perjudicial y el sistema es más económico que la celosía ordinaria.

Para las luces comprendidas entre 30 y 50 m. se recomiendan los mismos sistemas que para las del grupo anterior, y también se emplean con ventaja las vigas de celosía doble de montantes comprimidos y diagonales tendidas. Con estas luces se puede emplear el sistema doble, que no presenta los inconvenientes señalados al tratar del sistema simple.

Según Leber, la estructura metálica es más ligera en los puentes de piso superior que en los de piso inferior ó intermedio. La diferencia va disminuyendo á medida que la luz aumenta. Pero debe tenerse en cuenta que, en general, esta disposición obliga á elevar la rasante aumentando el coste de los apoyos y de los terraplenes de avenidas, y pocas veces podrá aplicarse cuando la luz se acerca á 50 m.

Pasando de 50 m., además de los sistemas recomendados para el grupo precedente, deben considerarse también los sistemas de cabeza superior curva.

Entre éstos merece especial mención la viga parabólica por su gran ligereza, debida á la igual repartición de las presiones en las cabezas y á la circunstancia de que todas sus piezas, exceptuando la cabeza superior, obran por tensión. Esta viga es más ligera y más económica que la de tramos continuos, cuando la luz excede de unos 60 m. (1), y la diferencia de pesos se acentúa á medida que la luz aumenta.

Estas propiedades llegan á ser un inconveniente en su aplicación á los ferrocarriles por la excesiva flexibilidad y tendencia á la deformación; participan mucho, como es natural, de los inconvenientes de los puentes colgados, pues tienen con éstos una gran analogía, no siendo en realidad otra cosa que puentes colgados en que el cable trabaja por compresión, convirtiéndose en arco.

---

(1) Véase la descripción del puente sobre el Cinca en Monzón por D. Joaquín Pano. *Revista de Obras Públicas*, 1876.

Se emplearon mucho hace algunos años, pero han sido abandonados en vista de los inconvenientes que se han señalado, siendo sustituídos por los puentes de cabeza curva con montantes en los apoyos y celosía doble de montantes comprimidos y cruces de San Andrés. Estas vigas participan de las propiedades de la parabólica, siendo más rígidas que ésta, y más ligeras que las de cabezas rectas. acentuándose la diferencia de pesos cuando la luz aumenta.

Tratándose de puentes para carreteras, los inconvenientes de las vigas parabólicas pierden en gran parte su importancia, por las mismas razones que se han expuesto al tratar de las vigas rectas simples de montantes comprimidos y diagonales estiradas.

Las reglas generales que preceden, que son un resumen de la doctrina generalmente admitida por los Ingenieros, permiten reducir mucho los estudios comparativos al verificar la elección de sistema, debiéndose advertir que, entre los sistemas recomendados para luces inferiores á 50 m., las diferencias de peso que se pueden obtener son de pequeña importancia.

Para las grandes luces se obtiene una economía con los sistemas de cabeza superior curva; tratándose de puentes de ferrocarril, se deberá empezar á usar este sistema desde el momento en que se obtenga en el centro de la viga una altura suficiente para poder trazar una curva de flecha bastante grande, conservando en los apoyos la altura necesaria para poder arriostrar superiormente las vigas.

En los puentes para carreteras, no se deberá prescindir de considerar la viga parabólica, especialmente para las luces superiores á 60 m. y que no lleguen á ser bastante grandes para poder trazar la cabeza superior curva, conservando en los apoyos la altura que se ha indicado en el párrafo anterior.

En lo que precede se han considerado únicamente los sistemas estudiados en este libro, que son realmente los que se aplican de un modo corriente en la práctica ordinaria.

Hemos prescindido por completo de los puentes de arco inferior por ser su aplicación muy limitada, reservándose para casos especiales. En general, son más caros que los sistemas que hemos examinado por las mayores dificultades de ejecución.

La aplicación de los puentes de arco inferior se limita á los dos casos siguientes:

1.° Cuando se tiene que atravesar un desfiladero profundo á gran altura sobre el thalweg, y las laderas están muy próximas al puente. En este caso, el montaje de los tramos rectos es muy difícil, porque no se puede emplear el sistema de corrimiento, y los andamiajes serían muy costosos.

Los sistemas de arco se prestan á ser montados sin necesidad de andamiajes ni apoyos intermedios, armando los arcos á partir de los apoyos y haciéndolos avanzar hacia el centro á manera de dos pescantes, sosteniendo su extremo provisionalmente por vientos.

2.° En los puentes situados en las grandes poblaciones, por motivos de decoración; éste es un caso muy especial que no puede considerarse dentro de la práctica ordinaria, al menos en nuestro país.

211. COMPARACIÓN ENTRE LAS VIGAS CONTINUAS Y LAS DE TRAMOS INDEPENDIENTES.—Es muy importante la comparación entre estos dos sistemas, muy empleados ambos; á pesar de cierta desconfianza que han manifestado muchos Ingenieros respecto á las vigas continuas, es lo cierto que la reacción contra esta clase de construcciones no es tan general como algunos suponen, y que, á pesar de las graves objeciones que se les dirigen en el terreno teórico, los constructores prácticos las siguen adoptando en atención á los excelentes resultados que han dado y á la facilidad de su montaje por corrimiento.

Los principales inconvenientes que se han atribuído á los tramos continuos son los siguientes:

Basta una desnivelación muy pequeña de los apoyos para que se altere completamente el equilibrio del sistema, trabajando algunas piezas en condiciones mucho más desfavorables que las que fueron previstas; este inconveniente, que se deduce de la teoría de las vigas continuas, se ha considerado como motivo suficiente para proscribir en absoluto esta clase de vigas en los casos en que los apoyos no descansan en un terreno perfectamente incompresible; por esta razón no se han empleado en Holanda, donde, por regla general, no se han podido cimentar los puentes sobre roca incompresible, y se han desechado casi siempre en Alemania.

Es imposible evitar en los tramos continuos que haya piezas sometidas alternativamente á esfuerzos de tensión y de compresión. Esto sucede especialmente en las cabezas en la región inmediata al punto de inflexión de la fibra neutra, cuya posición es variable según la distribución de la sobrecarga, y también en el alma, en la región inmediata á los apoyos; á la verdad, en estas partes de la viga hay siempre un gran exceso de resistencia, por exigirlo así las necesidades prácticas de la construcción.

La objeción más grave que, en nuestro concepto, puede hacerse á las vigas de tramos continuos, es la imperfección de la teoría que sirve de base á los cálculos de sus dimensiones; la repartición de los esfuerzos entre las diversas piezas es en la realidad muy diferente de la prevista por la teoría, la cual está fundada en hipótesis no bien comprobadas, y entre los muchos hechos experimentales en contradicción con dichas hipótesis que podrían citarse, nos fijaremos precisamente en que no se han confirmado nunca las consecuencias que respecto á la estabilidad de las obras indica la teoría, por efecto de una pequeña desnivelación de los apoyos, desnivelación que no puede menos de existir siempre por la diferencia de asiento de las pilas.

Presentan, en cambio, algunas ventajas de importancia. En primer lugar, la continuidad establece una especie de empotramiento en los apoyos, que permite reducir el peso de la viga. La comparación entre los diagramas de los momentos flectores para una misma luz y una misma carga, hace ver claramente la disminución del máximo en el centro y la mayor uniformidad de la repartición de los momentos, y, por consiguiente, de la sección de las cabezas, en el caso de una viga continua; sin embargo, como las secciones prácticas no son rigorosamente proporcionales á los esfuerzos calculados, la economía real, deducida de los datos estadísticos, dista mucho de ser tan importante como la que indica la teoría.

Una de las principales ventajas de las vigas continuas consiste en la facilidad y economía de su colocación, empleando el sistema de corrimiento sin necesidad de andamiajes ni otros medios auxiliares costosos. En muchos casos, esta ventaja basta para justificar la adopción de este sistema.

Finalmente, Leber llama la atención acerca de lo exageradamente desfavorables que son las hipótesis relativas á las sobrecargas, que se hacen para calcular los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en las vigas continuas. En el servicio corriente de los puentes, es casi imposible que se realicen distribuciones de cargas tan perjudiciales para la obra, de donde resulta que las piezas sufrirán un trabajo mucho más moderado que el previsto en el proyecto. En cambio, en los tramos independientes, las piezas de los cuchillos principales sufren frecuentemente, en los puentes de ferrocarriles, presiones ó tensiones próximas al límite para el que fueron calculadas, de donde se deduce que los tramos continuos ofrecen mayor seguridad y más probabilidades de duración.

En resumen, sin dejar de reconocer la gravedad del inconveniente fundado en el desconocimiento de las verdaderas condiciones en que trabajan las piezas de las vigas continuas, no creemos llegado el caso de proscribirlas en absoluto, sino de estudiarlas más detenidamente para perfeccionar su teoría; y esto debe conseguirse mediante experimentos numerosos.

222. Comparación entre el hierro y el acero.—No podemos menos de decir algunas palabras acerca de la elección entre estos dos metales. Los primeros ensayos de construcción de puentes de acero, llevados á cabo en Holanda, dieron tan mal resultado, que retrasó muchos años la adopción de este metal en dichas construcciones; pero habiéndose estudiado con mayor detenimiento las causas de aquellos fracasos, se reconoció que fueron debidos al empleo de un material duro y quebradizo cuya fabricación era muy poco homogénea. En la actualidad la industria del acero se ha perfeccionado mucho y ha permitido la construcción de puentes de luces que hubiera sido imposible alcanzar empleando el hierro.

Todos los Ingenieros están conformes en dar la preferencia al acero cuando se trata de tramos de grandes luces. En cambio los puentes metálicos de pequeñas luces tienen el inconveniente de que su peso es pequeño relativamente á la sobrecarga, y como el acero se somete á un trabajo notablemente superior al admitido para el hierro, resultan construcciones tan ligeras, que aquel inconveniente se agrava considerablemente.

La fijación del límite de la luz á partir de la cual debe preferirse el acero, es una cuestión que no puede resolverse de un modo absoluto, porque depende de los precios del hierro y del acero, los cuales varían constantemente. Algunos Ingenieros suponen que debe oscilar entre 40 y 50 m., pero, aún tratándose de luces que se alejen bastante de estas cifras, es conveniente resolver la cuestión en cada caso particular por medio de presupuestos aproximados.

De todos modos, una vez qué se han salvado las dificultades de fabricación del acero, la cuestión queda reducida á comparar el coste de ambas soluciones, excepto en el caso de las luces muy pequeñas, en que por las razones que hemos aducido, debe desecharse este metal. Aún con luces medias podría admitirse el acero reduciendo el coeficiente de resistencia, sin llegar á rebajarlo hasta el límite admisible para el hierro, con lo cual se evitaría aquel inconveniente sin dejar de obtener alguna economía, siempre que el precio del acero sea suficientemente bajo. En todo caso, conviene tener presente que cuando se dé la preferencia al acero, debe estudiarse con mucha detención el pliego de condiciones facultativas y exigir mayor rigor en las recepciones que si se emplea el hierro.

La experiencia ha demostrado que el acero de mala calidad es mucho más peligroso que el peor hierro.

En España está llamada á adquirir mucho desarrollo la construcción de puentes de acero, por la excelente calidad y la baratura del material que producen las fábricas establecidas en Bilbao.

APÉNDICES.

APÉNDICE NÚM. 1.

Tabla de los cuadrados, cubos, raíces cuadrada y cúbica y logaritmo de los números enteros de 1 á 1.000; circunferencia y área del círculo de diámetro n.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\pi\, n^2$
0	0	0	0,0000	0,0000	$-\infty$	0,000	0,0000
1	1	1	1,0000	1,0000	0,0000	3,142	0,7854
2	4	8	1,4142	1,2599	0,3010	6,283	3,1416
3	9	27	1,7321	1,4422	0,4771	9,425	7,0686
4	16	64	2,0000	1,5874	0,6021	12,57	12,566
5	25	125	2,2361	1,7100	0,6990	15,71	19,635
6	36	216	2,4495	1,8171	0,7781	18,85	28,274
7	49	343	2,6458	1,9129	0,8451	21,99	38,484
8	64	512	2,8284	2,0000	0,9031	25,13	50,265
9	81	729	3,0000	2,0801	0,9542	28,27	63,617
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,0000	31,42	78,540
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,0414	34,56	95,033
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,0792	37,70	113,10
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,1139	40,84	132,73
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,1461	43,98	153,94
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,1761	47,12	176,71
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,2041	50,27	201,06
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,2304	53,41	226,98
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,2553	56,55	254,47
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,2788	59,69	283,53
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,3010	62,83	314,16
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,3222	65,97	346,36
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,3424	69,12	380,13
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,3617	72,26	415,48
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,3802	75,40	452,39
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,3979	78,54	490,87
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,4150	81,68	530,93
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,4314	84,82	572,56
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,4472	87,96	615,75
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,4624	91,11	660,52
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,4771	94,25	706,86
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,4914	97,39	754,77
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,5051	100,5	804,25
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,5185	103,7	855,30
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,5315	106,8	907,92
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,5441	110,0	962,11
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,5563	113,1	1017,9
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,5682	116,2	1075,2
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,5798	119,4	1134,1
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,5911	122,5	1194,6
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,6021	125,7	1256,6

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,6128	128,8	1320,3
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,6232	131,9	1385,4
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,6335	135,1	1452,2
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,6434	138,2	1520,5
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,6532	141,4	1590,4
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,6628	144,5	1661,9
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,6721	147,7	1734,9
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,6812	150,8	1809,6
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,6902	153,9	1885,7
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,6990	157,1	1963,5
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,7076	160,2	2042,8
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,7160	163,4	2123,7
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,7243	166,5	2206,2
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,7324	169,6	2290,2
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,7404	172,8	2375,8
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,7482	175,9	2463,0
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,7559	179,1	2551,8
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,7634	182,2	2642,1
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,7708	185,4	2734,0
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,7781	188,5	2827,4
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,7853	191,6	2922,5
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,7924	194,8	3019,1
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,7993	197,9	3117,2
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,8062	201,1	3217,0
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,8129	204,2	3318,3
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,8195	207,3	3421,2
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,8261	210,5	3525,7
68	4624	341432	8,2462	4,0817	1,8325	213,6	3631,7
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,8388	216,8	3739,3
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,8451	219,9	3848,5
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,8513	223,1	3959,2
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,8573	226,2	4071,5
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,8633	229,3	4185,4
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,8692	232,5	4300,8
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,8751	235,6	4417,9
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,8808	238,8	4536,5
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,8865	241,9	4656,6
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,8921	245,0	4778,4
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,8976	248,2	4901,7
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,9031	251,3	5026,5
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,9085	254,5	5153,0
82	6724	155368	9,0554	4,3445	1,9138	257,6	5281,0
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,9191	260,8	5410,6
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,9243	263,9	5541,8
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,9294	267,0	5674,5
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,9345	270,2	5808,8
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,9395	273,3	5944,7
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,9445	276,5	6082,1
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,9494	279,6	6221,1
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,9542	282,7	6361,7

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,9590	285,9	6503,9
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,9638	289,0	6647,6
93	8649	804357	9,6437	4,5307	1,9685	292,2	6792,9
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,9731	295,3	6939,8
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,9777	298,5	7088,2
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,9823	301,6	7238,2
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,9868	304,7	7389,8
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,9912	307,9	7543,0
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,9956	311,0	7697,7
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,0000	314,2	7854,0
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,0043	317,3	8011,8
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,0086	320,4	8171,3
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,0128	323,6	8332,3
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,0170	326,7	8494,9
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,0212	329,9	8659,0
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,0253	333,0	8824,7
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,0294	336,2	8992,0
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,0334	339,3	9160,9
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,0374	342,4	9331,3
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,0414	345,6	9503,3
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,0453	348,7	9676,9
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,0492	351,9	9852,0
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,0531	355,0	10029
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,0569	358,1	10207
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,0607	361,3	10387
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,0645	364,4	10568
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,0682	367,6	10751
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,0719	370,7	10936
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	2,0755	373,8	11122
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,0792	377,0	11310
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,0828	380,1	11499
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,0864	383,3	11690
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,0899	386,4	11882
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,0934	389,6	12076
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,0969	392,7	12272
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,1004	395,8	12469
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,1038	399,0	12668
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,1072	402,1	12868
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,1106	405,3	13070
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,1139	408,4	13273
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,1173	411,5	13478
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,1206	414,7	13685
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,1238	417,8	13893
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,1271	421,0	14103
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,1303	424,1	14314
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,1335	427,3	14527
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,1367	430,4	14741
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,1399	433,5	14957
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,1430	436,7	15175
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,1461	439,8	15394

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,1492	443,0	15615
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,1523	446,1	15837
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,1553	449,2	16061
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,1584	452,4	16286
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,1614	455,5	16513
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,1643	458,7	16742
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,1673	461,8	16972
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,1703	465,0	17203
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,1732	468,1	17437
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,1761	471,2	17671
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,1790	474,4	17908
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,1818	477,5	18146
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,1847	480,7	18385
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,1875	483,8	18627
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,1903	486,9	18869
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,1931	490,1	19113
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,1959	493,2	19359
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,1987	496,4	19607
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,2014	499,5	19856
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,2041	502,7	20106
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	2,2068	505,8	20358
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,2095	508,9	20612
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,2122	512,1	20867
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	2,2148	515,2	21124
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,2175	518,4	21382
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2,2201	521,5	21642
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	2,2227	524,6	21904
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,2253	527,8	22167
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,2279	530,9	22432
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,2304	534,1	22698
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,2330	537,2	22966
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,2355	540,4	23235
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,2380	543,5	23506
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,2405	546,6	23779
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,2430	549,8	24053
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,2455	552,9	24328
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,2480	556,1	24606
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,2504	559,2	24885
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,2528	562,3	25165
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,2553	565,5	25447
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,2577	568,6	25730
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,2601	571,8	26016
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,2626	574,9	26302
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,2648	578,1	26590
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,2672	581,2	26880
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,2695	584,3	27172
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,2718	587,5	27465
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,2742	590,6	27759
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,2765	593,8	28055
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,2787	596,9	28353

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,2810	600,0	28652
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,2833	603,2	28953
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,2856	606,3	29255
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,2878	609,5	29559
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,2900	612,6	29865
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,2923	615,8	30172
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,2945	618,9	30481
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,2967	622,0	30791
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,2989	625.2	31103
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,3010	628,3	31416
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,3032	631,5	31731
202	40804	8242408	14,2127	5,8685	2,3053	634,6	32047
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,3075	637,7	32365
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,3096	640,9	32685
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,3117	644,0	33006
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,3139	647,2	33329
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,3160	650,3	33654
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,3181	653,5	33979
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,3202	656,6	34307
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,3222	659,7	34636
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,3243	662,9	34967
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,3263	666,0	35299
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,3284	669,2	35633
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,3304	672,3	35968
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,3324	675,4	36305
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,3344	678,6	36644
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,3365	681,7	36984
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,3385	684,9	37325
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,3404	688,0	37668
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2,3424	691,2	38013
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,3444	694,3	38360
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,3464	697,4	38708
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,3483	700,6	39057
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,3502	703,7	39408
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,3522	706,9	39761
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,3541	710,0	40115
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,3560	713,1	40471
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,3579	716,3	40828
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,3598	719,4	41187
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,3617	722,6	41548
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,3636	725,7	41910
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,3655	728,8	42273
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,3674	732,0	42638
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,3692	735,1	43005
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,3711	738,3	43374
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,3729	741,4	43744
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,3748	744,6	44115
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,3766	747,7	44488
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,3784	750,8	44863
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,3802	754,0	45239

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,3820	757,1	45617
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,3838	760,3	45996
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,3856	763,4	46377
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,3874	766,5	46759
245	60025	14706124	15,6525	6,2573	2,3892	769,7	47144
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,3909	772,8	47529
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,3927	776,0	47916
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,3945	779,1	48305
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,3962	782,3	48695
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,3979	785,4	49087
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,3997	788,5	49481
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,4014	791,7	49876
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,4031	794,8	50273
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,4048	798,0	50671
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,4065	801,1	51071
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,4082	804,2	51472
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,4099	807,4	51875
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,4116	810,5	52279
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,4133	813,7	52685
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,4150	816,8	53093
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,4166	820,0	53502
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,4183	823,1	53913
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,4200	826,2	54325
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,4216	829,4	54739
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,4233	832,5	55155
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,4249	835,7	55572
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,4265	838,8	55990
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,4281	841,9	56410
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,4298	845,1	56832
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,4314	848,2	57256
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,4330	851,4	57680
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,4346	854,5	58107
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,4362	857,7	58535
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,4378	860,8	58965
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,4393	863,9	59396
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,4409	867,1	59828
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,4425	870,2	60263
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,4440	873,4	60699
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,4456	876,5	61136
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,4472	879,6	61575
281	78964	22188041	16,7631	6,5499	2,4487	882,8	62016
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,4503	885,9	62458
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,4518	889,1	62902
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,4533	892,2	63347
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,4548	895,4	63794
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,4564	898,5	64242
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,4579	901,6	64692
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,4594	904,8	65144
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,4609	907,9	65597
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,4624	911,1	66052

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,4639	914,6	66508
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,4654	917,3	66966
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,4669	920,5	67426
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,4684	923,6	67887
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,4698	926,8	68349
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,4713	929,9	68813
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,4728	933,1	69279
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,4742	936,2	69746
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,4757	939,3	70215
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,4771	942,5	70686
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,4786	945,6	71158
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,4800	948,8	71631
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,4814	951,9	72107
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,4829	955,0	72583
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,4843	958,2	73062
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,4857	961,3	73542
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,4871	964,5	74023
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,4886	967,6	74506
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,4900	970,8	74991
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,4914	973,9	75477
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,4928	977,0	75964
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,4942	980,2	76454
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,4955	983,3	76945
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,4969	986,5	77437
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,4983	989,6	77931
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,4997	992,7	78427
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,5011	995,9	78924
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,5024	999,0	79423
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,5038	1002	79923
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,5052	1005	80425
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,5065	1008	80928
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,5079	1012	81433
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,5092	1015	81940
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,5106	1018	82448
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,5119	1021	82959
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,5132	1024	83469
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,5145	1027	83982
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,5159	1030	84496
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,5172	1034	85012
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,5185	1037	85530
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,5198	1040	86049
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,5211	1043	86570
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,5224	1046	87092
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,5238	1049	87616
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,5250	1052	88141
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,5263	1056	88668
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,5276	1059	89197
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,5289	1062	89727
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,5302	1065	90259
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,5315	1068	90792

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,5328	1071	91327
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,5340	1074	91863
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,5353	1078	92401
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,5366	1081	92941
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,5378	1084	93482
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,5391	1087	94025
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,5403	1090	94569
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,5416	1093	95115
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,5428	1096	95662
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,5441	1100	96211
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,5453	1103	96762
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,5465	1106	97314
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,5478	1109	97868
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,5490	1112	98423
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,5502	1115	98980
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,5515	1118	99538
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,5527	1122	100098
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,5539	1125	100660
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,5551	1128	101223
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,5563	1131	101788
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,5575	1134	102354
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,5587	1137	102922
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,5599	1140	103491
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,5611	1144	104062
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,5623	1147	104635
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,5635	1150	105209
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,5647	1153	105784
368	135424	49826032	19,1833	7,1661	2,5659	1156	106362
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,5670	1159	106941
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,5682	1162	107521
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,5694	1166	108103
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,5705	1169	108687
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,5717	1172	109272
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,5729	1175	109858
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,5740	1178	110447
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,5752	1181	111036
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,5763	1184	111628
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,5775	1188	112221
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,5786	1191	112815
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,5798	1194	113411
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,5809	1197	114009
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,5821	1200	114608
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,5832	1203	115209
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,5843	1206	115812
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,5855	1210	116416
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,5866	1213	117021
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,5877	1216	117628
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,5888	1219	118237
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,5899	1222	118847
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,5911	1225	119459

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,5922	1228	120072
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,5933	1232	120687
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,5944	1235	121304
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,5955	1238	121922
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,5966	1241	122542
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,5977	1244	123163
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,5988	1247	123786
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,5999	1250	124410
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,6010	1253	125036
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,6021	1257	125664
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,6031	1260	126293
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,6042	1263	126923
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,6053	1266	127556
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,6064	1269	128190
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,6075	1272	128825
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,6085	1275	129462
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,6096	1279	130100
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,6107	1282	130741
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,6117	1285	131382
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,6128	1288	132025
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,6138	1291	132670
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,6149	1294	133317
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,6160	1297	133965
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,6170	1301	134614
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,6181	1304	135265
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,6191	1307	135918
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,6201	1310	136572
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,6212	1313	137228
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,6222	1316	137885
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,6233	1319	138544
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,6243	1323	139205
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,6253	1326	139867
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,6263	1329	140531
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,6274	1332	141196
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,6284	1335	141863
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,6294	1338	142531
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,6304	1341	143201
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,6314	1345	143872
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,6325	1348	144545
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,6335	1351	145220
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,6345	1354	145896
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,6355	1357	146574
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,6365	1360	147254
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,6375	1363	147934
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,6385	1367	148617
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,6395	1370	149301
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,6405	1373	149987
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,6415	1376	150674
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,6425	1379	151363
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,6435	1382	152053

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\pi\, n^2$
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,6444	1385	152745
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,6454	1389	153439
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,6464	1392	154134
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,6474	1395	154830
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,6484	1398	155528
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,6493	1401	156228
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,6503	1404	156930
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,6513	1407	157633
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,6523	1411	158337
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,6532	1414	159043
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,6542	1417	159751
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,6551	1420	160460
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,6561	1423	161171
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,6571	1426	161883
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,6580	1429	162597
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,6590	1433	163313
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,6599	1436	164030
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,6609	1439	164748
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,6618	1442	165468
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,6628	1445	166190
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,6637	1448	166914
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,6646	1451	167639
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,6656	1455	168365
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,6665	1458	169093
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,6675	1461	169823
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,6684	1464	170554
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,6693	1467	171287
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,6702	1470	172021
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,6712	1473	172757
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,6721	1477	173494
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,6730	1480	174234
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,6739	1483	174974
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,6749	1486	175716
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,6758	1489	176460
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,6767	1492	177205
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,6776	1495	177952
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,6785	1499	178701
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,6794	1502	179451
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,6803	1505	180203
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,6812	1508	180956
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,6821	1511	181711
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,6830	1514	182467
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,6839	1517	183225
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,6848	1521	183984
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,6857	1524	184745
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,6866	1527	185508
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,6875	1530	186272
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,6884	1533	187038
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,6893	1536	187805
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,6902	1539	188574

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\pi\, n^2$
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,6911	1543	189345
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,6920	1546	190117
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,6928	1549	190890
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,6937	1552	191665
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,6946	1555	192442
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,6955	1558	193221
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,6964	1561	194000
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,6972	1565	194782
499	249001	124251499	22,2383	7,9317	2,6981	1568	195565
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,6990	1571	196350
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,6998	1574	197136
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,7007	1577	197923
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,7016	1580	198713
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,7024	1583	199504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,7033	1587	200296
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,7042	1590	201090
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,7050	1593	201886
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,7059	1596	202683
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,7067	1599	203482
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,7076	1602	204282
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,7084	1605	205084
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,7093	1608	205887
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,7101	1612	206692
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,7110	1515	207499
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,7118	1618	208307
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,7126	1621	209117
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,7135	1624	209928
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,7143	1627	210741
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,7152	1630	211556
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,7160	1634	212372
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,7168	1637	213189
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,7177	1640	214008
523	273520	143055667	22,8692	8,0569	2,7185	1643	214829
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,7193	1646	215651
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,7202	1649	216475
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,7210	1652	217301
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	2,7218	1656	218128
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,7226	1659	218956
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,7235	1662	219787
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,7243	1665	220618
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,7251	1668	221452
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,7259	1671	222287
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,7267	1674	223123
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,7275	1678	223961
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,7284	1681	224801
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,7292	1684	225642
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,7300	1687	226484
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,7308	1690	227329
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,7316	1693	228175
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,7324	1696	229022

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\,\pi\, n^2$
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,7332	1700	229871
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,7340	1703	230722
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,7348	1706	231574
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,7356	1709	232428
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	2,7364	1712	233283
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,7372	1715	234140
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,7380	1718	234998
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,7388	1722	235858
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,7396	1725	236720
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,7404	1728	237583
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,7412	1731	238448
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,7419	1734	239314
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,7427	1737	240182
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,7435	1740	241051
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,7443	1744	241922
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,7451	1747	242795
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,7459	1750	243669
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,7466	1753	244545
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,7474	1756	245422
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,7482	1759	246301
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,7490	1762	247181
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,7497	1766	248063
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,7505	1769	248947
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,7513	1772	249832
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,7521	1775	250719
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,7528	1778	251607
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,7536	1781	252497
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,7543	1784	253388
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,7551	1788	254281
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,7559	1791	255176
571	336041	186169411	23,8956	8,2962	2,7566	1794	256072
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,7574	1797	256970
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,7582	1800	257869
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,7589	1803	258770
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	2,7597	1806	259672
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,7604	1810	260576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,7612	1813	261482
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2,7619	1816	262389
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,7627	1819	263298
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,7634	1822	264208
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,7642	1825	265120
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,7649	1828	266033
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,7657	1832	266948
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,7664	1835	267865
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	2,7672	1838	268783
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,7679	1841	269703
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,7686	1844	270624
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,7694	1847	271547
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,7701	1850	272471
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	2,7709	1854	273397

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,7716	1857	274325
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	2,7723	1860	275254
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,7731	1863	276184
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,7738	1866	277117
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,7745	1869	278051
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,7752	1872	278986
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	2,7760	1876	279923
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,7767	1879	280862
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,7774	1882	281802
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,7782	1885	282743
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,7789	1888	283687
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,7796	1891	284631
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,7803	1894	285578
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,7810	1898	286526
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,7818	1901	287475
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,7825	1904	288426
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,7832	1907	289379
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,7839	1910	290333
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,7846	1913	291289
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,7853	1916	292247
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,7860	1920	293206
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,7868	1923	294166
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,7875	1926	295128
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,7882	1929	296092
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,7889	1932	297057
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,7896	1935	298024
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,7903	1938	298992
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,7910	1942	299962
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,7917	1945	300934
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,7924	1948	301907
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,7931	1951	302882
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,7938	1954	303858
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,7945	1957	304836
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,7952	1960	305815
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,7959	1963	306796
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,7966	1967	307779
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,7973	1970	308763
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,7980	1973	309748
629	395641	249858189	25,0799	8,5681	2,7987	1976	310736
630	396900	250047000	25,0988	8,5726	2,7993	1979	311725
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,8000	1982	312715
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,8007	1985	313707
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,8014	1989	314700
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,8021	1992	315695
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,8028	1995	316692
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,8035	1998	317690
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,8041	2001	318690
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,8048	2004	319692
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,8055	2007	320695
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,8062	2011	321699

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,8069	2014	322705
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,8075	2017	323713
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,8082	2020	324722
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,8089	2023	325733
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,8096	2026	326745
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,8102	2029	327759
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,8109	2033	328775
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,8116	2036	329792
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,8122	2039	330810
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,8129	2042	331831
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,8136	2045	332853
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,8142	2048	333876
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,8149	2051	334901
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,8156	2055	335927
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,8162	2058	336955
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,8169	2061	337985
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,8176	2064	339016
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,8182	2067	340049
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,8189	2070	341083
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,8195	2073	342119
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2,8202	2077	343157
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2,8209	2080	344196
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2,8215	2083	345237
664	440896	292754944	25,7682	8,7240	2,8222	2086	346279
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,8228	2089	347323
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,8235	2092	348368
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,8241	2095	349415
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,8248	2099	350464
669	447561	299418309	22,8650	8,7460	2,8254	2102	351514
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,8261	2105	352565
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,8267	2108	353618
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2,8274	2111	354673
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2,8280	2114	355730
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,8287	2117	356788
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2,8293	2121	357847
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,8299	2124	358908
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,8306	2127	359971
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2,8312	2130	361035
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2,8319	2133	362101
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,8325	2136	363168
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,8331	2139	364237
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,8338	2143	365308
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,8344	2146	366380
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,8351	2149	367453
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,8357	2152	368528
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,8363	2155	369605
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,8370	2158	370684
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,8376	2161	371764
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2,8382	2165	372845
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,8388	2168	373928

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$n\,\pi$	$\frac{1}{4}\,\pi\,n^2$
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,8395	2171	375013
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,8401	2174	376099
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2,8407	2177	377187
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,8414	2180	378276
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2,8420	2183	379367
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,8426	2187	380460
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,8432	2190	381553
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,8439	2193	382649
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2,8445	2196	383746
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,8451	2199	384845
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2,8457	2202	385945
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2,8463	2205	387047
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,8470	2209	388151
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,8476	2212	389256
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,8482	2215	390363
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2,8488	2218	391471
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,8494	2221	392580
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,8500	2224	393692
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,8506	2227	394805
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,8513	2231	395919
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2,8519	2234	397035
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,8525	2237	398153
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,8531	2240	399272
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2,8537	2243	400393
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,8543	2246	401515
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,8549	2249	402639
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2,8555	2253	403765
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,8561	2256	404892
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2,8567	2259	406020
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2,8573	2262	407150
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,8579	2265	408282
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,8585	2268	409415
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2,8591	2271	410550
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2,8597	2275	411687
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2,8603	2278	412825
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2,8609	2281	413965
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2,8615	2284	415106
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,8621	2287	416248
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2,8627	2290	417393
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2,8633	2293	418539
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,8639	2297	419686
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	2,8645	2300	420835
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,8651	2303	421986
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2,8657	2306	423138
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,8663	2309	424292
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2,8669	2312	425447
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2,8675	2315	426604
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	2,8681	2318	427762
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2,8686	2322	428922
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,8692	2325	430084

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2,8698	2328	431247
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2,8704	2331	432412
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,8710	2334	433578
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,8716	2337	434746
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,8722	2340	435916
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,8727	2344	437087
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,8733	2347	438259
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,8739	2350	439433
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,8745	2353	440609
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,8751	2356	441786
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,8756	2359	442965
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,8762	2362	444146
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,8768	2366	445328
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,8784	2369	446511
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2,8779	2372	447697
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,8785	2375	448883
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,8791	2378	450072
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,8797	2381	451262
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,8802	2384	452453
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,8808	2388	453646
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,8814	2391	454841
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2,8820	2394	456037
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,8825	2397	457234
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,8831	2400	458434
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,8837	2403	459635
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,8842	2406	460837
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2,8848	2410	462041
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,8854	2413	463247
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,8859	2416	464454
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,8865	2419	465663
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,8871	2422	466873
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,8876	2425	468085
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,8882	2428	469298
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,8887	2432	470513
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,8893	2435	471730
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2,8899	2438	472948
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,8904	2441	474168
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,8910	2444	475389
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,8915	2447	476612
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2,8921	2450	477836
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,8927	2454	479062
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,8932	2457	480290
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,8938	2460	481519
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,8943	2463	482750
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,8949	2466	483982
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,8954	2469	485216
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,8960	2472	486451
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,8965	2476	487688
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,8971	2479	488927
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,8976	2482	490167

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,8982	2485	491409
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,8987	2488	492652
793	628849	498672257	28,1603	9,2560	2,8993	2491	493897
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,8998	2494	495143
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,9004	2498	496391
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,9009	2501	497641
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,9015	2504	498892
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,9020	2507	500145
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,9026	2510	501399
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,9031	2513	502655
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2,9036	2516	503912
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,9042	2520	505171
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2,9047	2523	506432
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,9053	2526	507694
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,9058	2529	508958
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,9063	2532	510223
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,9069	2535	511490
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,9074	2538	512758
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,9079	2542	514028
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,9085	2545	515300
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,9090	2548	516573
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,9096	2551	517848
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,9101	2554	519124
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,9106	2557	520402
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,9112	2560	521681
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,9117	2564	522962
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,9122	2567	524245
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2,9128	2570	525529
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,9133	2573	526814
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,9138	2576	528102
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,9143	2579	529391
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,9149	2582	530681
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,9154	2586	531973
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,9159	2589	533267
825	660625	561515625	28,7228	9,3789	2,9165	2592	534562
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,9170	2595	535858
827	683929	565609283	28,7586	9,3865	2,9175	2598	537157
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,9180	2601	538456
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2,9186	2604	539758
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,9191	2608	541061
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,9196	2611	542365
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,9201	2614	543671
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,9206	2617	544979
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,9212	2620	546288
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,9217	2623	547599
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,9222	2626	548912
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,9227	2630	550226
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,9232	2633	551541
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,9238	2636	552858
840	705600	592704000	28,9828	9,4351	2,9243	2639	554177

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\pi\, n^2$
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,9248	2642	555497
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,9253	2645	556819
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,9258	2648	558142
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,9263	2652	559467
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,9269	2655	560794
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,9274	2658	562122
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,9279	2661	563452
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,9284	2664	564783
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,9289	2667	566116
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,9294	2670	567450
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,9299	2673	568786
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,9304	2677	570124
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,9309	2680	571463
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,9315	2683	572803
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,9320	2686	574146
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,9325	2689	575490
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,9330	2692	576835
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,9335	2695	578182
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,9340	2699	579530
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,9345	2702	580880
861	741321	638277381	19,3428	9,5134	2,9350	2705	582232
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,9355	2708	583585
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,9360	2711	584940
864	746496	641972544	29,3939	9,5244	2,9365	2714	586297
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,9370	2717	587655
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,9375	2721	589014
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,9380	2724	590375
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2,9385	2727	591738
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,9390	2730	593102
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,9395	2733	594468
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,9400	2736	595835
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,9405	2739	597204
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,9410	2743	598575
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,9415	2746	599947
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,9420	2749	601320
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,9425	2752	602696
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,9430	2755	604073
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,9435	2758	605451
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,9440	2761	606831
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,9445	2765	608212
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,9450	2768	609595
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,9455	2771	610980
883	779689	688456387	29,7153	9,5937	2,9460	2774	612366
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,9465	2777	613754
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,9469	2780	615143
886	784996	685506456	29,7658	9,6046	2,9474	2783	616534
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,9479	2787	617927
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,9484	2790	619321
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,9489	2793	620717
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,9494	2796	622114

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\pi\, n^2$
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,9499	2799	623513
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,9504	2802	624913
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,9509	2805	626315
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,9513	2809	627718
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,9518	2812	629124
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,9523	2815	630530
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,9528	2818	631938
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,9533	2821	633348
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,9538	2824	634760
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,9542	2827	636173
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,9547	2831	637587
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,9552	2834	639003
903	815409	736314427	20,0500	9,6656	2,9557	2837	640421
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,9562	2840	641840
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,9566	2843	643261
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,9571	2846	644683
907	822649	246142643	30,1164	9,6799	2,9576	2849	646107
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,9581	2853	647533
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,9586	2856	648960
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,9590	2859	650388
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,9595	2862	651818
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,9600	2865	653250
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,9605	2868	654684
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,9609	2871	656118
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,9614	2875	657555
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,9619	2878	658993
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,9624	2881	660433
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,9628	2884	661874
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,9633	2887	663317
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,9638	2890	664761
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,9643	2893	666207
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,9647	2897	667654
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,9652	2900	669103
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,9657	2903	670554
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,9661	2906	672006
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,9666	2909	673460
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,9671	2912	674915
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,9675	2915	676372
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,9680	2919	677831
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,9685	2922	679291
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,9689	2925	680752
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,9694	2928	682216
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,9699	2931	683680
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,9703	2934	685147
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,9708	2937	686615
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,9713	2941	688084
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,9717	2944	689555
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,9722	2947	691028
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,9727	2950	692502
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,9731	2953	693978

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,9736	2956	695455
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,9740	2959	696934
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,9745	2963	698415
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,9750	2966	699897
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,9754	2969	701380
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,9759	2972	702865
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,9763	2975	704352
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,9768	2978	705840
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,9773	2981	707330
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,9777	2985	708822
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,9782	2988	710315
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2,9786	2991	711809
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,9791	2994	713306
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,9795	2997	714803
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,9800	3000	716303
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,9805	3003	717804
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,9809	3007	719306
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,9814	3010	720810
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,9818	3013	722316
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,9823	3016	723823
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,9827	3019	725332
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,9832	3022	726842
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,9836	3025	728354
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,9841	3028	729867
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,9845	3032	731382
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,9850	3035	732899
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,9854	3038	734417
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,9859	3041	735937
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,9863	3044	737458
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,9868	3047	738981
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,9872	3050	740506
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,9877	3054	742032
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,9881	3057	743559
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,9886	3060	745088
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,9890	3063	746619
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,9894	3066	748151
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,9899	3069	749685
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,9903	3072	751221
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,9908	3076	752758
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,9912	3079	754296
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,9917	3082	755837
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,9921	3085	757378
983	966289	949862087	31,3523	9,9430	2,9926	3088	758922
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,9930	3091	760466
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,9934	3094	762013
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,9939	3098	763561
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,9943	3101	765111
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,9948	3104	766662
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,9952	3107	768214
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,9956	3110	769769

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log. n	$\pi\, n$	$\frac{1}{4}\,\pi\, n^2$
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,9961	3113	771325
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,9965	3116	772882
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,9969	3120	774441
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,9974	3123	776002
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,9978	3126	777564
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,9983	3129	779128
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,9987	3132	780693
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,9991	3135	782260
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,9996	3138	783828
1000	1000000	1000000000	31,6228	10,0000	3,0000	3142	785398

ADVERTENCIAS PARA EL USO DE ESTAS TABLAS.—Estas tablas son de gran utilidad para efectuar los cálculos de resistencia. No sirven solamente para los números enteros, sino también para los decimales que no tengan más de tres cifras significativas. Sea, por ejemplo, el número 4,28. Tomaremos el entero 428, y en los resultados correspondientes correremos la coma por cada cifra decimal del número propuesto:

Un lugar á la izquierda para $\pi\, n$.

Dos lugares á la izquierda para n^2 y $\frac{\pi\, n^2}{4}$.

Tres lugares á la izquierda para n^3.

Un lugar á la derecha para $\frac{1}{n}$.

Un lugar á la izquierda por cada grupo de dos decimales para $\sqrt{n}$.

Los resultados serán, en este caso, $\pi\, n = 13{,}45$; $n^2 = 18{,}3184$; $\frac{\pi\, n^2}{4} = 14{,}3872$; $n^3 = 78{,}402.752$; $\frac{1}{n} = 0{,}234$; $\sqrt{n} = 2{,}06882$, etc.

La operación más frecuente es la extracción de la raíz cuadrada, que casi siempre se puede efectuar por medio de estas tablas con la aproximación suficiente en esta clase de cálculos, sin acudir al procedimiento ordinario, mucho más largo y penoso.

En este caso, se debe tener en cuenta que las cifras decimales han de ser siempre en número par; así, si se pide la raíz cuadrada de 42,8, no acudiremos al número entero 428 sino al 42, y luego

interpolaremos entre 42 y 43. La raíz cuadrada de 42 es 6,4807; la de 43 es 6,5574, la diferencia es 6,5574 — 6,4807 = 0,0767; luego la de 42,8 será

$$\sqrt{42,8} = 6,4807 + \frac{8}{10} \times 0,0767 = 6,5421.$$

Este mismo procedimiento puede servir para hallar por aproximación las raíces cuadradas de números superiores á 1000. Si consideramos el número 4280, su raíz cuadrada será 654,21, deducida de la anterior corriendo la coma dos lugares á la derecha. Si se trata de 42.800 se deducirá de la del entero 428 y será 206,882; las comprobaciones se hacen inmediatamente por medio de la columna de los cuadrados y esta operación permite darse cuenta de la aproximación obtenida. Si el número terminara en cifras significativas, se interpolaría como en el caso de las decimales.

La raíz cúbica se obtiene por reglas análogas, teniendo presente que el período es de tres cifras; su uso es mucho menos frecuente.

Las demás columnas de las tablas no exigen explicaciones.

APÉNDICE NÚM. 2.

Tablas de las líneas trigonométricas naturales de 10 en 10′ para los arcos comprendidos entre 0 y 90°.

Grados.	Seno						
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	9,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0 59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grados.
	Coseno						

Grados.	Coseno						
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711						44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grados.
	Seno						

Grados.	Tangentes 0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	9,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	9,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	45
45	1,00000						44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grados.
	Cotangentes						

Grados.	Cotangentes 0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	98
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	3,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16099	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	45
45	1,00000						44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Grados.
	Tangentes						

USO DE ESTAS TABLAS.—El uso de estas tablas es frecuente en los cálculos de resistencia de los puentes, sobre todo en el cálculo de las tensiones y longitudes de las barras de los sistemas de celosía, ya sea ordinaria ó de grandes mallas. Su disposición se comprende desde luego, pues es la ordinaria de las tablas de líneas trigonométricas. Los senos y tangentes de arcos menores que 45° se buscan en las páginas 1.ª y 3.ª en la parte superior, los grados figuran en la columna de la izquierda y los minutos en la línea horizontal de la parte superior. Igual disposición tienen los cosenos y cotangentes de arcos mayores que 45° en las páginas 2.ª y 4.ª

Los cosenos y cotangentes de arcos menores que 45° se encuentran en la parte inferior de las páginas 1.ª y 3.ª Los grados se leen en este caso en la columna de la derecha y los minutos en la línea horizontal de la parte inferior. En igual disposición se presentan los senos y tangentes de arcos mayores que 45°, los cuales se hallan en las páginas 2.ª y 4.ª

EJEMPLO: El seno de 64° 40′ se hallará en la parte inferior de la 2.ª página, se buscará 64° á la derecha, 40′ en la línea inferior, y en la intersección de la línea y columna correspondientes, leeremos 0,90383.

En los cálculos de las tensiones de las diagonales pueden conservarse sólo las tres primeras cifras (forzando la cuarta si excede de 5) para abreviar los cálculos. En cambio, el cálculo de la longitud de los ejes de las barras debe hacerse con la mayor exactitud posible.

Si el ángulo no es múltiplo exacto de la decena de minutos se procede por interpolación.

APÉNDICE NÚM. 3.

Peso por metro cuadrado, en kilogramos, de las chapas de hierro, acero y fundición.

Espesor — *Milím.*	Hierro. — *Kilogramos.*	Acero. — *Kilogramos.*	Fundición. — *Kilogramos.*	Espesor — *Milím.*	Hierro. — *Kilogramos.*	Acero. — *Kilogramos.*	Fundición. — *Kilogramos.*
0,5	3,89	3,93	3,62	**13**	101,24	102,34	94,16
1	7,79	7,87	7,24	**14**	109,03	110,18	101,40
2	15,58	15,74	14,49	**15**	116,82	118,05	108,65
3	23,36	23,61	21,73	**16**	124,61	125,92	115,89
4	31,15	31,48	28,97	**17**	132,40	133,79	123,13
5	38,94	39,35	36,22	**18**	140,18	141,66	130,37
6	46,73	47,22	43,46	**19**	147,97	149,53	137,62
7	54,52	55,09	50,70	**20**	155,76	157,40	144,86
8	62,30	62,96	57,94	**21**	163,55	165,27	152,10
9	70,09	70,83	65,19	**22**	171,34	173,14	159,35
10	77,88	78,70	72,43	**23**	179,12	181,01	166,59
11	85,67	86,57	79,67	**24**	186,91	188,88	173,83
12	93,46	94,44	86,92	**25**	194,70	196,75	181,08

USO DE LA TABLA.—Esta tabla es de uso constante al proyectar puentes metálicos, como puede verse al estudiar cualquiera de los ejemplos numéricos del texto. En la mayor parte de las piezas compuestas entran bandas de chapas de palastro, y conociendo el espesor y el ancho, se encuentra inmediatamente su peso. Por ejemplo, sea una diagonal de un puente de celosía, de 0,35 m. de ancho y 16 mm. de espesor. El metro cuadrado de chapa pesa, según la tabla, suponiéndola de hierro, 124,61 kg. Luego la faja de 0,35 m. pesará por metro lineal $124{,}61 \times 0{,}35 = 43{,}61$ kg.

APÉNDICE NÚM. 4.

Pesos por metro lineal, en kilogramos, de diversos tipos de hierros de ángulo y de T.

TABLA I.—HIERROS DE ÁNGULO DE LADOS IGUALES.

Lado. — *Milím.*	PESO POR METRO LINEAL EN KILOGRAMOS PARA UN ESPESOR EN MILIMETROS DE										
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18
20	0,90	1,21	1,46	»	»	»	»	»	»	»	»
22	0,97	1,35	1,64	»	»	»	»	»	»	»	»
24	1,08	1,49	1,78	2,00	»	»	»	»	»	»	»
26	1,20	1,53	1,96	2,21	2,56	»	»	»	»	»	»
28	1,30	1,67	2,14	2,42	2,79	3,10	»	»	»	»	»
30	1,40	1,81	2,28	2,63	3,02	3,38	3,68	»	»	»	»
35	1,64	1,98	2,69	3,09	3,59	4,06	4,47	»	»	»	»
40	1,87	2,14	3,10	3,55	4,08	4,74	5,26	5,56	»	»	»
45	2,11	2,29	3,49	4,01	4,65	5,42	6,05	6,45	»	»	»
50	2,36	2,45	3,90	4,47	5,22	6,10	6,84	7,34	8,36	»	»
55	»	2,60	4,29	4,93	5,79	6,78	7,63	8,23	9,48	»	»
60	»	»	4,72	5,39	6,36	7,46	8,42	9,12	10,60	12,36	»
65	»	»	5,11	5,85	6,93	8,14	9,21	10,01	11,72	13,73	15,85
70	»	»	»	6,31	7,50	8,82	10,00	10,90	12,84	15,10	17,46
75	»	»	»	6,77	8,06	9,70	10,79	11,79	13,96	16,47	19,07
80	»	»	»	»	8,63	10,38	11,58	12,68	15,08	17,84	20,68
85	»	»	»	»	9,20	11,06	12,37	13,57	16.20	19,21	22,29
90	»	»	»	»	»	11,74	13,16	14,46	17,32	20,58	23,90
95	»	»	»	»	»	12,42	13,95	15,35	18,44	21,95	25,51
100	»	»	»	»	»	»	14,74	16,24	19,56	23,32	27,12
110	»	»	»	»	»	»	15,53	17,13	20,68	24,69	27,83
120	»	»	»	»	»	»	»	18,02	21,80	26,06	30,34
130	»	»	»	»	»	»	»	18,91	22,92	27,43	31,95

TABLA II.—HIERROS DE ÁNGULO DE LADOS DESIGUALES.

Lados. — *Milímetros.*		PESO POR METRO LINEAL EN KILOGRAMOS PARA UN ESPESOR EN MILÍMETROS DE									
		3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
10	30	1,10	1,44	»	»	»	»	»	»	»	»	»
20	40	1,33	1,75	»	»	»	»	»	»	»	»	»
30	45	»	2,22	2,73	»	»	»	»	»	»	»	»
30	60	»	»	3,32	3,90	4,53	»	»	»	»	»	»
40	60	»	»	3,71	4,40	5,08	»	»	»	»	»	»
40	80	»	»	»	5,34	6,20	7,00	»	»	»	»	»
50	75	»	»	»	»	6,40	7,30	8,10	»	»	»	»
50	100	»	»	»	»	»	8,90	10,00	10,90	»	»	»
65	100	»	»	»	»	»	»	11,00	12,10	»	»	»
65	130	»	»	»	»	»	»	»	14,40	17,10	»	»
80	120	»	»	»	»	»	»	»	14,80	17,60	»	»
80	160	»	»	»	»	»	»	»	»	21,30	24,70	»
100	150	»	»	»	»	»	»	»	»	22,30	25,80	»
100	200	»	»	»	»	»	»	»	»	»	31,20	35,40

TABLA III.—HIERROS EN T.

Dimensiones. — *Milímetros.*	Peso por metro lineal. — *Kilogramos.*	Dimensiones. — *Milímetros.*	Peso por metro lineal. — *Kilogramos.*	Dimensiones. — *Milímetros.*	Peso por metro lineal. — *Kilogramos.*
25/3 25/3	1,12	70/10 110/15	15,55	100/18 150/18	32,32
30/4 30/4	1,74	80/10 50/10	9,30	110/15 70/15	19,18
40/6 40/6	3,50	80/10 80/15	14,35	110/15 110/20	27,50
50/6 40/6	3,90	80/10 100/15	15,91	120/15 80/15	21,48
50/6 70/8	5,80	90/12 80/18	16,30	120/15 100/18	26,24
60/6 50/6	4,83	90/12 100/18	18,14	120/15 120/15	26,12
60/6 60/10	6,99	90/12 120/20	21,19	130/15 65/15	20,93
60/6 120/10	9,75	100/12 80/12	15,59	130/18 100/20	31,29
70/10 70/10	10,09	100/12 100/20	22,80	130/18 130/20	35,46
70/10 90/15	13,99	100/12 130/20	25,59	150/15 130/23	39,00

El numerador y denominador de la primera fracción expresan la altura del nervio vertical de la T y su espesor, y los de la segunda fracción, el ancho y el espesor de la barra transversal ó cabeza.

APÉNDICE NÚM. 5.

Tabla de hierros en doble T con expresión del peso por metro lineal, módulo de resistencia y momento resistente, para coeficientes de resistencia de 5, 6 y 8 kg. por milímetro cuadrado.

Dimensiones de los hierros en milímetros.	Peso por metro lineal — *Kilogramos.*	Valor de $\frac{I}{v}$.	Valores de $\frac{RI}{v}$ para		
			$R = 5$ kg.	$R = 6$ kg.	$R = 8$ kg.
$\frac{50}{5}$ $\frac{31}{3}$	3,35	0,000.006.9	34	41	55
$\frac{50}{5}$ $\frac{38}{10}$	6,08	0,000.009.9	50	59	79
$\frac{60}{5}$ $\frac{35}{4}$	4,29	0,000.010.2	51	61	81
$\frac{60}{5}$ $\frac{40}{9}$	6,63	0,000.013.2	66	79	105
$\frac{80}{6}$ $\frac{41}{4,5}$	7,13	0,000.022.0	110	132	175
$\frac{80}{6}$ $\frac{46}{9,5}$	10,30	0,000.027.0	135	162	216
$\frac{100}{6}$ $\frac{43}{5}$	9,00	0,000.028.5	142	171	228
$\frac{100}{7}$ $\frac{45}{8}$	12,00	0,000.031.8	159	191	254
$\frac{100}{6}$ $\frac{50}{12}$	14,48	0,000.039.7	198	238	317
$\frac{120}{7}$ $\frac{45}{6}$	11,00	0,000.043.5	217	261	348
$\frac{120}{7}$ $\frac{51}{11}$	16,60	0,000.054.1	270	325	433
$\frac{140}{7}$ $\frac{47}{7}$	15,10	0,000.059.2	296	355	473
$\frac{140}{8,5}$ $\frac{53}{10}$	17,30	0,000.087.8	439	527	702
$\frac{160}{8}$ $\frac{48}{8}$	15,00	0,000.077.2	386	463	617
$\frac{160}{9}$ $\frac{58}{10}$	20,30	0,000.103.8	519	623	830
$\frac{180}{9}$ $\frac{55}{8}$	20,00	0,000.112.0	561	672	896

Dimensiones de los hierros en milímetros.	Peso por metro lineal. — *Kilogramos.*	Valor de $\frac{I}{v}$.	Valores de $\frac{RI}{v}$ para		
			$R = 5$ kg.	$R = 6$ kg.	$R = 8$ kg.
$\frac{180}{9}$ $\frac{66}{14}$	28,40	0,000.151.0	755	906	1.208
$\frac{200}{9}$ $\frac{60}{8}$	21,00	0,000.152.1	760	913	1.217
$\frac{200}{9}$ $\frac{61}{14}$	31,00	0,000.191.0	955	1.147	1.528
$\frac{200}{9,5}$ $\frac{73}{16}$	34,40	0,000.205.0	1.025	1.230	1.640
$\frac{220}{10}$ $\frac{69}{10}$	29,00	0,000.214.0	1.070	1.284	1.712
$\frac{220}{10}$ $\frac{70}{16}$	40,00	0,000.237.4	1.187	1.424	1.894
$\frac{240}{13}$ $\frac{105}{10}$	40,00	0,000.361.1	1.805	2.167	2.889
$\frac{260}{12}$ $\frac{70}{16}$	44,00	0,000.333.8	1.669	2.003	2.670
$\frac{260}{17}$ $\frac{100}{12}$	50,00	0,000.475.0	2.375	2.850	3.800
$\frac{260}{12}$ $\frac{108}{6}$	61,00	0,000.562.7	2.813	3.376	4.501
$\frac{300}{14}$ $\frac{120}{12}$	55,00	0,000.592.6	2.963	3.556	4.743
$\frac{300}{19}$ $\frac{128}{22}$	85,00	0,000.860.9	4.304	5.165	6.887
$\frac{500}{33}$ $\frac{160}{15}$	145,00	0,002.715.6	13.578	21.725	27.156

OBSERVACIONES.—El numerador y el denominador de la primera fracción de la primera columna indican respectivamente la altura y el espesor del alma de la doble **T**, y los de la segunda fracción, el ancho y el espesor de las cabezas.

Para calcular rápidamente y con suficiente aproximación el módulo de resistencia $\frac{I}{v}$ cuando convenga emplear tipos no incluídos en esta tabla, se pueden emplear las siguientes fórmulas de Planat, análogas á las que hemos usado para formar los cuadros correspondientes á las secciones constituídas por chapas y hierros de ángulo.

Las fórmulas son:

$$\frac{I}{v} = 0{,}000.035\ \pi h \qquad\qquad \frac{I}{v} = 0{,}000.041\ \pi h$$

siendo π el peso por metro lineal y h la altura. La primera se aplica á los hierros en que el ancho de la cabeza es inferior á la mitad de la altura, y la segunda en el caso contrario.

Así, para la sección $\frac{180}{9}\ \frac{66}{14}$ tendremos

$$\frac{I}{v} = 0{,}000.035 \times 28{,}4 \times 0{,}180 = 0{,}000.178.9$$

en vez de 0,000.151.0 que es el valor exacto.

Para la sección $\frac{60}{5}\ \frac{40}{9}$ se obtiene

$$\frac{I}{v} = 0{,}000.041 \times 6{,}63 \times 0{,}060 = 0{,}000.016.3$$

en vez de 0,000.013.2.

APÉNDICE NÚM. 6.

Tabla de hierros Zorès con expresión del peso por metro lineal, módulo de resistencia y momento resistente para coeficientes de resistencia de 5, 6 y 8 kg. por milímetro cuadrado.

Altura. — *Milímetros.*	Espesor de los nervios oblicuos. — *Milímetros.*	Espesor de la cabeza inferior. — *Milímetros.*	Espesor de la cabeza superior. — *Milímetros.*	Separación de los nervios oblicuos en la base. — *Milímetros.*	Peso por metro lineal. — *Kilogramos.*	Valores del módulo de resistencia $\frac{I}{v}$.	Valores de $\frac{RI}{v}$ para		
							$R = 5$ kg.	$R = 6$ kg.	$R = 8$ kg.
60	3	4	6	30	4	0,000.003.9	19,5	23,4	31,2
80	3	5	8	32	6	0,000.008.6	43,0	51,6	68,8
90	3,5	6	9	38	8	0,000.014.0	70,0	84,0	112,0
100	4	7	10	44	10	0,000.020.3	101,5	121,8	162,4
110	4,5	8	11	52	12	0,000.026.6	133,0	159,6	212,8
120	5	8,5	12	58	14	0,000.032.8	164,0	196,8	262,4
130	5	9	13	58	16	0,000.039.0	195,0	234,0	312,0
140	5,5	9	14	68	18	0,000.053.0	265,5	318,6	424,8
150	5,5	9	15	74	20	0,000.065.6	328,0	393,6	524,8
160	6	10	16	80	23	0,000.084.3	421,5	505,8	674,4
180	7	11	18	90	29	0,000.137.5	687,5	825,0	1.100,0
200	8	13	20	98	37,50	0,000.193.8	969,0	1.162,8	1.550,4

El uso de esta tabla es idéntico al de la precedente.

ÍNDICE.

Págs.

PRÓLOGO 5

PARTE PRIMERA.

NOCIONES DE RESISTENCIA DE MATERIALES.

CAPÍTULO I.—Extensión y compresión.

1. Objeto de la resistencia de materiales 10
2. Fenómenos de extensión 10
3. Coeficiente de resistencia 11
4. Compresión 12
5. Aplicación de las fórmulas 13
6. Ejemplos 14
7. Coeficientes de resistencia que se adoptan en los cálculos de puentes. Fábricas 17
8. Coeficientes de resistencia del hierro, el acero y la fundición 19
9. Maderas 22
10. Sólidos sometidos á compresión 22
11. Piezas de madera 23
12. Columnas de fundición y de hierro 23
13. Piezas compuestas con palastros y hierros laminados 25
14. Hierros de ángulo 31
15. Consideraciones generales 32

CAPÍTULO II.—Flexión.

16. Descripción del fenómeno de la flexión 34
17. Procedimiento para la resolución del problema 35

Págs.

18. Determinación de las reacciones de los apoyos..... 37
19. Definición del momento flector y del esfuerzo cortante..... 39
20. Determinación de las fuerzas moleculares que se desarrollan en una sección..... 43
21. Determinación del momento flector máximo..... 46
22. Viga cargada de un peso aislado..... 49
23. Momentos de inercia de las secciones empleadas en las vigas.—Rectángulo..... 51
24. Doble T..... 52
25. Fórmulas aproximadas.—Tablas y cuadros gráficos..... 53
26. Ejemplos de aplicación..... 58
27. Vigas empotradas.—Caso en que obra un peso en el extremo de la viga..... 69
28. Viga empotrada por un extremo y cargada de pesos uniformemente repartidos en toda su longitud..... 71
29. Viga empotrada en sus dos extremos y cargada de pesos uniformemente repartidos en toda su longitud..... 72
30. Cálculo de una consola para sostener una acera volada en un puente metálico..... 73

CAPÍTULO III.—**Repartición de las presiones en una sección plana de un sólido.**

31. Problema de la estabilidad de un macizo de fábrica..... 77
32. Distribución de las presiones en una sección rectangular..... 79
33. Resumen..... 85
34. Ejemplos de aplicación..... 86

CAPÍTULO IV.—**Principios de la Estática gráfica.**

35. Composición de fuerzas aplicadas á un punto y situadas en un plano. 89
36. Composición de fuerzas cualesquiera en un plano.—Definición del polígono funicular..... 92
37. Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas situadas en un plano..... 95
38. Composición de fuerzas paralelas..... 96
39. Determinación de las reacciones de los apoyos..... 97
40. Propiedades del polígono funicular..... 98
41. Aplicación á una armadura Pollonceau sin tornapuntas..... 99
42. Aplicación á una viga triangular del sistema Warren..... 103
43. Determinación gráfica de las tensiones y compresiones de una cercha compuesta de pares, tirante, pendolón y tornapuntas..... 105

Págs.

44. Aplicación de la composición de fuerzas por medio del polígono funicular á la determinación de los centros de gravedad de figuras irregulares..... 106

PARTE SEGUNDA.

PUENTES DE FÁBRICA.

CAPÍTULO I.—Fórmulas empíricas para la determinación de las dimensiones de los elementos de un puente de fábrica.

45. Elementos principales de un puente de fábrica..... 109
46. Diversas clases de bóvedas empleadas en los puentes..... 109
47. Trazado del perfil de ensayo..... 111
48. Fórmulas empíricas del espesor en la clave para arcos de medio punto, carpaneles y elípticos..... 113
49. Espesores en la clave de los arcos escarzanos..... 118
50. Determinación del espesor de los estribos..... 121
51. Espesor de las pilas..... 126
52. Cuadro de las principales dimensiones de algunos puentes..... 127

CAPÍTULO II.—Fundamentos de la teoría de las bóvedas. Teoría del coeficiente de estabilidad.

53. Rotura de las bóvedas..... 132
54. Empuje en la clave y reacción del apoyo..... 133
55. Teoría de Lamé y Clapeyron..... 134
56. Aplicaciones del método del coeficiente de estabilidad..... 136
57. Corrección del espesor del estribo y de las pilas dados por las fórmulas empíricas..... 137
58. Presiones en la clave y en la junta de rotura..... 138
59. Junta de rotura..... 139
60. Influencia de la posición de una sobrecarga en la estabilidad de la obra..... 139

CAPÍTULO III.—Teoría de la curva de presiones.

61. Curva de presiones.—Método de Méry..... 141
62. Condiciones de estabilidad de la bóveda..... 143
63. Indeterminación de la curva de presiones..... 145

Págs

64. Bóveda con sobrecarga..... 146
65. Operaciones que requiere la comprobación de la estabilidad de una bóveda..... 147
66. Determinación de los centros de gravedad..... 148
67. Determinación del empuje en la clave..... 150
68. Determinación de las reacciones en las juntas por medio del polígono funicular..... 152
69. Precauciones para trazar con precisión la curva de presiones..... 153
70. Descomposición por juntas verticales..... 154
71. Prolongación de la curva de presiones en el estribo..... 155
72. Corrección del perfil de la bóveda..... 156
73. Noticia de las teorías de Dupuit y Durand-Claye..... 157

CAPÍTULO IV.—Aplicaciones prácticas de los métodos de comprobación de la estabilidad de las bóvedas.

74. Arco elíptico de 24 m. de luz y 9,70 de flecha..... 160
75. Comprobación por el método del coeficiente de estabilidad..... 161
76. Comprobación de la misma bóveda por medio de la curva de presiones. 164
77. Arco escarzano de 18 m. rebajado al $^1/_6$..... 172
78. Comprobación por el método del coeficiente de estabilidad..... 173
79. Comprobación del mismo arco por medio de la curva de presiones... 175
80. Comprobación de la misma bóveda descomponiéndola en trozos por medio de juntas verticales..... 179

CAPÍTULO V.—Breves nociones acerca de los muros de sostenimiento.

81. Muros de sostenimiento.—Definición del empuje de las tierras..... 182
82. Valor del empuje y punto de aplicación..... 183
83. Comprobación de la estabilidad..... 186
84. Densidades y taludes naturales ó ángulos de rozamiento que se adoptan en la práctica..... 187
85. Muros con el paramento interior vertical y el exterior en talud..... 189
86. Ejemplos de comprobación de muros de sostenimiento..... 190
87. Muros de 6, 8 y 12 m. de altura..... 191
88. Muros con el paramento exterior con talud de $^1/_{10}$ y el interior con talud de $^1/_5$..... 193
89. Ejemplo de comprobación de un muro con talud exterior de $^1/_{10}$ é interior de $^1/_5$..... 194
90. Muros de menor altura que el terraplén que sostienen..... 197

PARTE TERCERA.

PUENTES METÁLICOS DE TRAMOS INDEPENDIENTES.

CAPÍTULO I.—Cuestiones generales relativas al cálculo de los puentes metálicos.

Págs.

91. Composición general de un puente metálico..... 199
92. Determinación de las cargas en las viguetas y demás piezas del piso..... 200
93. Determinación de las cargas correspondientes á las vigas principales..... 203
94. Determinación de las cargas móviles correspondientes á las vigas principales..... 205
95. Cargas uniformemente repartidas que sirven de base al cálculo de los puentes para ferrocarriles..... 206
96. Cargas uniformemente repartidas que sirven de base al cálculo de los puentes para carreteras y para ferrocarriles económicos..... 211
97. Sección y diámetro de los rodillos de dilatación..... 218
98. Roblonado..... 219

CAPÍTULO II.—Estudio general de los arriostramientos.

99. Objeto de los arriostramientos..... 222
100. Evaluación de los esfuerzos producidos por el viento..... 223
101. Evaluación de la superficie á que se aplica la presión del viento..... 224
102. Repartición del esfuerzo del viento y determinación del esfuerzo correspondiente á cada nudo..... 225
103. Disposición general del arriostramiento horizontal..... 226
104. Arriostramientos transversales..... 226

CAPÍTULO III.—Cálculo de las vigas de alma llena.

105. Puentes de luces pequeñas..... 231
106. Cálculo de las cabezas..... 232
107. Cálculo del espesor del alma..... 234
108. Aplicación á un puente de 13 m. de luz para ferrocarril..... 235
109. Cálculo del alma..... 239

CAPÍTULO IV.—**Vigas de celosía ordinaria.**

Págs.

110. Definición y composición de las vigas de celosía..... 243
111. Cálculo de las vigas de celosía..... 244
112. Barras comprimidas y estiradas..... 246
113. Esfuerzos cortantes que se deben considerar..... 247
114. Determinación de la zona en que las barras sufren esfuerzos de signos contrarios..... 248
115. Montantes verticales..... 249
116. Aplicaciones.—1.er ejemplo.—Puente de 25 m. de luz para carretera. 250
117. Cálculo de los largueros..... 250
118. Cálculo de la vigueta..... 252
119. Cálculo de la viga.—Determinación de las cargas..... 254
120. Cálculo de las cabezas..... 254
121. Cálculo de las barras de la celosía..... 255
122. Determinación de la zona en que las barras sufren esfuerzos de signo contrario..... 259
123. 2.° ejemplo.—Puente de 40 m. de luz para ferrocarril..... 260
124. Cálculo de los largueros..... 261
125. Cálculo de la vigueta..... 262
126. Cálculo de las cabezas de la viga principal..... 263
127. Cálculo de las barras de la celosía..... 265

CAPÍTULO V.—**Vigas de celosía de grandes mallas.**

128. Definiciones..... 270
129. Método general de cálculo de los sistemas articulados simples..... 273
130. Tensiones máxima y mínima de una barra..... 277
131. Sistemas de grandes mallas más usados..... 279

CAPÍTULO VI.—**Viga recta de montantes comprimidos y diagonales estiradas. Sistema simple.**

132. Cálculo de una viga recta simple de montantes comprimidos y diagonales estiradas..... 283
133. Cálculo de las tensiones de las cabezas..... 284
134. Cálculo de las diagonales..... 288
135. Cálculo de las verticales..... 295
136. Composición de la viga..... 297
137. Influencia de la posición del piso..... 299

Págs.

138. Puente de 35 m. de luz para carretera con 6 m. de ancho y piso inferior.—Sistema simple de montantes comprimidos y diagonales tendidas..... 299
139. Cálculo de las cabezas..... 301
140. Cálculo de las verticales..... 303
141. Cálculo de las diagonales..... 310
142. Cálculo del arriostramiento superior..... 314

CAPÍTULO VII.—Viga recta doble de montantes comprimidos y diagonales estiradas.

143. Cálculo de una viga recta doble de montantes comprimidos y diagonales estiradas..... 321
144. Puente para ferrocarril de vía única de 64 m. de luz y piso superior. 322
145. Evaluación de las cargas..... 323
146. Cálculo del diagrama *(a)*.—Cabezas..... 325
147. Montantes..... 327
148. Diagonales..... 335
149. Cálculo del diagrama *(b)*..... 338
150. Cálculo de los montantes..... 340
151. Diagonales..... 348

CAPÍTULO VIII.—Viga de montantes y cruces de San Andrés.

152. Descomposición del diagrama en dos sistemas simples..... 352
153. Procedimiento para el cálculo de la viga..... 353
154. Aplicación á un puente para ferrocarril de vía única de 32 m. de luz con el piso en la parte superior..... 355
155. Cálculo de las cabezas en el diagrama *(a)*..... 357
156. Cálculo de los montantes..... 359
157. Cálculo de las diagonales..... 367
158. Diagrama *(b)* y viga definitiva..... 370

CAPÍTULO IX.—Vigas parabólicas.

159. Propiedades fundamentales de la viga parabólica..... 374
160. Diagonales y verticales..... 379
161. Puente parabólico de 50 m. de luz para carretera, con 6 m. de ancho. 384
162. Cálculo de las cabezas..... 386
163. Cálculo de las diagonales..... 389
164. Montantes..... 397

CAPÍTULO X.—Aplicación de los procedimientos gráficos al cálculo de las vigas de grandes mallas.

Págs

165. Vigas rectas..... 40
166. Cálculo de las cabezas..... 40
167. Cálculo de los montantes y diagonales..... 41
168. Viga parabólica.—Determinación de los esfuerzos correspondientes á las cabezas..... 41
169. Cálculo de las diagonales..... 41

PARTE CUARTA.

VIGAS DE VARIOS TRAMOS.

CAPÍTULO I.—Generalidades acerca de las vigas de varios tramos.

170. Planteamiento del problema..... 42
171. Teorema de los tres momentos..... 42
172. Determinación del momento flector en un punto de un tramo cualquiera..... 42
173. Trazado de la curva de los momentos flectores en un tramo..... 42
174. Determinación de los esfuerzos cortantes..... 43
175. Hipótesis relativas á las cargas..... 43
176. Distribución de las luces en las vigas de varios tramos..... 43

CAPÍTULO II.—Vigas de dos tramos.

177. Hipótesis relativas á las cargas..... 43
178. Cálculo de los momentos sobre los apoyos..... 43
179. Cálculo del momento flector en un punto cualquiera del primer tramo. 43
180. Esfuerzos cortantes..... 43
181. Reacciones de los apoyos..... 43
182. Puente de dos tramos continuos de 30 m. de luz para carretera..... 44
183. Hipótesis relativas á las cargas..... 44
184. Momentos flectores sobre los apoyos..... 44
185. Momentos flectores en el primer tramo..... 44
186. Distribución de las chapas en las cabezas de las vigas..... 44
187. Esfuerzos cortantes..... 44
188. Cálculo de las secciones de las barras de la celosía..... 45

CAPÍTULO III.—Vigas de tres tramos.

		Págs.
189.	Distribución de las luces	455
190.	Hipótesis relativas á las cargas	455
191.	Fórmulas de los momentos flectores en los apoyos	456
192.	Valores del momento flector en los tramos	457
193.	Valores del esfuerzo cortante	457
194.	Puente para ferrocarril de ancho normal y de vía única	458
195.	Evaluación de las cargas	458
196.	Hipótesis relativas á las cargas	459
197.	Cálculo de los momentos flectores sobre los apoyos	460
198.	Valores de los momentos flectores en los tramos	461
199.	Diagrama de los momentos y distribución de las chapas de palastro en las cabezas de la viga	468
200.	Determinación de los esfuerzos cortantes	471
201.	Reacciones de los apoyos	474
202.	Diagrama de los esfuerzos cortantes más desfavorables	476
203.	Determinación de las secciones teóricas de las barras	476

CAPÍTULO IV.—Vigas de cuatro, cinco ó más tramos.

204.	Vigas de cuatro tramos	479
205.	Momentos flectores en los apoyos	480
206.	Valores de los momentos flectores en los tramos	482
207.	Valores del esfuerzo cortante	482
208.	Reacciones de los apoyos	483
209.	Vigas de cinco tramos; hipótesis relativas á las sobrecargas	483
210.	Momentos flectores en los apoyos	484
211.	Valores de los momentos flectores en los tramos	485
212.	Valores de los esfuerzos cortantes en los tramos	486
213.	Reacciones de los apoyos	486
214.	Vigas de más de cinco tramos	486

CAPÍTULO V.—Generalidades acerca de los proyectos de puentes.

215.	Bases generales de un proyecto	488
216.	Elección entre los puentes de fábrica y los metálicos	489
217.	Distribución de las luces en los puentes de fábrica	490
218.	Distribución de las luces en los puentes metálicos	492
219.	Ejemplo	493

Págs.

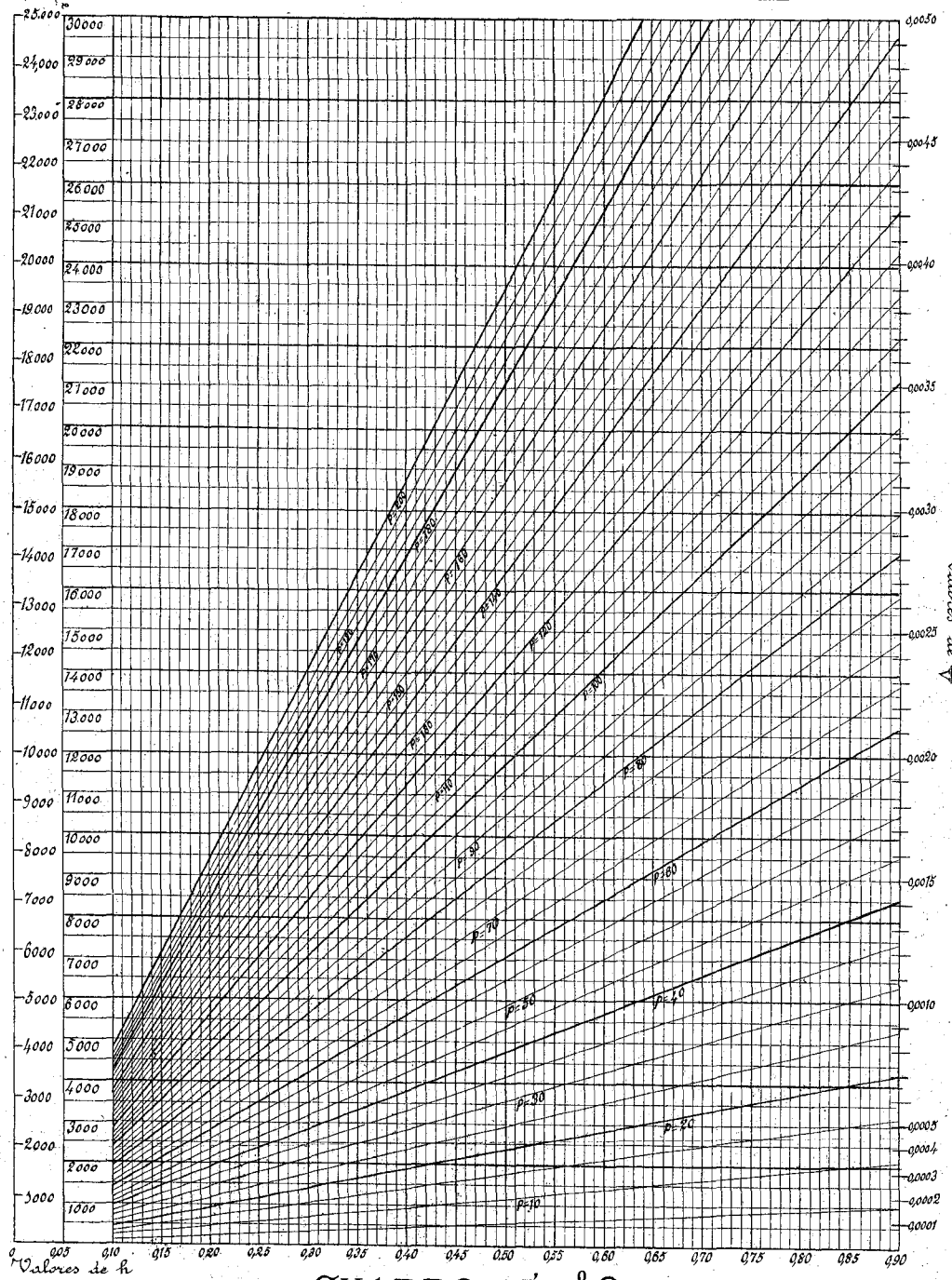
220. Elección entre los diversos sistemas de puentes metálicos..... 495
221. Comparación entre las vigas continuas y las de tramos independientes..... 498
222. Comparación entre el hierro y el acero..... 500
APÉNDICES..... 503
Apéndice núm. 1.—Tabla de los cuadrados, cubos, raíces cuadrada y cúbica y logaritmo de los números enteros de 1 á 1.000; circunferencia y área del círculo de diámetro *n*..... 505
Apéndice núm. 2.—Tablas de las líneas trigonométricas naturales de 10 en 10 minutos para los arcos comprendidos entre 0 y 90°..... 527
Apéndice núm. 3.—Peso por metro cuadrado, en kilogramos, de las chapas de hierro, acero y fundición..... 532
Apéndice núm. 4.—Pesos por metro lineal, en kilogramos, de diversos tipos de hierros de ángulo y de T..... 533
Apéndice núm. 5.—Tabla de hierros en doble T con expresión del peso por metro lineal, módulo de resistencia y momento resistente para coeficientes de resistencia de 5, 6 y 8 kilogramos por milímetro cuadrado..... 535
Apéndice núm. 6.—Tabla de hierros Zorés con expresión del peso por metro lineal, módulo de resistencia y momento resistente para coeficientes de resistencia de 5, 6 y 8 kilogramos por milímetro cuadrado..... 538

ERRATAS.

PÁGINA	LÍNEA.	DICE.	DEBE DECIR.
37	18	que los momentos	que la suma de los momentos
57	12	$A\,B\,A'\,B'$, $C\,D\,C'\,D'$	$A\,B\,C\,D$, $A'\,B'\,C'\,D'$
90	21	el punto á su extremo b	el punto a á su extremo b
135	18	y, p, d son conocidas	y, p, d son conocidas;
153	1	$a\,q$	$a\,o$
228	27	los esfuerzos de las fuerzas	los esfuerzos de las piezas
307	15	El valor d $v_4{}^{\pi}$	El valor de $v_4{}^{\pi}$
311	Última.	las relativas	las relativas á las
339	19	igual á S_5'.	igual á S_4'.
431	9	para poder trazaral	para poder trazarla
497	4	y cruces de San Andrés	y diagonales tendidas.
506			
507			
509			
510			
511			
512	1	$n\,\pi$	$\pi\,n$
513			
517			
518			
519			

CUADRO NÚM.º 1.

Vigas compuestas de alma y cuatro hierros de ángulo



CUADRO NÚM.º 9.

Espesor del estribo para arcos de medio punto según la fórmula de Lesguiller $E=\sqrt{L}[0{,}60+0{,}04h]$

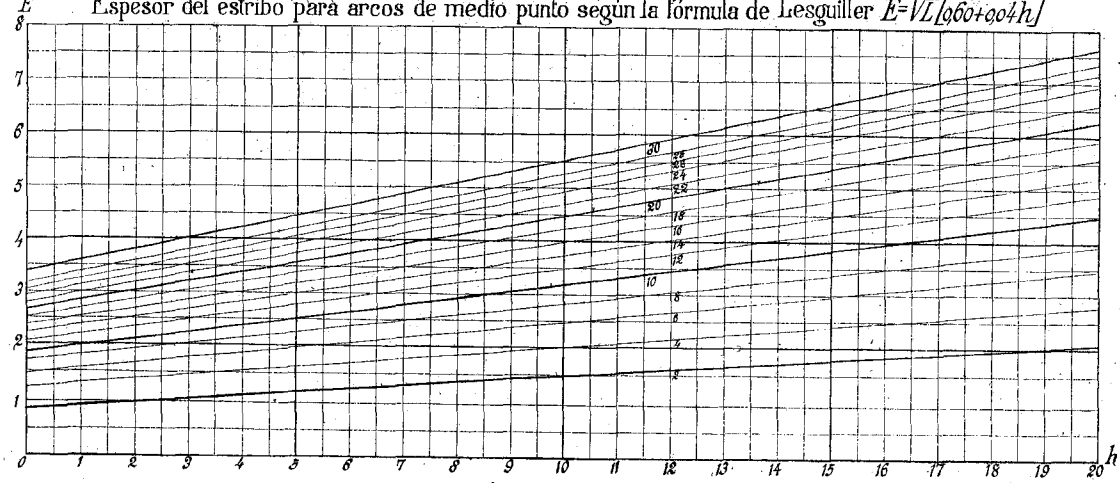
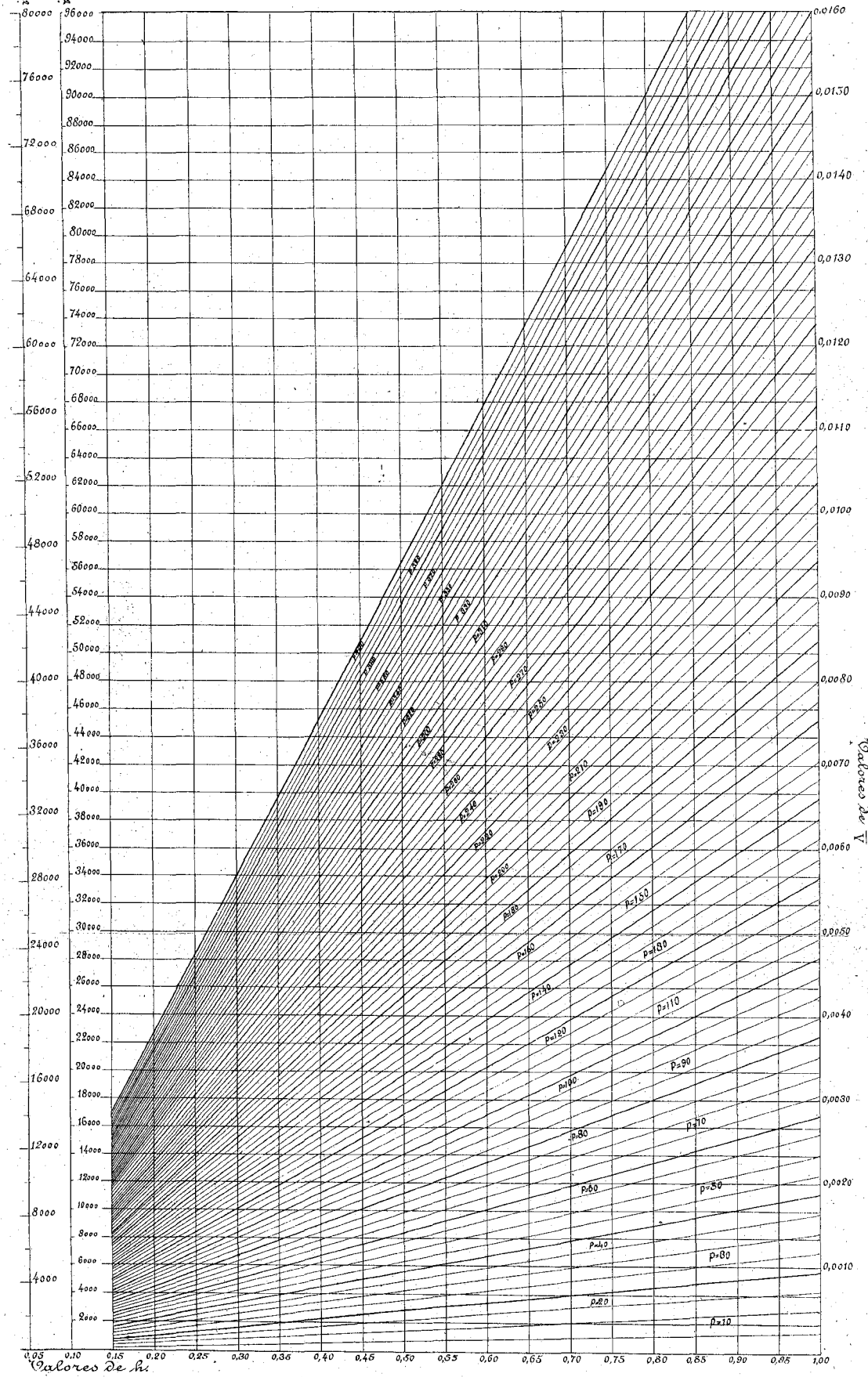


Lámina 1.

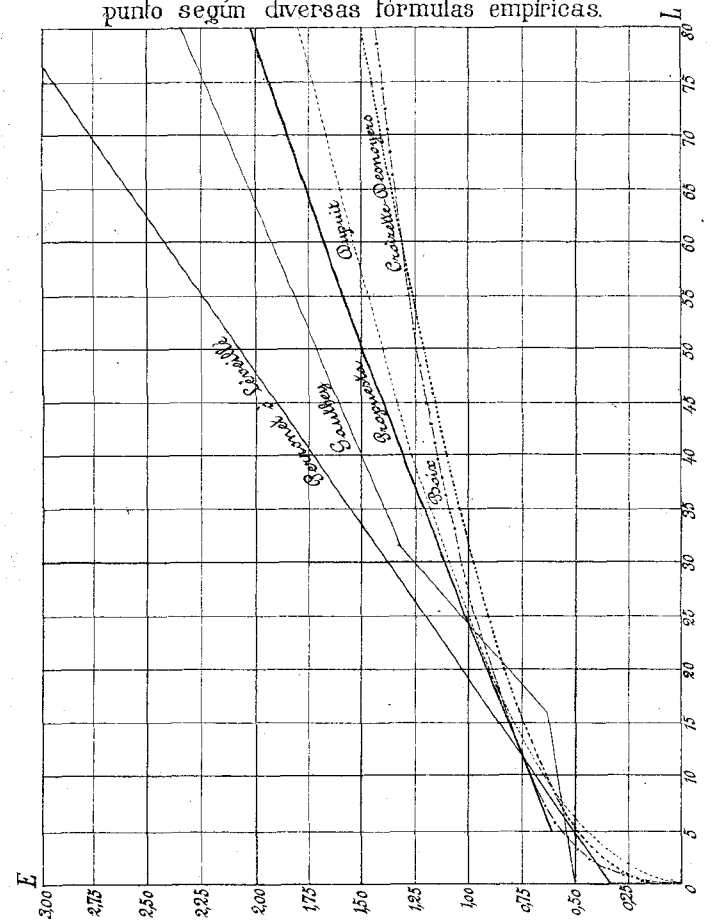
CUADRO NÚM.º 2.

Vigas compuestas de alma, 4 hierros de ángulo y chapas en las cabezas.



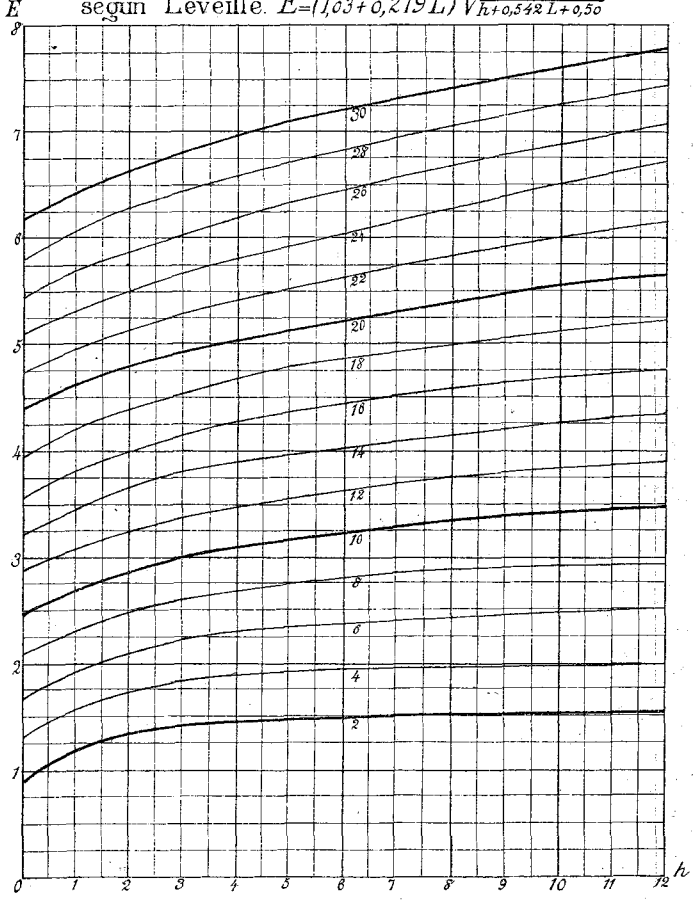
CUADRO NÚMº 3

Espesores en la clave de los arcos de medio punto según diversas fórmulas empíricas.



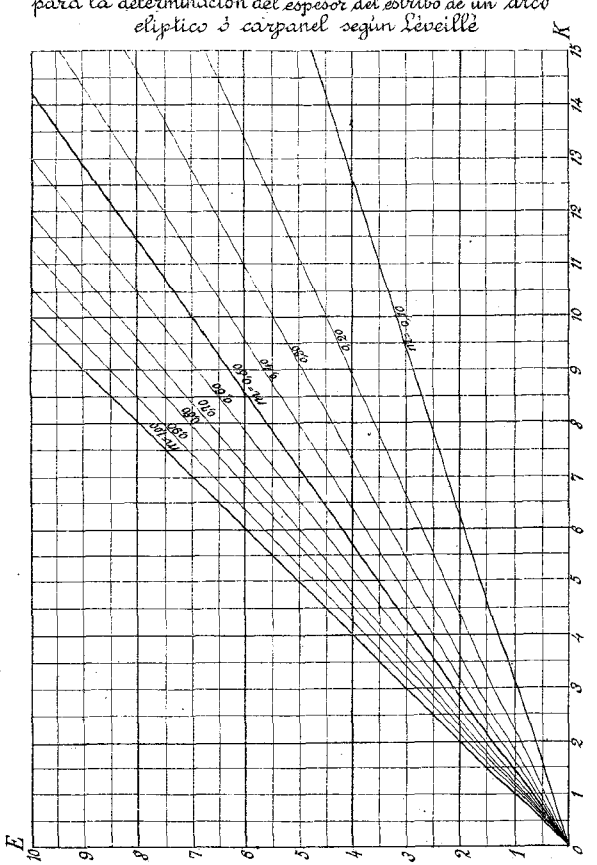
CUADRO NÚMº 4

Espesor del estribo para arcos de medio punto según Léveillé. $E=(1{,}03+0{,}279\,L)\sqrt{\frac{h+0{,}25\,L}{h+0{,}542\,L+0{,}50}}$



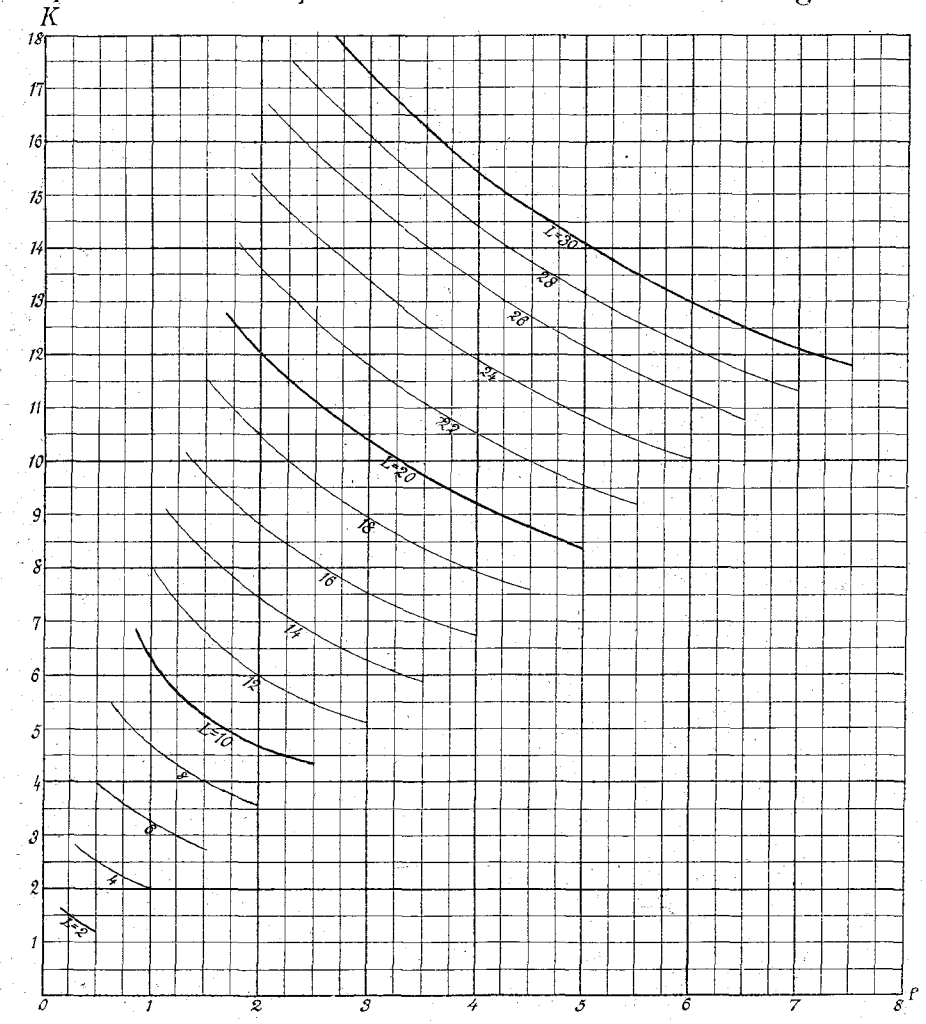
CUADRO NÚMº 8

Valores de E de la fórmula $E=K\sqrt{m}$; $m=\frac{h}{H}$; para la determinación del espesor del estribo de un arco elíptico ó carpanel según Léveillé



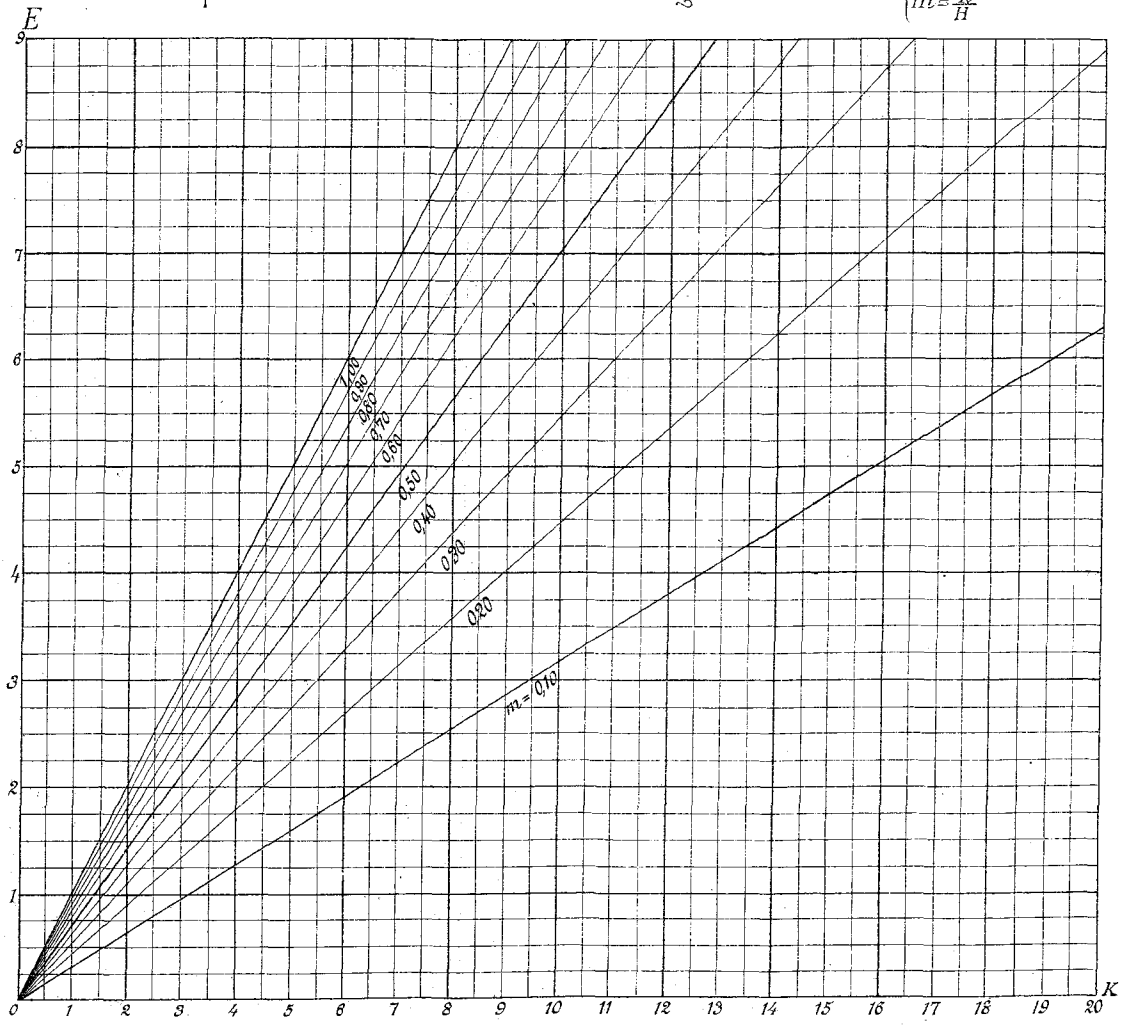
CUADRO NÚMº 5.

Valores de K según la fórmula $K=(0{,}33+0{,}212\,l)\sqrt{\frac{t}{r+0{,}20\,Vt}}$ para determinar el espesor del estribo de un arco escarzano según Léveillé



CUADRO NÚMº 6

Espesor del estribo de un arco escarzano según Léveillé. Fórmula $\begin{cases} E=K\sqrt{m} \\ m=\frac{h}{H} \end{cases}$

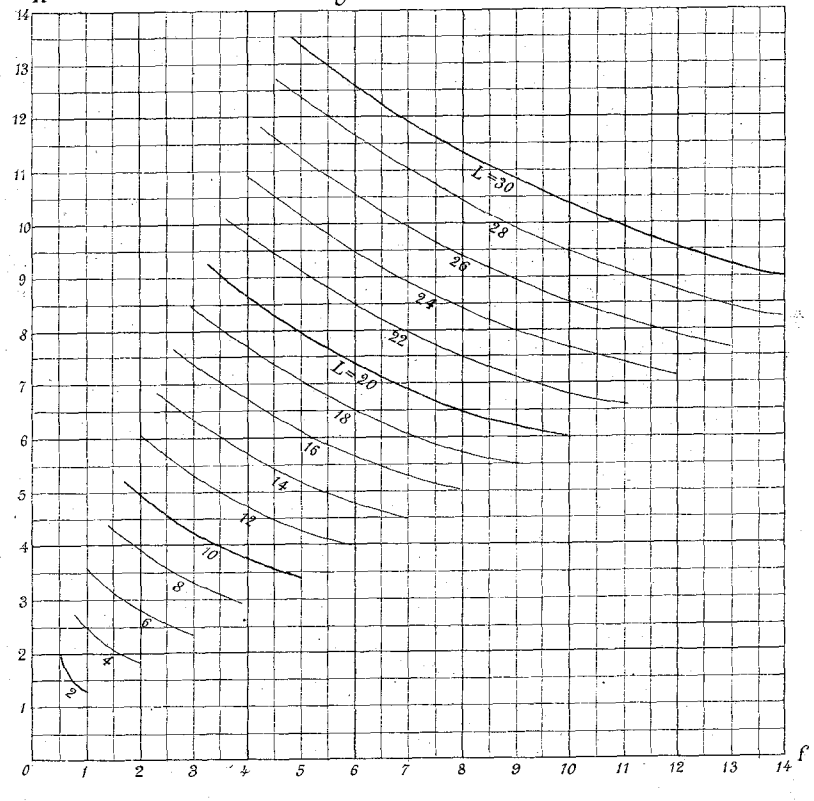


CUADRO NÚM 7.

Valores de K de la fórmula $K=(0{,}43+0{,}153\,l)\sqrt{\frac{0{,}84\,L}{0{,}465\,f+0{,}042}}$;

para la determinación del espesor del estribo de un arco carpanel ó elíptico

según Léveillé



CUADRO NÚM. 10.

Término complementario á sumar al espesor del estribo del arco de medio punto

para obtener el espesor del estribo de un arco escarzano ó carpanel

según Lesguiller.

Fórmulas

Arco escarzano

$E_1=E+0{,}1\left[\frac{L}{f}-2\right]\sqrt{L}=E+K_1$

$K_1=0{,}1\left[\frac{L}{f}-2\right]\sqrt{L}$

Arco carpanel ó elíptico

$E_2=E+0{,}05\left[\frac{L}{f}-2\right]\sqrt{L}=E+K_2$

$K_2=0{,}05\left[\frac{L}{f}-2\right]\sqrt{L}$

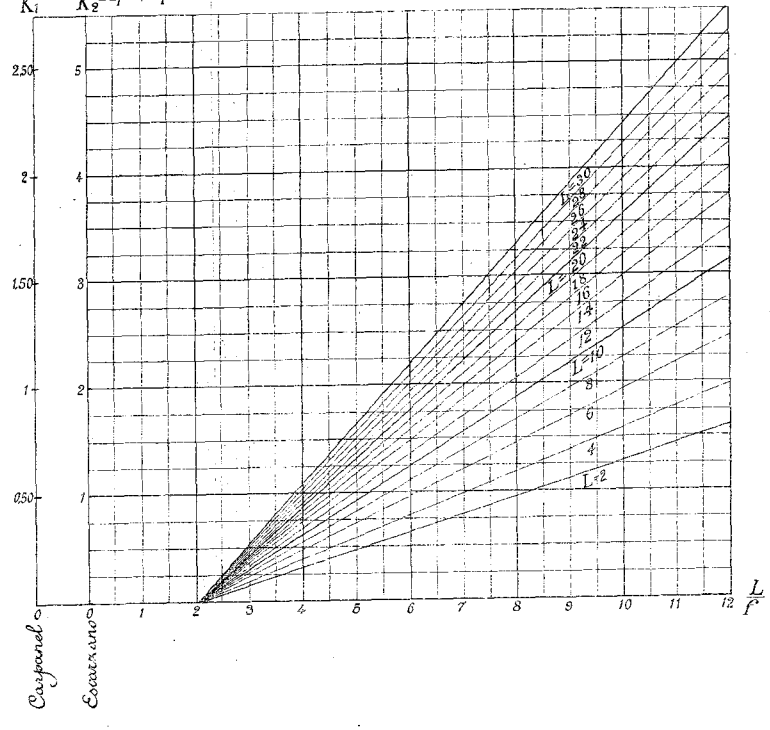
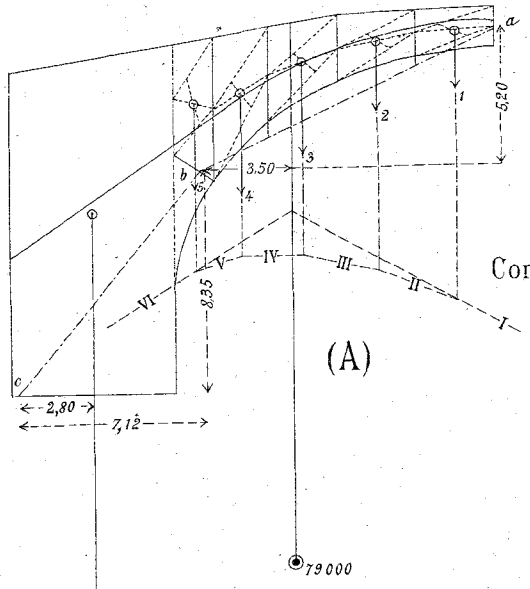
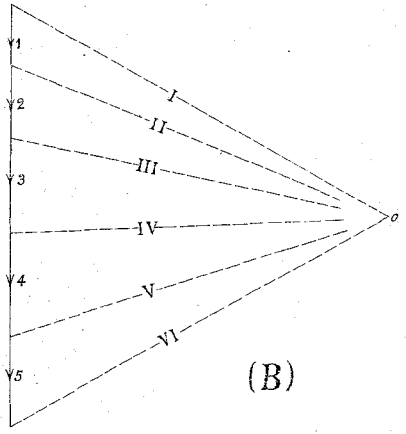


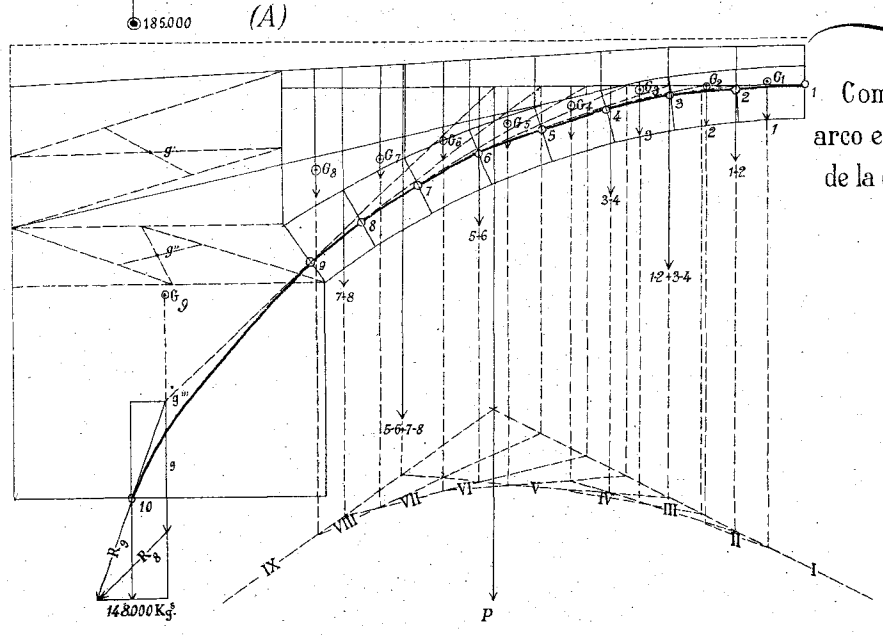
Fig. 65.

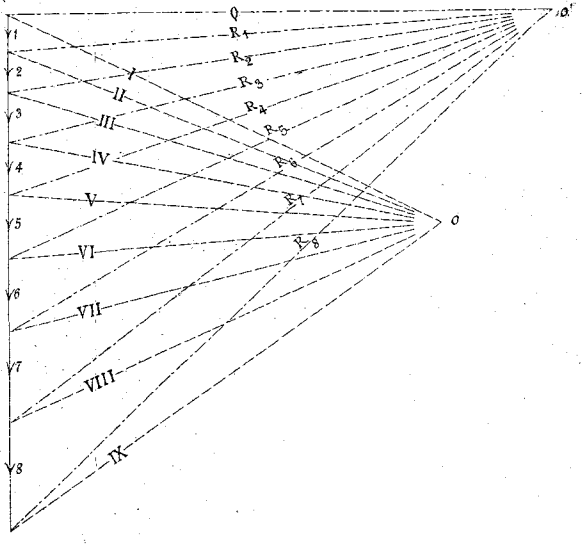




Comprobación de la estabilidad de un arco elíptico por el método del coeficiente de estabilidad.

Fig. 68.





Comprobación de un arco escarzano por medio de la curva de presiones.

Fig. 66.

Comprobación de una bóveda eliptica por medio de la curva de presiones.

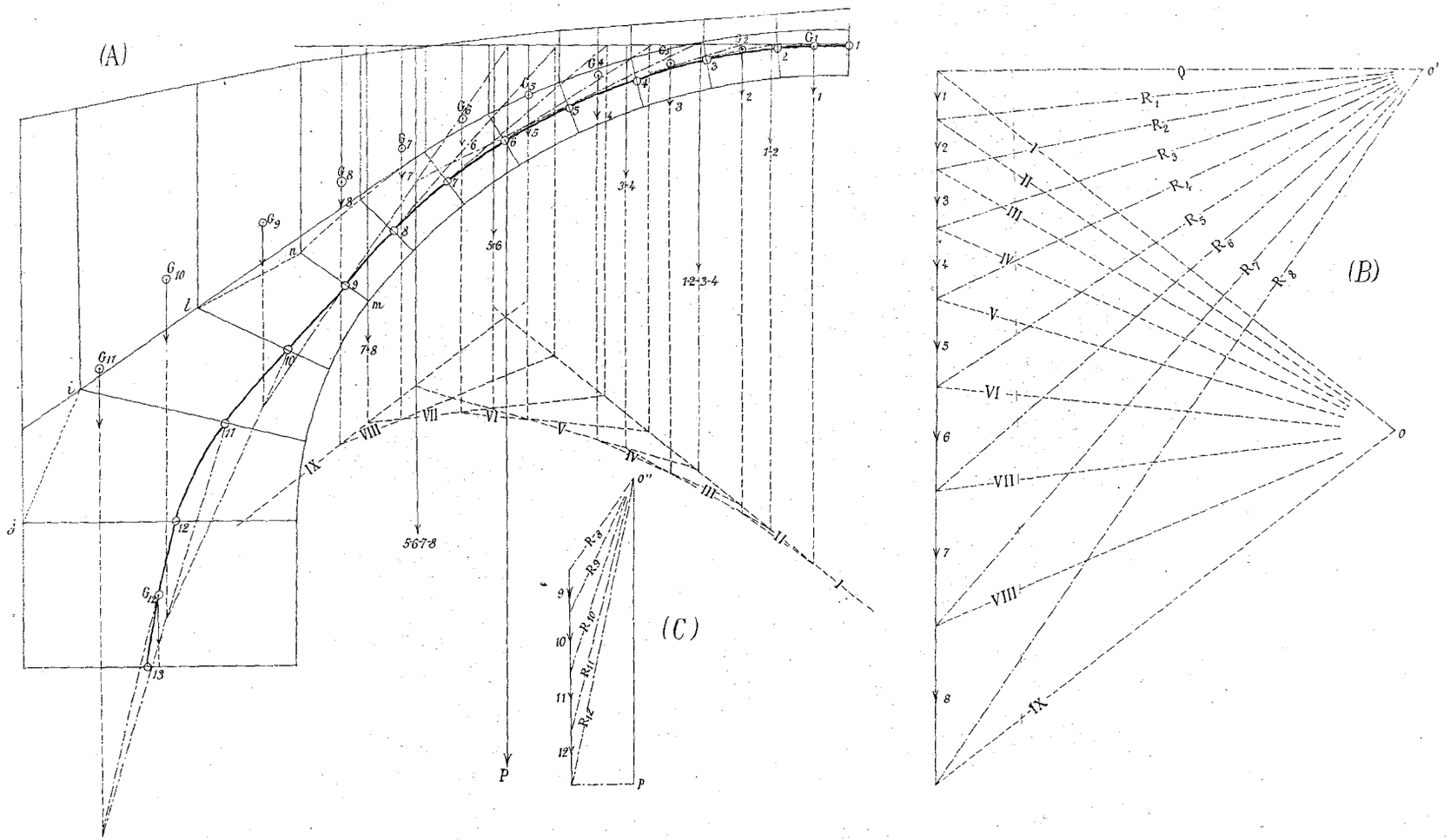
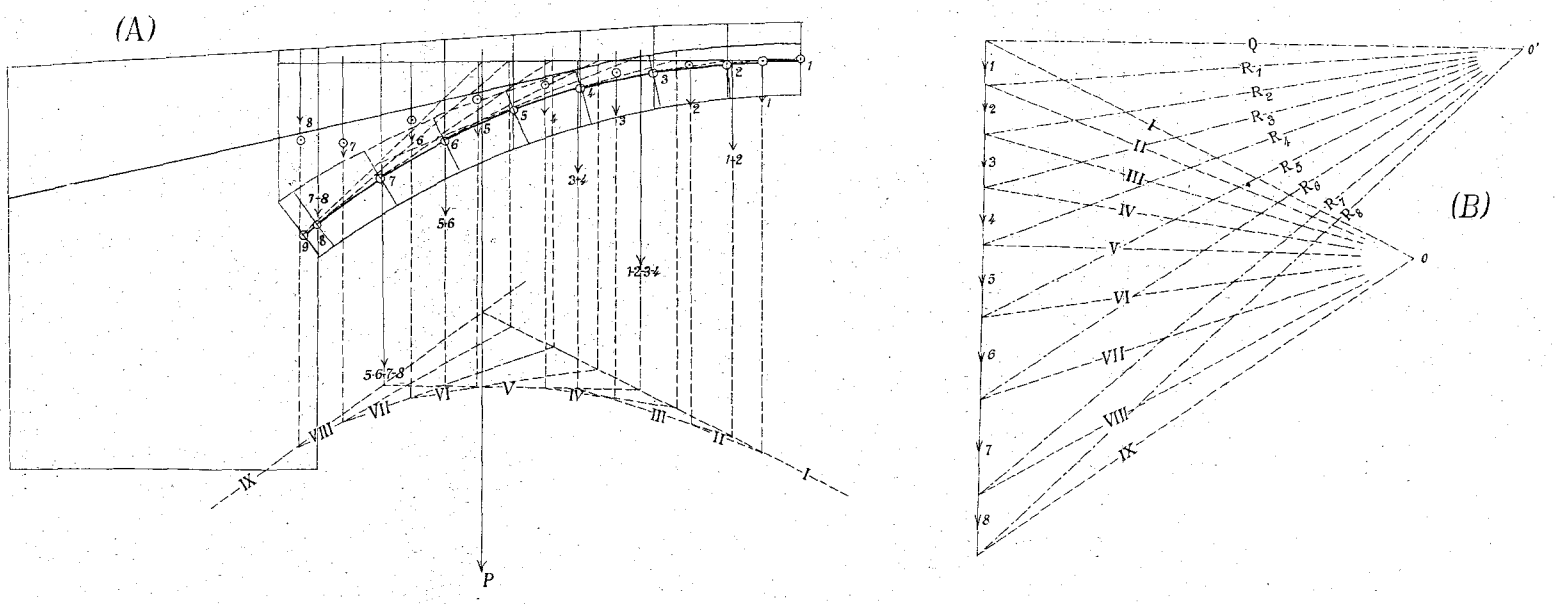


Fig. 69.

Comprobacion de la estabilidad de un arco escarzano por medio de la curva de presiones.

(Descomposición en dovelas por juntas verticales.)